Interpolation (4)

Monday, March 16, 2015 5:34 PM

$$\|f-p\|_\infty \le \frac{\cancel{n!}\, h^{n+1}}{4} \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)\cancel{!}}$$

$$= \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

$$\boxed{\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|}$$

Ορίζω άλλη διατέριση, την ομοιόμορφη και συμπεριλημμένα σημεία Chebychev

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right) \quad i=0,\dots,n$$

$$x_i \in (-1,1)$$

Ανάπτυγμα Taylor:

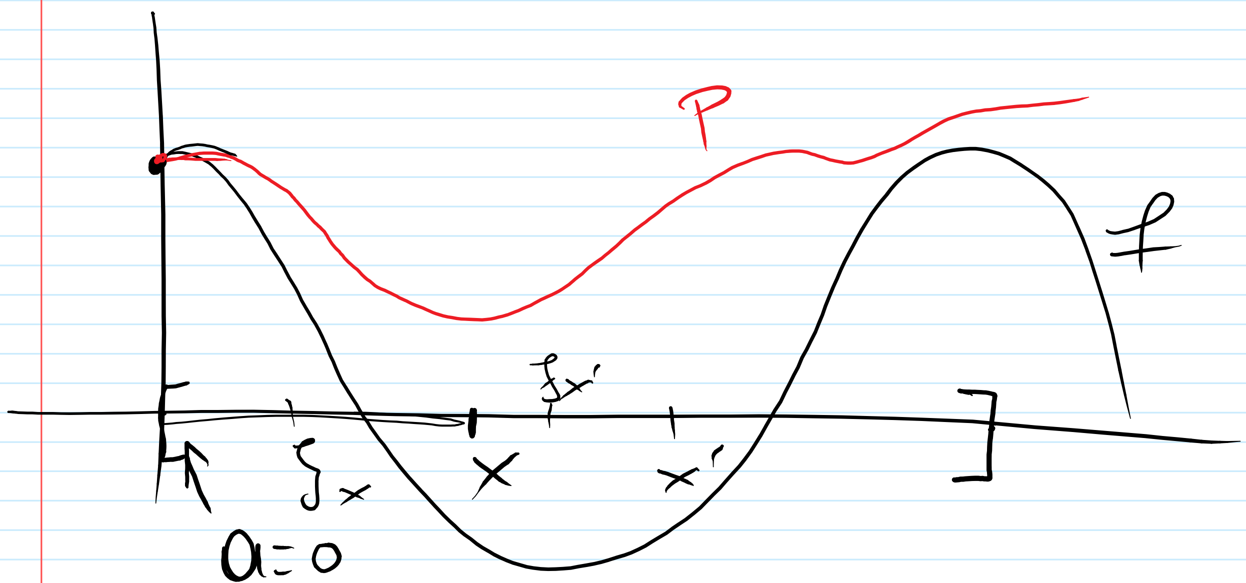
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots =$$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$

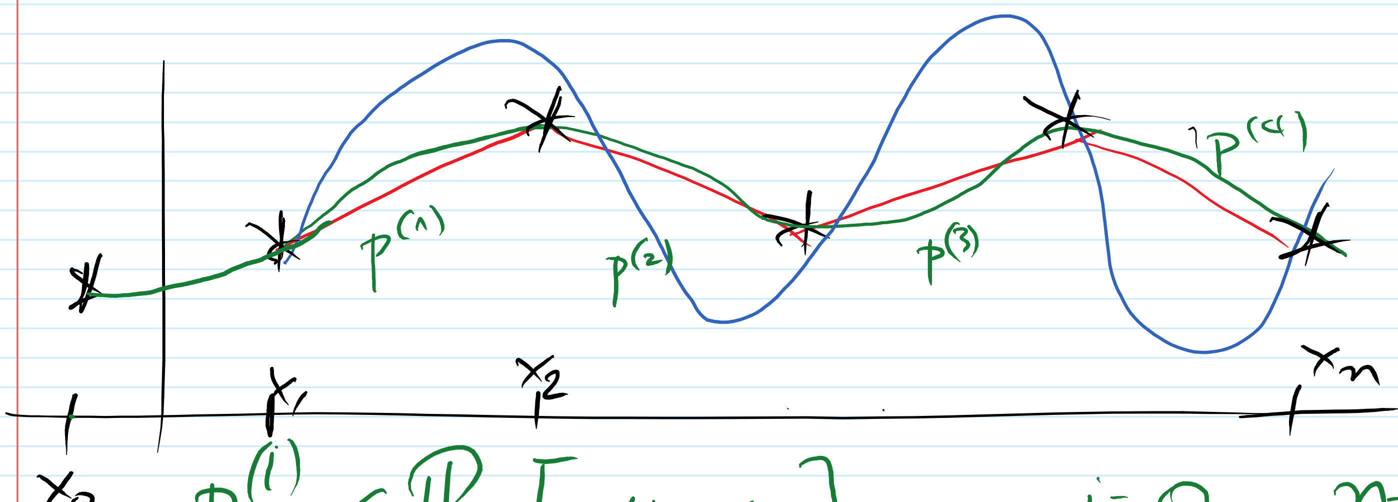
με ξ_x μεταξύ a και x ?

σφάλμα: $R_{n+1}(f) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

$$\|R_{n+1}\|_\infty \leq \frac{\max |x-a|^{n+1}}{n+1!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$



Τμηματικά πολυώνυμα



$p^{(i)} \in \mathbb{P}_2 [x_i, x_{i+1}] \qquad i = 0, \dots, n-1$

$$P^{(i)}(x) = a_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i$$

3n συντελεστές για τα n πολυώνυμα.

