ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ. & ΜΗΧ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Βασικά σημεία

- Μη γραμμικές εξισώσεις με πραγματικές ρίζες.
  - Μέθοδος διχοτόμησης.
  - Επαναληπτικές μέθοδοι.
    - Newton.
    - Τέμνουσας (secant).
- Ρίζες πολυωνύμων.
- Ρίζες μιγαδικών εξισώσεων.
- Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων.

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- Με δεδομένη μια συνάρτηση f, ψάχνουμε το x^* για το οποίο $f(x^*) = 0$.
- Το x^* ονομάζεται ρίζα της εξίσωσης ή το μηδέν της συνάρτησης f.
- Δυο βασικές κατηγορίες τέτοιων προβλημάτων:
  - Μια μη γραμμική εξίσωση με έναν άγνωστο,

    $$f: R \to R$$

    η λύση είναι αριθμός x τ.ω. $f(x) = 0$.
  - Σύστημα από n μη γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους,

    $$f: R^n \to R^n$$

    η λύση είναι διάνυσμα x τ.ω. κάθε συνιστώσα της f είναι 0.

Παραδείγματα:

- Μη γραμμική εξίσωση (1-D):

$$x^2 - 4\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.93375 \quad \text{μια από τις ρίζες}$$

- Σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων (2-D):

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 - x_2 + 0.25 = 0 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα:

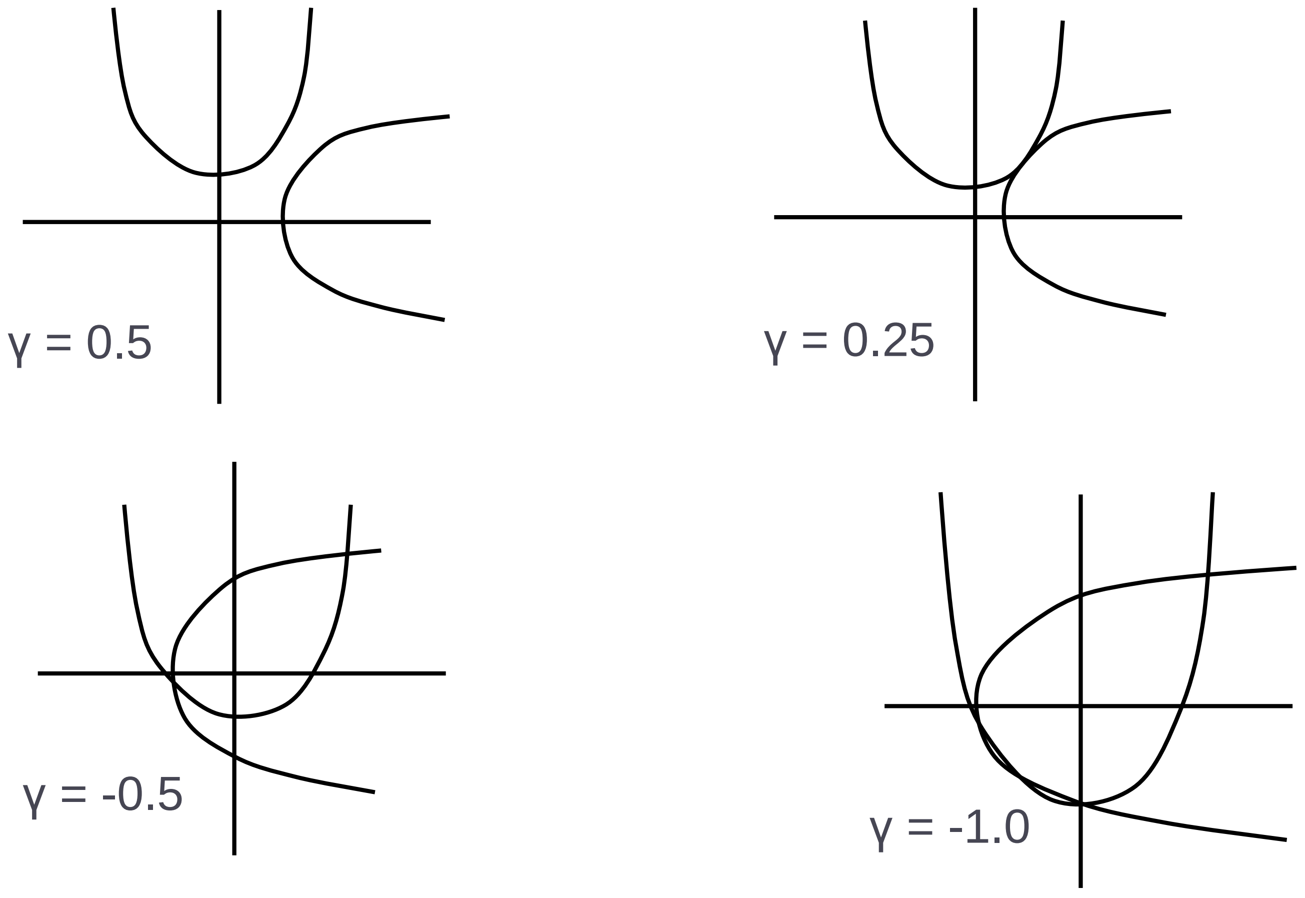
Οι μη γραμμικές εξισώσεις μπορούν να έχουν οποιοδήποτε πλήθος λύσεων:

- $\exp(x) + 1 = 0$, δεν έχει ρίζα.
- $x^2 - \sin(x) + 1 = 0$, δεν έχει ρίζα.
- $\exp(-x) - x = 0$, έχει μια ρίζα.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$, έχει 2 ρίζες.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$, έχει 3 ρίζες.
- $\sin(x) = 0$, έχει άπειρες ρίζες.

Παραδείγματα:

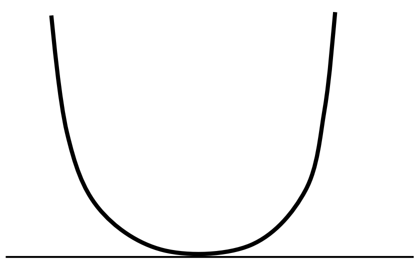
$$x_1^2 - x_2 + \gamma = 0$$

$$-x_1 + x_2^2 + \gamma = 0$$

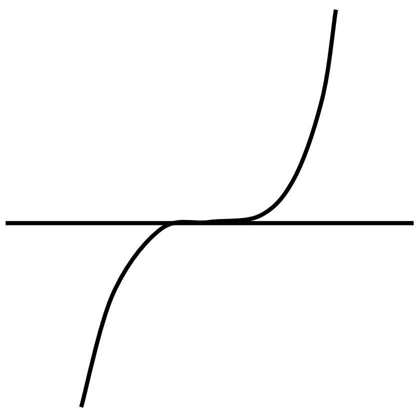


Παραδείγματα:

- Οι μη γραμμικές εξισώσεις μπορεί να έχουν πολλαπλές ρίζες, δηλαδή και η συνάρτηση και οι παράγωγοι της μηδενίζονται στο ίδιο σημείο, π.χ.: $f(x)=0$ και $f'(x)=0$.



$x^2 - 2x + 1 = 0$



$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.

- Αναλυτικοί τύποι για ρίζες πολυωνύμων μέχρι και 4ου βαθμού.
- Galois(1830): δεν μπορούν να βρεθούν αναλυτικοί τύποι για τις ρίζες πολυωνύμων βαθμού > 4.
- <u>Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής</u>(1-D):

  Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$ τότε υπάρχει x^* στο $[a, b]$ τ.ω. $f(x^*)=0$.
- Δεν υπάρχει κάτι ανάλογο για περισσότερες διαστάσεις.
- Επαναληπτικές διαδικασίες για προσέγγιση ριζών.

Επαναληπτικές μέθοδοι και τάξη σύγκλισης.

- Στις επαναληπτικές μεθόδους υπολογίζουμε μια ακολουθία $\{x_k\}_k$ για να προσεγγίσουμε την πραγματική λύση x^* του προβλήματος.
- Το σφάλμα της προσέγγισης είναι $e_k = x_k - x^*$.
- Η ακολουθία συγκλίνει με τάξη r ανν:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\|e_{k+1}\right\|}{\left\|e_k\right\|^r} = C$$

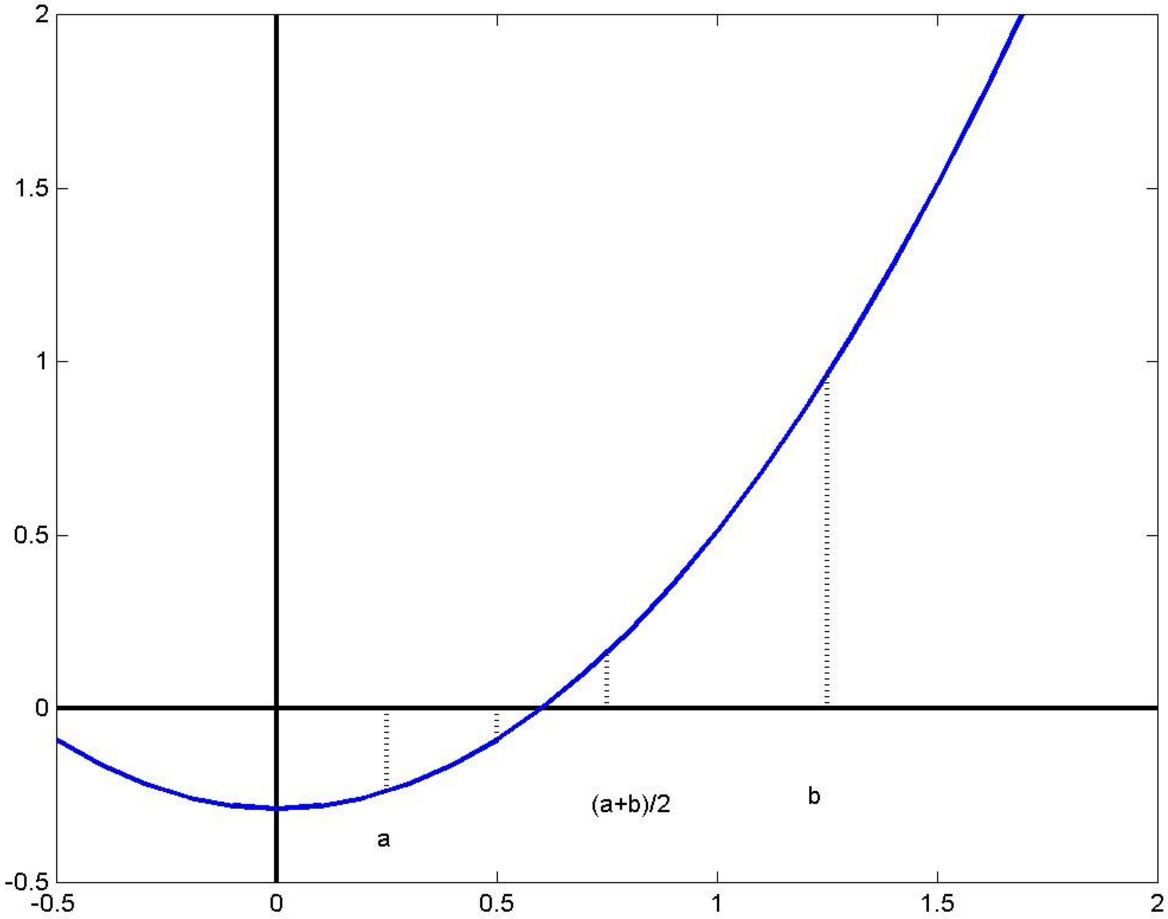
όπου C σταθερά.