Αν f η συνάρτηση από την οποία έχω τα σημεία (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$ τότε για κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

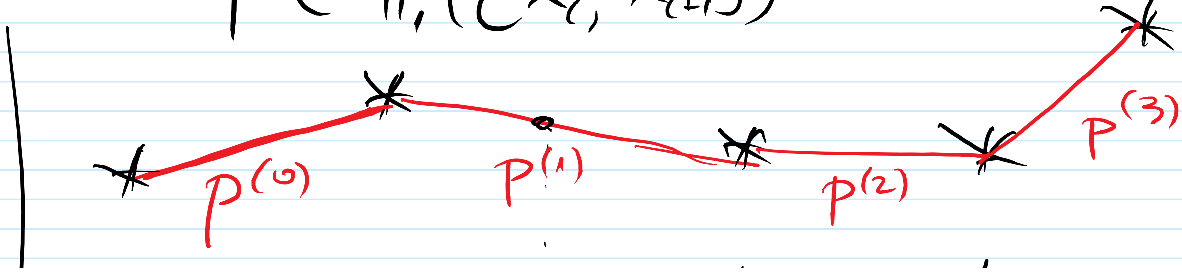
$$f(x) - P^{(i)}(x) = \frac{\prod_{k=i}^{i+1}(x-x_k)}{2!} f^{(2)}(\xi_x)$$

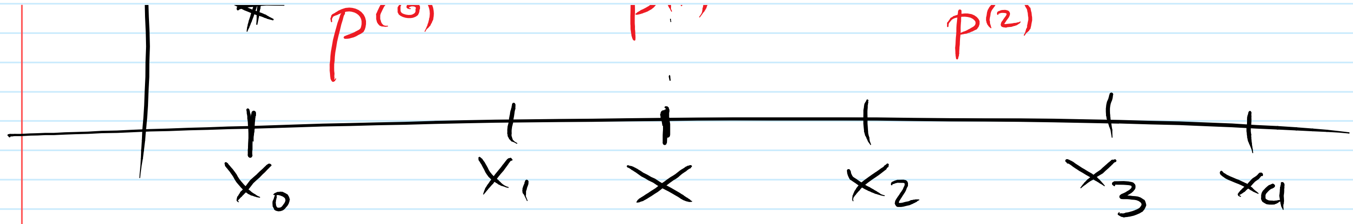
Τελικά

$$\|f-h\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f^{(2)}\|_\infty$$

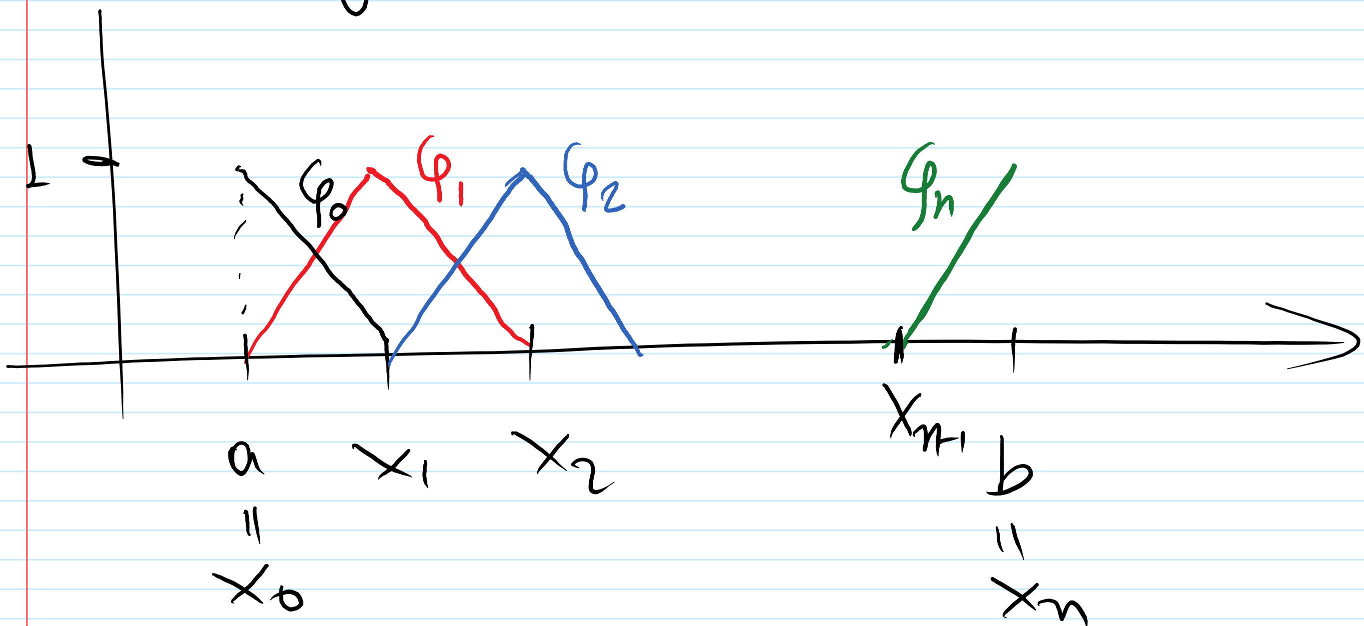
$$h(x) = p^{(i)}(x) \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$p^{(i)} \in \mathbb{P}_1([x_i, x_{i+1}])$$





Splines $1^{ου}$ Βαθμών ή γραμμικές Splines $S(x)$ .....