Π.χ.: $r=1$ γραμμική σύγκλιση,
$r=2$ τετραγωνική σύγκλιση,
$r>1$ υπεργραμμική σύγκλιση

Μέθοδος διχοτόμησης

- Η $f:[a,b] \rightarrow R$ πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:
  1. c := a , d := b, f(c), f(d)
  2. e = (c+d)/2, f(e)
  3. if |f(e)| < tol ➔ x*= e, stop
  4. if f(c)*f(e)>0 ➔ c:=e
  5. if f(d)*f(e)>0 ➔ d:=e
  6. if |c-d| < tol ➔ x*= (c+d)/2, stop
  7. goto to step 2.

Μέθοδος διχοτόμησης



Παράδειγμα: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$

α	f(α)	b	f(b)
1.000000		3.000000	

Παράδειγμα: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$

α	f(α)	b	f(b)
1.000000	-2.365884	3.000000	8.435520
1.000000	-2.365884	2.000000	0.362810
1.500000	-1.739980	2.000000	0.362810
1.750000	-0.873444	2.000000	0.362810
1.875000	-0.300718	2.000000	0.362810
1.875000	-0.300718	1.937500	0.019849
1.906250	-0.143255	1.937500	0.019849
1.921875	-0.062405	1.937500	0.019849
1.929688	-0.021454	1.937500	0.019849
1.933594	-0.000846	1.937500	0.019849
1.933594	-0.000846	1.935547	0.009491
1.933594	-0.000846	1.934570	0.004320
1.933594	-0.000846	1.934082	0.001736
1.933594	-0.000846	1.933838	0.000445
1.933716	-0.000201	1.933838	0.000445

Μέθοδος διχοτόμησης

☺ Πλεονεκτήματα:

- επιτυχής
- χρήση της f
- σε κάθε βήμα κερδίζουμε ένα δυαδικό ψηφίο σε ακρίβεια ➔ t επαναλήψεις αν 2^{-t} το μηδέν της μηχανής (ή το ε του αλγόριθμου)

☹ Μειονεκτήματα:

- αργή σύγκλιση

Σταθερό σημείο συναρτήσεων

- Ορισμός: Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης φ λέγεται σταθερό σημείο ανν $\varphi(x^*)=x^*$.

- Πρόταση: $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής ➔ υπάρχει ένα τουλάχιστο σταθερό σημείο για την φ.

- Ορισμός: $\varphi:I\to R$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, ανν υπάρχει L τ.ω.

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|.$$

Αν $L<1$ ➔ φ συστολή.

Επαναληπτικές μέθοδοι

- <u>Θεώρημα</u>: Αν φ:[a,b]→[a,b] συνεχής, συστολή τότε η φ έχει ένα και μοναδικό σταθερό σημείο x*. Για την ακολουθία $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ ισχύουν:

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*| \le L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2,$

έχει ρίζα το σταθερό σημείο κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