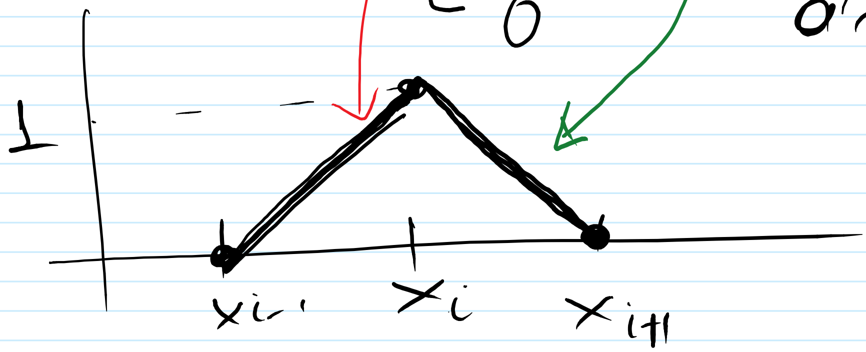
$S = ?$ $\qquad S = \sum c_i \varphi_i$

Περιορισμοί για δημιουργία Βάσης

$$\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\[2ex] \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{αλλού} = [x_0, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, x_n] \end{cases}$$



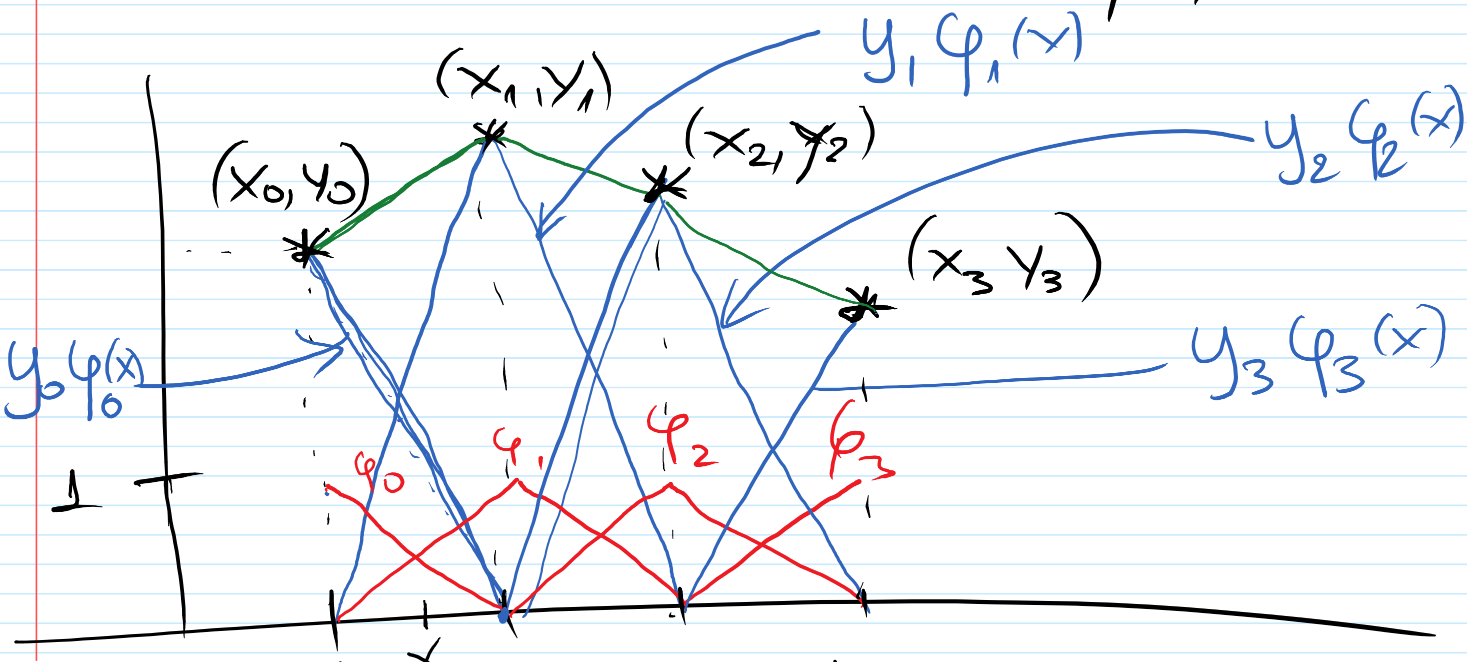
Όλοι οι κόμβοι της παρεμβολής

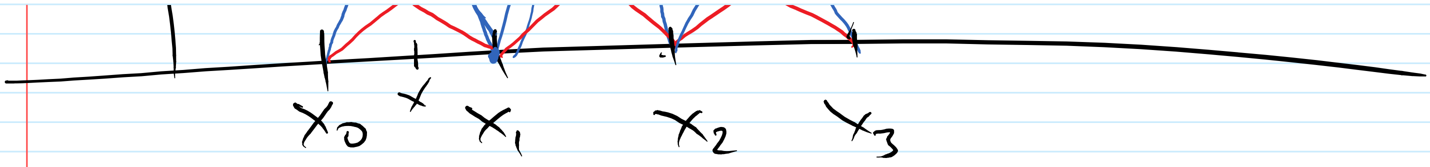
$(x_i, y_i) \quad i=0,\dots,n$

$x_i \longrightarrow \varphi_i$ βάση

Η ζητούμενη spline S, πρέπει

να ικανοποιεί $S(x_i) = y_i, \quad i=0,\dots,n$





$$y_0 \varphi_0(x) = \begin{cases} y_0 & x = x_0 \\ 0 & x = x_i \, , i \neq 0 \end{cases}$$

$$y_1 \varphi_1(x) = \begin{cases} y_1 & x = x_1 \\ 0 & x = x_k \, , k \neq 1 \end{cases}$$

$$S(x) = y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x) + y_2 \varphi_2(x) + y_3 \varphi_3(x) \in \mathbb{P}_1 [x_0, x_3]$$

$$S(x_0) = y_0 \varphi_0(x_0) + \cancel{y_1 \varphi_1(x_0)} + \cancel{y_2 \varphi_2(x_0)} + \cancel{y_3 \varphi_3(x_0)} = y_0$$

$$S(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(x_i) = y_i \cancelto{1}{\varphi_i(x_i)} = y_i \ \forall i$$

Θεωρώ $S(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$

Θέλω $S(x_j) = y_j \quad j=0,\dots,n$

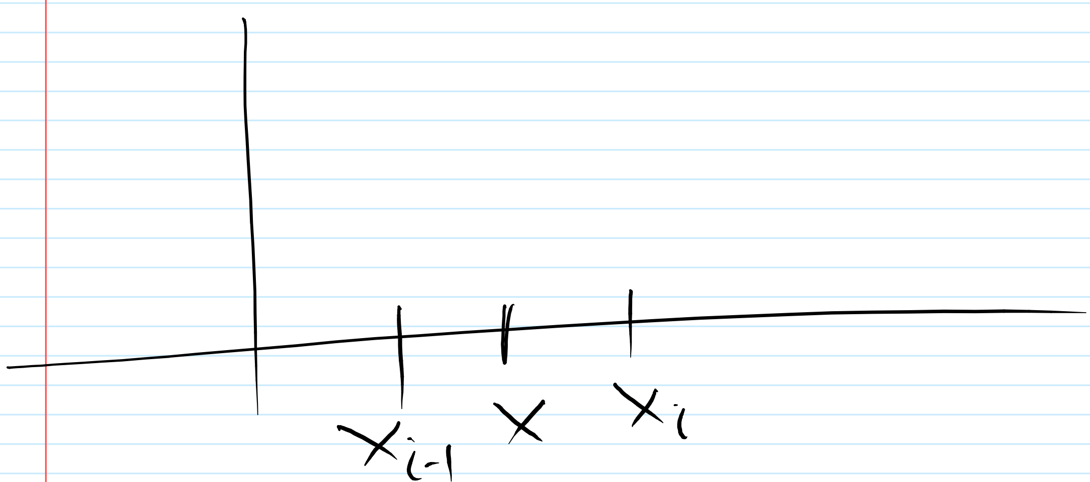
$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_j) = y_j \quad j=0,\dots,n$$

$$c_j \cancel{\varphi_j(x_j)}^{1} = y_j \quad j=0,\dots,n$$

$$\boxed{c_j = y_j \qquad j=0,\dots,n}$$

σε μορφή πίνακα το σύστημα

$I \cdot c = y$ (ο πράξεις για τα c_i)



$$S(x) = y_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + y_i \varphi_i(x)$$

$$= y_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

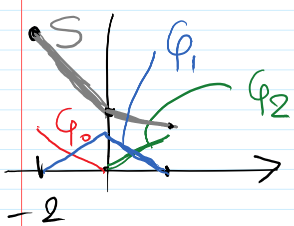
9 πράξεις!!

Interpolation (5)

Tuesday, March 17, 2015 10:02 AM

Παράδειγμα γραμμικής spline:

$(-2, 10), (0, 5), (1, 4)$



$x_0 = -2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{0-(-2)} & [x_0, x_1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & [-2, 0]; \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(-2)}{0-(-2)} & [x_0, x_1] \\ \dfrac{1-x}{1-0} & [x_1, x_2] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & [-2, 0] \\ 1-x, & [0, 1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\cancel{x_1}^{\,0}}{\cancel{x_2-x_1}^{\,1}} & [x_1, x_2] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} x & [0, 1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα $S(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) =$

$$= \begin{cases} y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) & [x_0, x_1] \\ y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) & [x_1, x_2] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

• $[x_0, x_1]$

$$y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x) = 10 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + 5 \, \frac{x+2}{2} =$$

$$= -5x + \frac{5}{2}x + 5 = -\frac{5}{2}x + 5$$

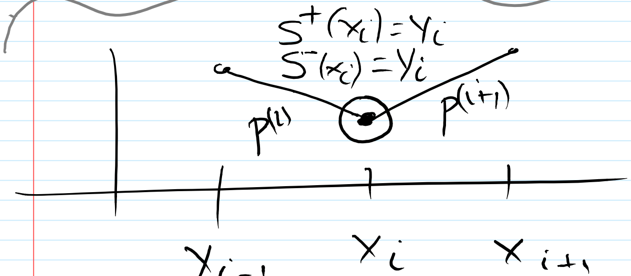
• $[x_1, x_2)$

$$y_1 \varphi_1(x) + y_2 \varphi_2(x) = 5 \cdot (1-x) + 4 \cdot x =$$

$$= 5 - 5x + 4x = 5 - x$$

Άρα

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x + 5, & [-2, 0] \\ 5 - x, & [0, 1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$p^{(i)} = a_i + \beta_i x$$

$$p^{(i+1)} = a_{i+1} + \beta_{i+1} x$$

Για κάθε διάστημα 2 συντελεστές

Συνολικά $2n$ συντελεστές

Σημεία / κόμβοι παρεμβολής / εξισώσεις

n+1

$S(x_i) = y_i \quad i=0..n$ (n+1 εξισώσεις)