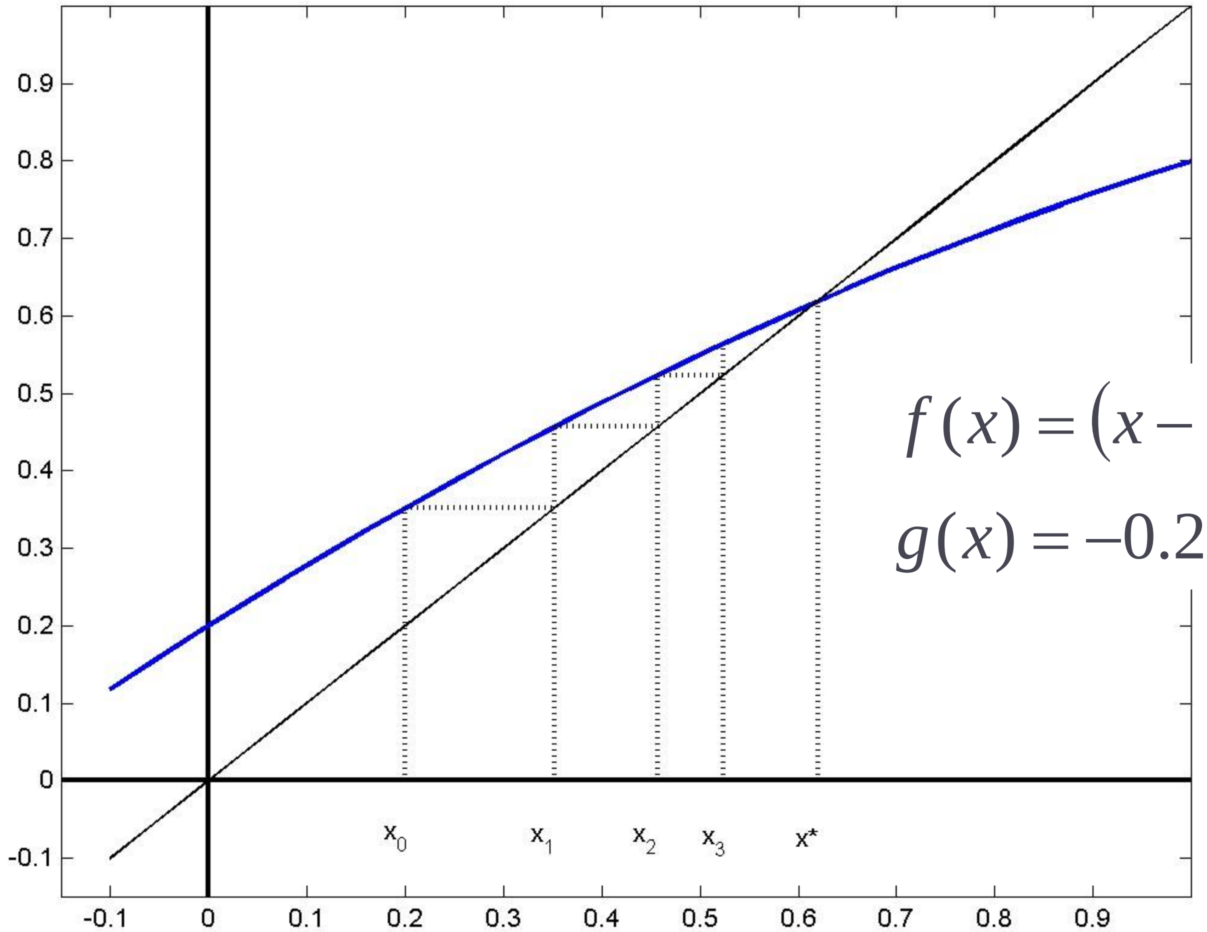
$$g(x) = x^2 - 2$$

$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = 1 + 2/x$$

$$g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$$

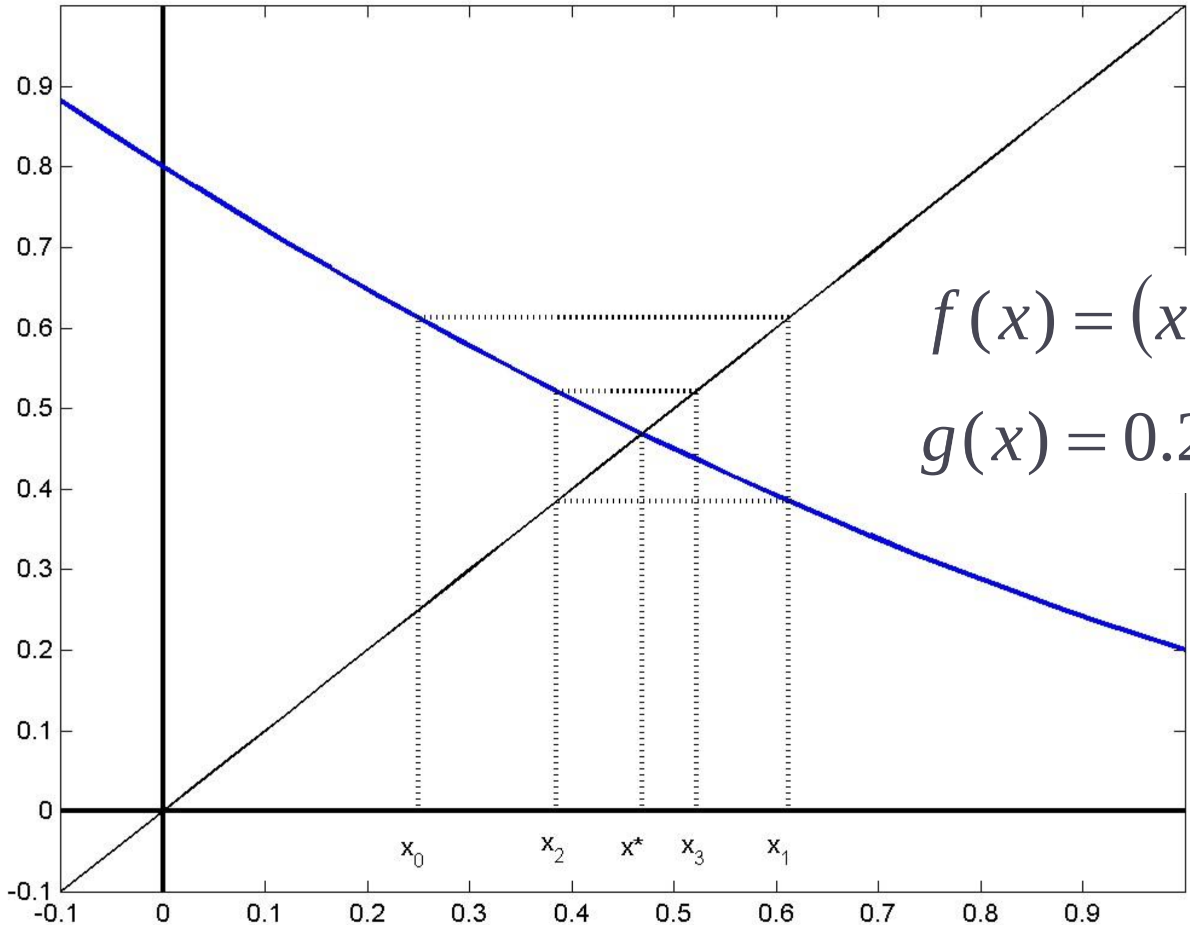
Επαναληπτικές μέθοδοι
(μονότονη σύγκλιση)