$S^+(x_i) = y_i$ και $S^-(x_i) = y_i$

$i = 1, \dots, n-1$

Άρα $2(n-1)$ εξισώσεις

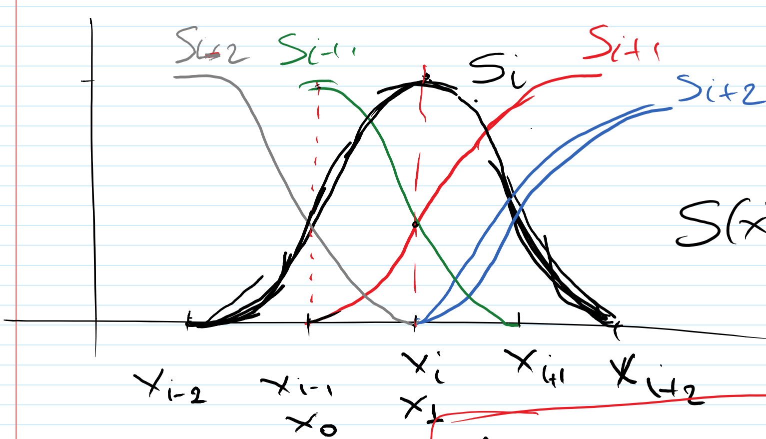
και 2 εξισώσεις από άκρα

$S(x_0) = y_0 \ , \ S(x_n) = y_n$

Συνολικά $2(n-1)+2 = 2n$ εξισώσεις !!

Κυβικές splines

κατά τμήματα πολυώνυμα 3ου βαθμού με ομαλότητα 2ου βαθμού.



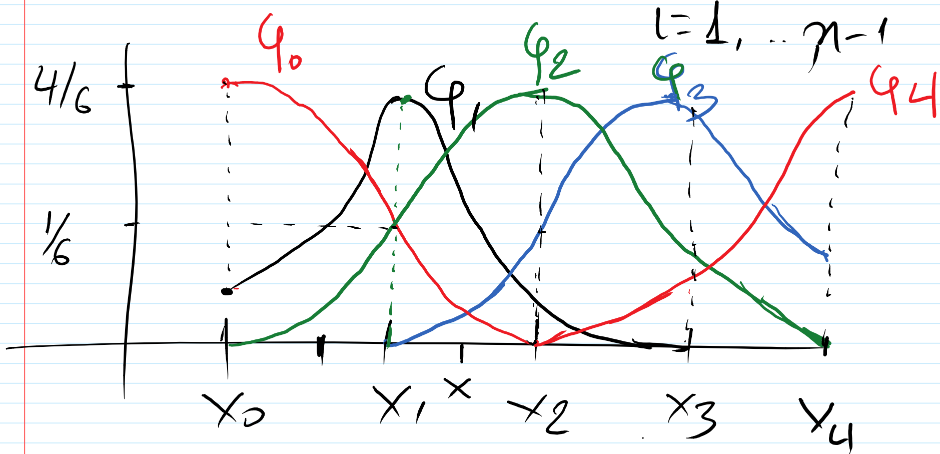
$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

$$S(x_i) = y_i \iff \boxed{\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i) = y_i \ , \ i=0,\dots,n}$$

$$S(x_i) = y_i \iff \boxed{\sum_{j=0} c_j \varphi_j(x_i) = y_i, \; i=0,\dots,n}$$

$$\iff c_{i-1}\varphi_{i-1}(x_i) + c_i \varphi_i(x_i) + c_{i+1}\varphi_{i+1}(x_i) = y_i$$

$i=1,\dots,n-1$



$$\boxed{\frac{1}{6}c_{i-1} + \frac{4}{6}c_i + \frac{1}{6}c_{i+1} = y_i \quad i=1,\dots,n-1}$$

$i=0$ $\quad S(x_0) = y_0 \iff$

$$\sum_j c_j \varphi_j(x_0) = y_0$$

$$c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) = y_0$$

$$\boxed{c_0 \frac{4}{6} + c_1 \frac{1}{6} = y_0}$$

$i=n$, $\quad S(x_n) = y_n$

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_n) = y_n$$

$$c_{n-1}\varphi_{n-1}(x_n) + c_n \varphi_n(x_n) = y_n$$

$$c_{n-1}\varphi_{n-1}(x_n) + c_n \varphi_n(x_n) = y_n$$

$$\boxed{\frac{1}{6} c_{n-1} + \frac{4}{6} c_n = y_n}$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} c = Y$$

$(n+1)\times(n+1)$

Η λύση τριδιαγώνιου συστήματος απαιτεί $O(n)$ πράξεις.

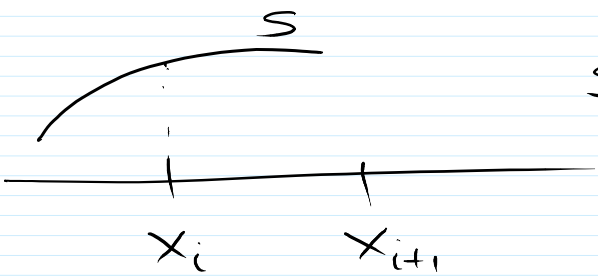
Ο υπολογισμός $s(x)$, $x \neq x_i$ εμπλέκει το πολύ 4 συναρτήσεις βάσης ($x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\varphi_i, \varphi_{i+1}, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+2}$) άρα έχει σταθερό κόστος υπολογισμού

Η κυβική spline = πολυώνυμο 3ου βαθμού σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, .., n-1$

$\Rightarrow$ 4 συντελεστές ανά διάστημα

$\Rightarrow$ 4n συντελεστές

$\Rightarrow$ 4n εξισώσεις (???)



$$S(x_i) = y_i$$
$$\Updownarrow$$
$$S_+(x_i) = S_-(x_i) = y_i$$
$$\Updownarrow$$
$$S_+(x_i) = y_i$$
$$S_-(x_i) = y_i \qquad i=1,..n-1$$

$i=0$

$S_+(x_0) = y_0$

$i=n$

$S_-(x_n) = y_n$

Άρα $2(n-1)+2$ εξισώσεις για την συνέχεια της S.