$$f(x) = (x-2)^2 + 5 \cdot x - 5 = 0$$

$$g(x) = -0.2 \cdot (x-2)^2 + 1, x_0 = 0.2$$

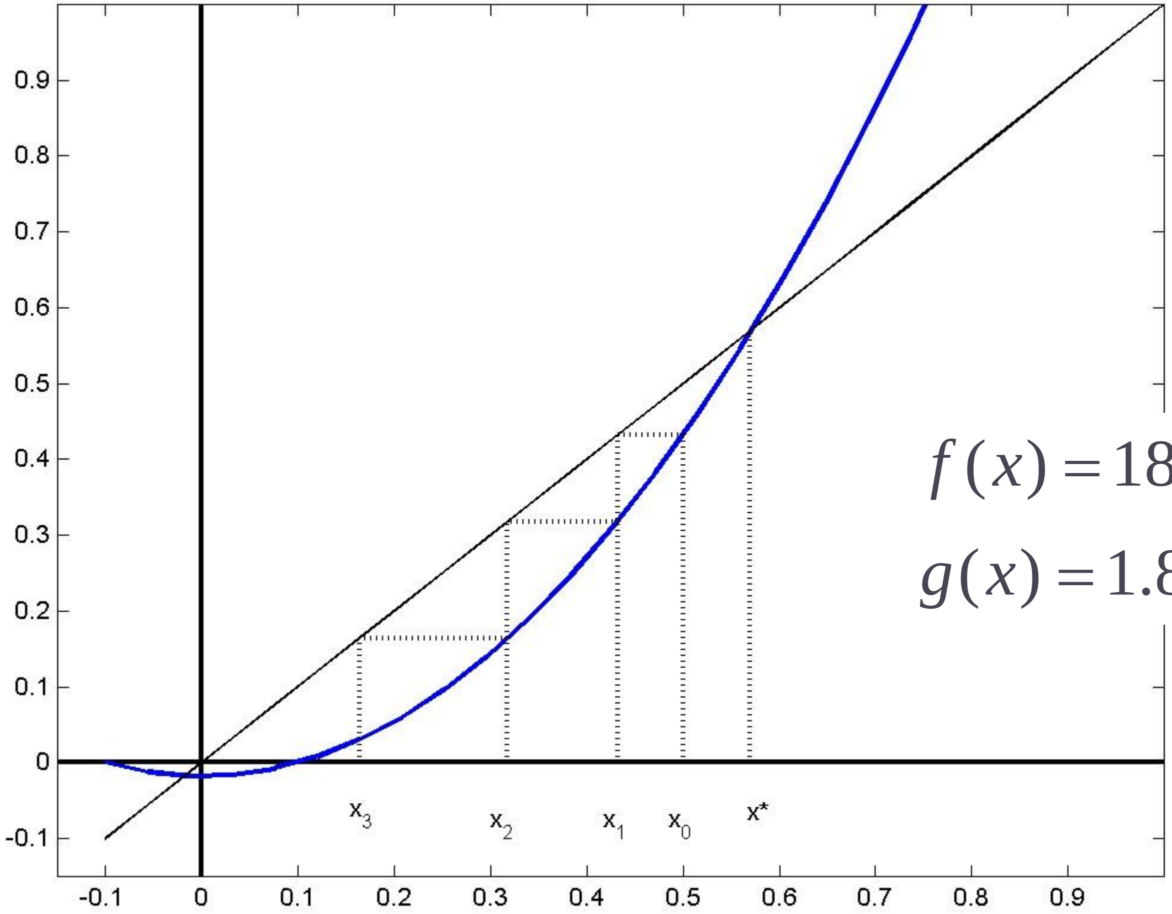
Επαναληπτικές μέθοδοι
(ελικοειδής σύγκλιση)



$$f(x) = (x-2)^2 - 5 \cdot x = 0$$

$$g(x) = 0.2 \cdot (x-2)^2, x_0 = 0.25$$

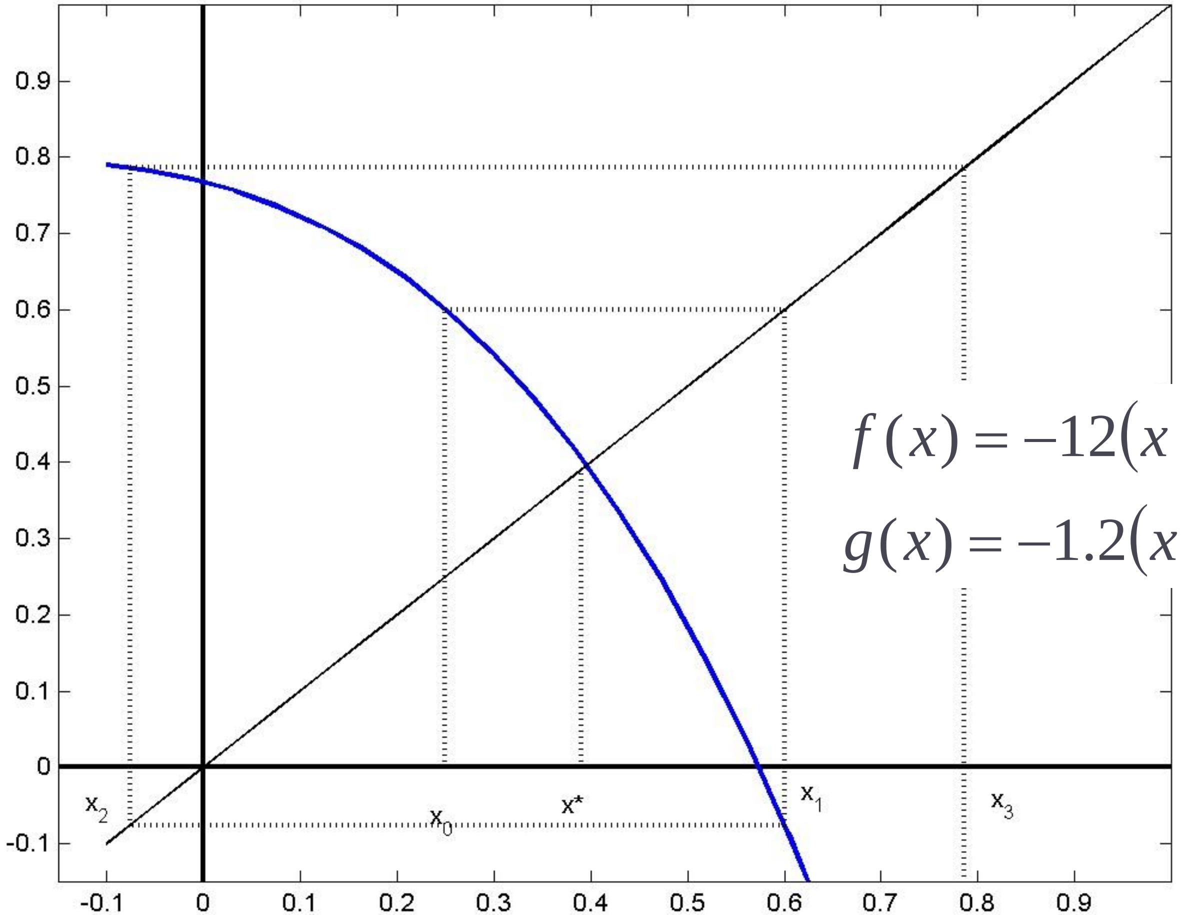
Επαναληπτικές μέθοδοι
(μονότονη απόκλιση)



$$f(x) = 18\left(x^2 - 0.01\right) - 10x = 0$$

$$g(x) = 1.8\left(x^2 - 0.01\right), \quad x_0 = 0.5$$

Επαναληπτικές μέθοδοι
(ελικοειδής απόκλιση)



$$f(x) = -12(x+0.3)^3 - 10x + 8 = 0$$

$$g(x) = -1.2(x+0.3)^3 + 0.8, \quad x_0 = 0.25$$

Μέθοδος Newton

- Αρχικό πρόβλημα: $f(x^*)=0$
- Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

δεύτερο μέλος είναι η γραμμική συνάρτηση που προσεγγίζει την f, και μηδενίζεται στο $h=-f(x)/f'(x)$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0$$

- Έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα επίλυσης: $\varphi(x^*) = x^*$, με φ τ.ω.

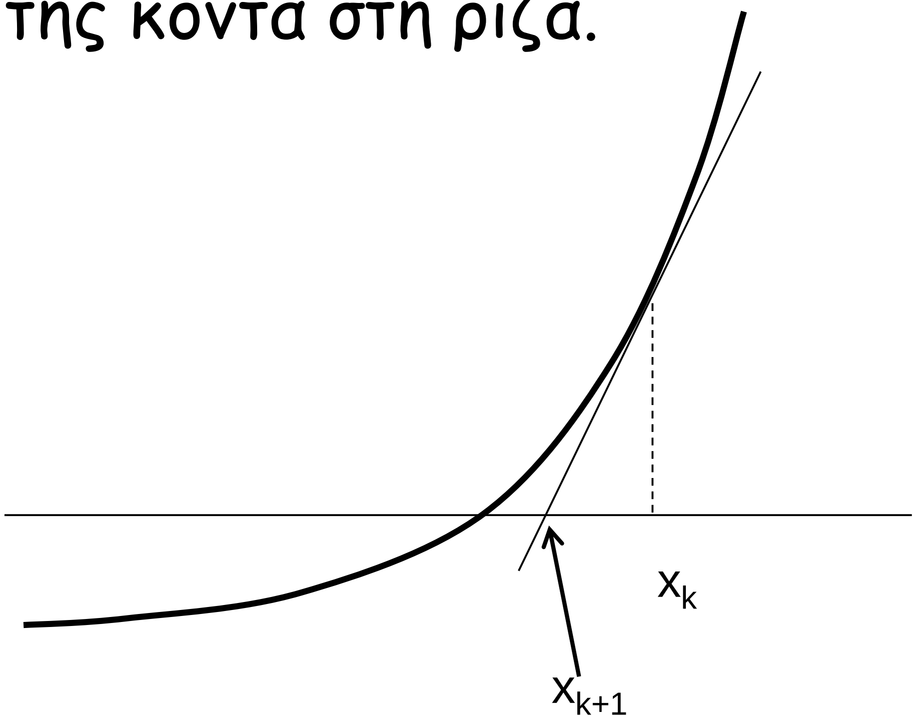
$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Μέθοδος Newton

- Η $f:[a,b]\rightarrow R$ πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:
  1. Όρισε x_0, $n=0$
  2. Υπολόγισε $f(x_n)$, $f'(x_n)$
  3. Υπολόγισε $h := -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
  4. $x_{n+1} = x_n + h$
  5. $n = n+1$
  6. αν $h>\varepsilon$ ➔ βήμα 2

Μέθοδος Newton

- Προσεγγίζει τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της κοντά στη ρίζα.