Συνέχεια στη 1η παράγωγο δημιουργ για τις εξισώσεις

$$S'_-(x_i) = S'_+(x_i) \quad i=1,..,n-1$$

Άρα $n-1$ εξισώσεις για την 1η παράγωγο

Συνέχεια στην 2η παράγωγο δημιουργεί τις εξισώσεις.

$$S''_-(x_i) = S''_+(x_i) \quad i=1..n-1$$

Άρα $n-1$ επιπλέον εξισώσεις.

Συνολικά

$\underbrace{2(n-1)+2}_{\text{συνέχεια}} + \underbrace{(n-1)}_{1^η \text{ παραγ.}} + \underbrace{(n-1)}_{2^η \text{ παραγ.}} = 2n - \cancel{2} + \cancel{2} + n - 1 + n - 1 = \boxed{4n-2}$

Άρα χρειάζονται 2 επιπλέον εξισώσεις.

$1^η$ περίπτωση: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

φυσικές splines

(natural splines)

$2^η$ περίπτωση: $s'(x_0) = p_0$
$s'(x_n) = p_n$ πρόβλημα

$(p_0 = p_n = 0)$

$3^η$ περίπτωση: υποθέτουμε περιοδικότητα

$$s'(x_0) = s'(x_n)$$
$$s''(x_0) = s''(x_n)$$

Στο $[x_i, x_{i+1}]$, $h_i = x_{i+1} - x_i$

$s''(x)$ γραμμικό πολυώνυμο

και αν $s''(x_i) = \sigma_i$, $s''(x_{i+1}) = \sigma_{i+1}$

$$\underset{\in \mathbb{P}_1}{S''(x)} = \frac{x_{i+1}-x}{h_i}\sigma_i + \frac{x-x_i}{h_i}\sigma_{i+1}$$

$$\underset{\in \mathbb{P}_2}{S'(x)} = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}\sigma_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}\sigma_{i+1} + a_i - \beta_i$$

$$\underset{\in \mathbb{P}_3}{S(x)} = \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}\underline{\sigma_i} + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}\underline{\sigma_{i+1}} + \underline{a_i}(x-x_i) + \underline{\beta_i}(x_{i+1}-x_i)$$

Άσκηση Μελέτη τετραγωνική Spline;

Spline 2ου βαθμού:

S κατά τμήματα πολυώνυμο 2ου βαθ.

και είναι συνεχής μέχρι και η 1η παράγωγο..

(x_i, y_i) $i=0, \dots n$

$S(x_i) = y_i$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

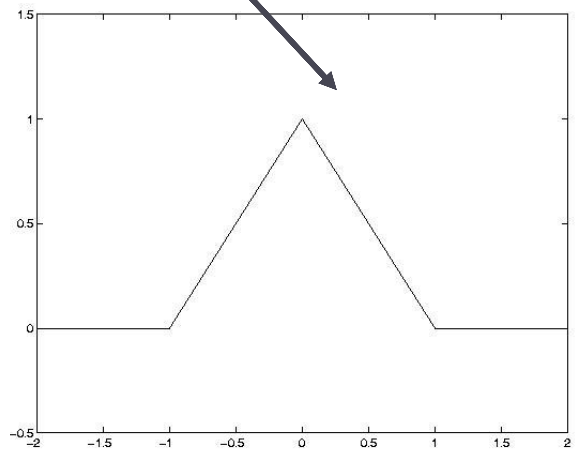
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ & ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ TAYLOR

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Παρεμβολή με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις

Προσεγγίζουμε την f με τη s, όπου:

$$s \in C^o([a,b]), \quad s = \sum_i f(x_i)\varphi_i$$



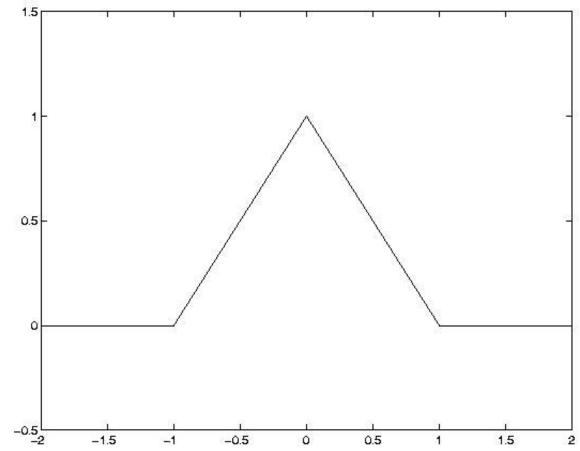
Το a-priori σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$\|s - f\|_\infty \leq \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$

Παρεμβολή με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις βάσης:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}-\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}, & x_0\le x\le x_1\\ 0, & x<x_0,\quad x>x_1\end{cases}$$



$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\[2ex] -\dfrac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}, & x_i\le x\le x_{i+1},\\[2ex] 0, & x<x_{i-1},\quad x>x_{i+1}\end{cases}\qquad i=1,\ldots,n-1$$

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\le x\le x_n\\ 0, & x<x_{n-1},\quad x>x_n\end{cases}$$