Μέθοδος Newton - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin(x_k)}{2x_k - 4\cos(x_k)}, \qquad x_0 = 3$$

x	f(x)	f'(x)	h
3.000000			

Μέθοδος Newton - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin(x_k)}{2x_k - 4\cos(x_k)}, \qquad x_0 = 3$$

x	f(x)	f'(x)	h
3.000000	8.435520	9.959970	-0.846942
2.153058	1.294772	6.505771	-0.199019
1.954039	0.108438	5.403795	-0.020067
1.933972	0.001152	5.288919	-0.000218
1.933754	0.000000	5.287670	0.000000

Μέθοδος Newton

- ☺ Τάξη σύγκλισης 1, αλλά τοπικά τάξη σύγκλισης 2.
- ☹ Χρειάζεται πολύ καλή αρχική τιμή x_0.
- ☹ Η x^* πρέπει να είναι απλή ρίζα.
- ☹ Η f να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

Μέθοδος Τέμνουσας

- ☺ Αρχικό πρόβλημα: $f(x^*)=0$
- ☹ Με τη μέθοδο Newton χρειάζεται να υπολογίζουμε και τη f' σε κάθε νέο σημείο.
- ☺ Η μέθοδος της τέμνουσας προσεγγίζει την παράγωγο με *πεπερασμένες διαφορές*.
- ☺ Ισοδύναμο πρόβλημα επίλυσης: $\varphi(x^*) = x^*$, με φ τ.ω.

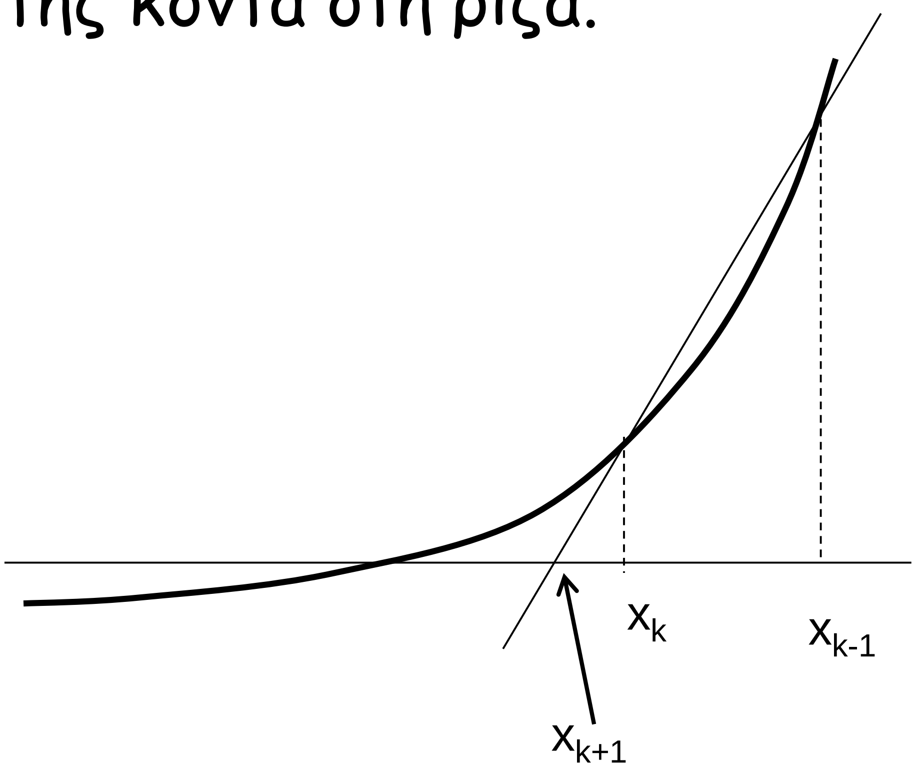
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Μέθοδος Τέμνουσας

- Η f:[a,b]→R πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:
  1. Όρισε x_0, x_1, n=1
  2. Υπολόγισε $f(x_n)$, $f(x_{n-1})$
  3. Υπολόγισε $$h := -\frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$
  4. $x_{n+1} = x_n + h$
  5. n = n+1
  6. αν h>ε ➔ βήμα 2

Μέθοδος Τέμνουσας

- Προσεγγίζει τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της κοντά στη ρίζα.



Μέθοδος Τέμνουσας - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(x_k^2 - 4\sin(x_k)\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)}{x_k^2 - x_{k-1}^2 - 4\left(\sin(x_k) - \sin(x_{k-1})\right)}, \qquad x_0 = 1 \ \text{και} \ x_1 = 3$$

x	f(x)	h
1.000000	-2.365884	
3.000000	8.435520	

Μέθοδος Τέμνουσας - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(x_k^2 - 4\sin(x_k)\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)}{x_k^2 - x_{k-1}^2 - 4\left(\sin(x_k) - \sin(x_{k-1})\right)}, \qquad x_0 = 1 \text{ και } x_1 = 3$$

x	f(x)	h
1.000000	-2.365884	
3.000000	8.435520	-1.561930
1.438070	-1.896774	0.286735
1.724805	-0.977706	0.305029
2.029833	0.534305	-0.107789
1.922044	-0.061523	0.011130
1.933174	-0.003064	-0.000583
1.933757	0.000019	-0.000004
1.933754	0.000000	0.000000

Μέθοδος Τέμνουσας

- ☺ Τάξη σύγκλισης (1+sqrt(5))/2~1.62 .
- ☹ Χρειάζεται πολύ καλές αρχικές τιμές (x_0, x_1).
- ☹ Η x^* να είναι απλή ρίζα.
- ☹ Η f να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.
- ☺ Δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f' .