Παράδειγμα

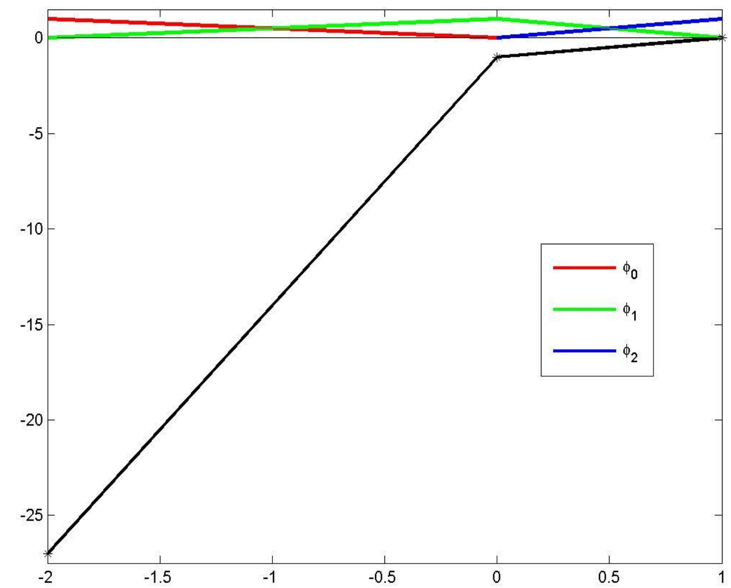
- Για τα δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το κατά τμήματα γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλεται σε αυτά είναι:

$$p(x) = -27\varphi_0(x) - 1\varphi_1(x) + 0\varphi_2(x)$$

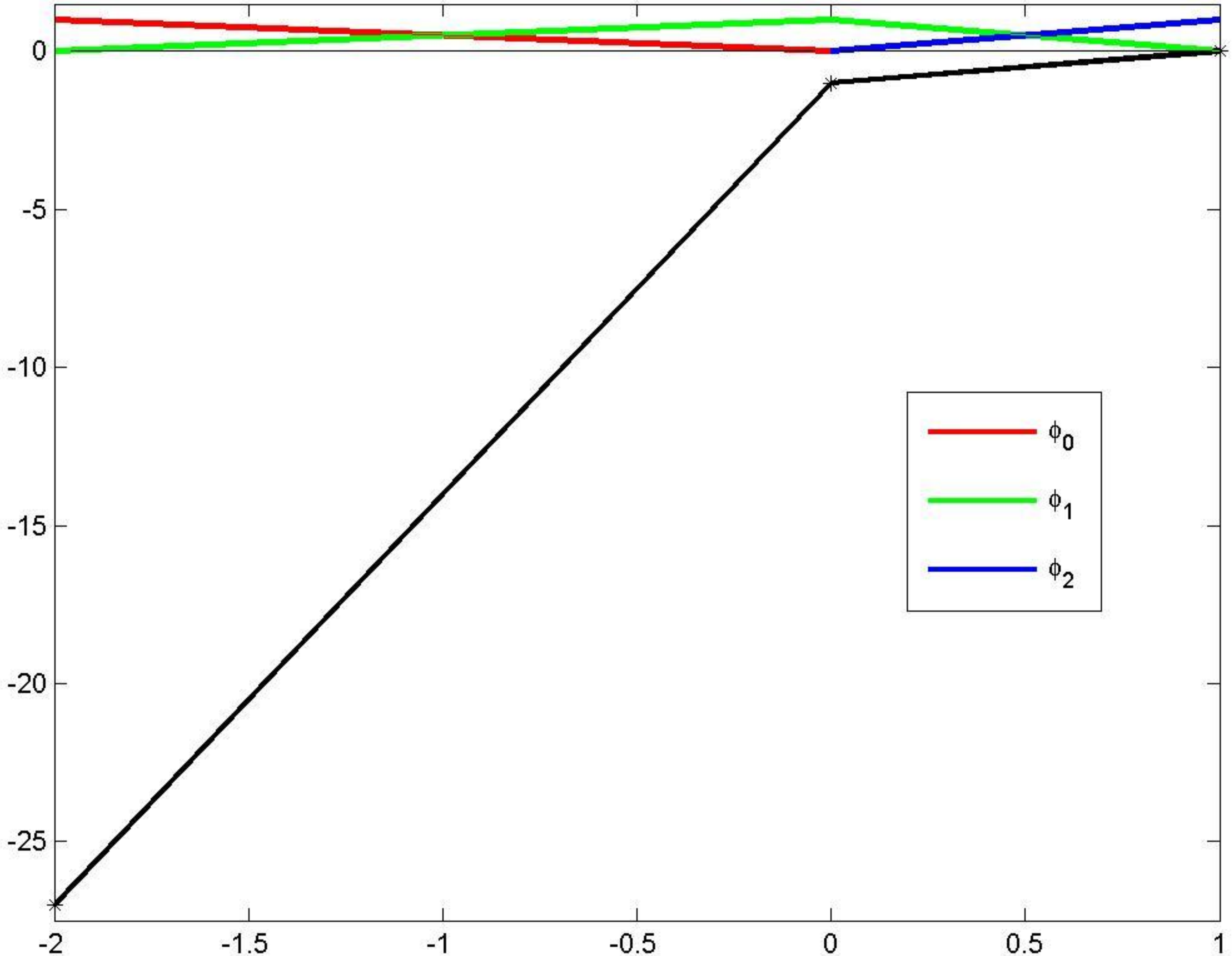
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & -2 \le x \le 0 \\ 0, & x < -2, \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & -2 \le x \le 0 \\ -(x-1), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < -2, \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0, \quad x > 1 \end{cases}$$



$$p(x) = \begin{cases} 13x - 1, & -2 \le x \le 0 \\ x - 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < -2, \quad x > 1 \end{cases}$$



0
-5
-10
-15
-20
-25
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
ϕ_0
ϕ_1
ϕ_2

Παρεμβολή με κατά τμήματα κυβικές συναρτήσεις

Η s (κυβική spline) παρεμβάλλεται στην f, όπου:

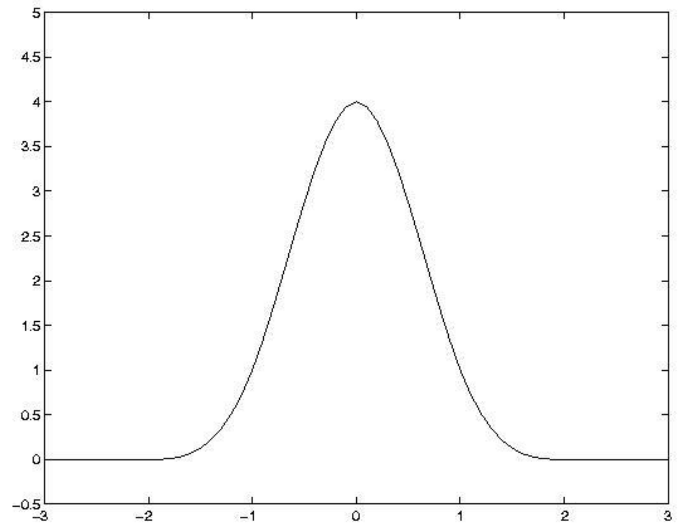
$$s \in C^2([a,b]),$$

$$s(x_i) = f(x_i),$$

$$s'(x_0) = f'(x_0), s'(x_n) = f'(x_n),$$

$$\acute{\eta}$$

$$s''(x_0) = f''(x_0), s''(x_n) = f''(x_n)$$

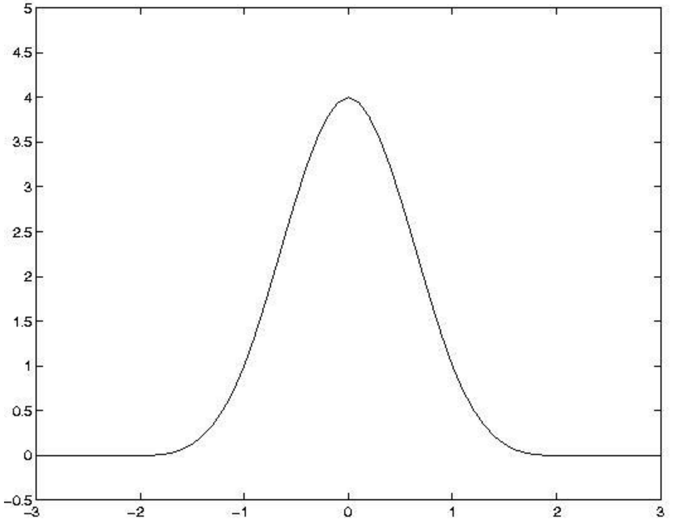


Το a-priori σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$\|s - f\|_\infty \le \frac{5h^2}{384} \|f^{(4)}\|_\infty$$

Παρεμβολή με κατά τμήματα κυβικές συναρτήσεις

$$
s_i(x)=\begin{cases}
\dfrac{(x-x_{i-2})^3}{6h^3}, & x_{i-2}\le x\le x_{i-1}\\[2ex]
\dfrac{2}{3}-\dfrac{(x-x_i)^2}{h^2}-\dfrac{(x-x_i)^3}{2h^3}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\[2ex]
\dfrac{1}{6}+\dfrac{x_{i+1}-x}{2h}+\dfrac{(x_{i+1}-x)^2}{2h^2}-\dfrac{(x_{i+1}-x)^3}{2h^3}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\[2ex]
\dfrac{(x_{i+2}-x)^3}{6h^3}, & x_{i+1}\le x\le x_{i+2}\\[2ex]
0, & \mathrm{x}\notin[\mathrm{x}_{\mathrm{i-1}},\mathrm{x}_{\mathrm{i+2}}]
\end{cases}, \quad i=1,\dots,n-1
$$



Κατά Τμήματα Κυβική Παρεμβολή με Splines

- Οι Splines είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού k, με συνεχή έως και τη k-1 παράγωγο.
- Π.χ: Οι γραμμικές splines είναι βαθμού 1, άρα είναι συνεχής αλλά όχι ομαλές!!!
- Οι κυβικές Splines έχουν συνεχή έως και την 2η παράγωγο.
- 4n οι άγνωστοι που απαιτείται να υπολογίσουμε. Άρα πόσες εξισώσεις χρειαζόμαστε;
- 2(n-1)+2 οι συνθήκες από την παρεμβολή στα γνωστά σημεία. (γιατί;;;)
- n-1 οι συνθήκες συνέχειας 1ης παραγώγου (γιατί;;;)
- n-1 οι συνθήκες συνέχειας 2ης παραγώγου (γιατί;;;)
- Οι 2 (γιατί;;;) συνθήκες που μας χρειάζονται είναι επιπλέον συνθήκες που τίθονται στα άκρα:
  - Τιμή της 1ης παραγώγου στα άκρα x_0, x_n
  - Τιμή της 2ης παραγώγου στα άκρα x_0, x_n
    - φυσικές κυβικές splines αν η 2η παράγωγος είναι 0