Ρίζες πολυωνύμων

Έστω p πολυώνυμο n βαθμού. Από την Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι:

- Υπάρχουν ακριβώς n ρίζες (πραγματικές και μιγαδικές).
- Αν ρ ρίζα του p τότε το $q(x)=p(x)/(x-\rho)$ έχει $n-1$ ρίζες (τις υπόλοιπες του p).
- Μέθοδος Muller

Μέθοδος Muller

- Με δεδομένα τα αρχικά x_1, x_2, x_3

$$s = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} + (x_n - x_{n-1}) \frac{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}}$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{2f(x_n)}{s + \operatorname{sgn}(s)\sqrt{s^2 - 4f(x_n)\dfrac{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}}}}$$

Ρίζες μιγαδικών εξισώσεων

- Αρχικό πρόβλημα: $f(z) = 0$
- Πρόβλημα επίλυσης:
  - ελαχιστοποίηση του $\varphi(x,y)=|f(x+iy)|^2$
  - λύση συστήματος $u(x,y)=0$, $v(x,y) = 0$ αν $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων

Στις k διαστάσεις η μέθοδος Newton έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - J(\boldsymbol{x}_n)^{-1} f(\boldsymbol{x}_n),$$

όπου $J(x)$ ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης f,

$$\{J(\mathbf{x})\}_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Στην πραγματικότητα δεν υπολογίζουμε τον αντίστροφο του $J(\boldsymbol{x}_n)$, αλλά λύνουμε το σύστημα:

$$J(\mathbf{x}_n)\mathbf{s}_n = -f(\mathbf{x}_n) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n$$

Μέθοδος Newton

- Η $f:R^k \rightarrow R^k$ διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών.
- Αλγόριθμος:

1. Όρισε $\mathbf{x_0}$, n=0
2. Υπολόγισε $\mathbf{f(x_n)}$, $\mathbf{J(x_n)}$
3. Λύσε το σύστημα $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$
4. $\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} + \mathbf{h}$
5. n = n+1
6. αν $||\mathbf{h}|| > \varepsilon$ ➔ βήμα 2

Μέθοδος Newton

Σύγκλιση:

- ☺ Τάξη σύγκλισης 1, αλλά τοπικά τάξη σύγκλισης 2.
- 😐 Χρειάζεται πολύ καλή αρχική τιμή x_0.
- 😐 Ο Ιακωβιανός πίνακας πρέπει να είναι αντιστρέψιμος.

Κόστος:

- ☹ Ο υπολογισμός του Ιακωβιανού κοστίζει $O(k^2)$ υπολογισμούς πραγματικών συναρτήσεων.
- ☹ Η επίλυση του συστήματος σε κάθε βήμα κοστίζει $O(k^3)$ πράξεις.

Παράδειγμα με σύστημα:

- Έστω το μη-γραμμικό σύστημα:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix} = 0$$

με Ιακωβιανό πίνακα $J_f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$

Αν $\mathbf{x}_0 = [1\ 2]^T \rightarrow f(\mathbf{x}_0) = [3\ \ 13]^T$

$$J_f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \boldsymbol{s}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{s}_0 = \begin{bmatrix} -1.83 \\ -0.58 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{s}_0 = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υλικό από το MatLab για επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- ☺ roots (ρίζες πολυωνύμου)
- ☺ sym-solve
- ☺ Δικό σας λογισμικό.....

Βιβλιογραφία

- **Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική** (C.Pozrikidis)
- Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση (Γ. Ακρίβη, Β. Δουγαλή)
- Αριθμητική Ανάλυση Ι (Μ. Βραχάτης)
- Scientific Computing, An Introductory Survey (M. Heath)

Ερωτήσεις

- Ιστοσελίδα μαθήματος:
  http://eclass.uth.gr/
  http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE213/index.html

- E-mail λίστα του μαθήματος:
  ce213@inf-server.inf.uth.gr
  http://eclass.uth.gr/

- Π. Τσομπανοπούλου, Ε3-12, yota@uth.gr

Non Linear Equations (3)

Τρίτη, 24 Φεβρουαρίου 2015 9:51 πμ

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$

$$f(z)=0\ ,\quad z\in\mathbb{Z}$$

$$z=x+iy$$

$$f=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}u=Re(f)\\ v=Im(f)\end{array}$$

Ισοδύναμα

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$h(x,y)=f(x+iy)$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Re f(x+iy)\\ Im f(x+iy)\end{bmatrix}$$

$[v(x,y)] \quad [\operatorname{Im} f(x+iy)]$

$$f(z)=0 \iff \begin{array}{l} u(x,y)=0 \\ v(x,y)=0 \end{array}$$

Ανάπτυγμα Taylor σε πολλές διαστάσεις. (??)

1-D

$$f(x) = f(a) + \underline{(x-a)f'(a)} + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

$$+ \ldots$$

Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x, a \in \mathbb{R}^n$, $\cancel{f'} \sim \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

$(x-a)^T \cdot \nabla f(a)$

$[\ \ \ \ \ \ \ \ ] \ [\,|\,] = \square \in \mathbb{R}$ (Hessian)

$\cancel{f''} \rightsquigarrow H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

$\cancel{\frac{(x-a)^2 f''(a)}{2}} \rightsquigarrow (x-a)^T \begin{bmatrix} \ \ \end{bmatrix} (x-a)$

$\boxed{\ } \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + (x-a)^T \nabla f(a) + \frac{(x-a)^T H(a) (x-a)}{2} \ldots$$

$x^{(0)} \in \mathbb{R}_n$

τάξη του σφάλματος

$x \in \mathbb{R}^n$ ... τάξη του σφάλματος.

Αν $x^{(1)}$ ρίζα

$$0 = f(x^{(1)}) = f(x^{(0)}) + (x^{(1)} - x^{(0)})^T \nabla f(x^{(0)})$$

$$(x^{(1)} - x^{(0)})^T \cdot \underline{\nabla f(x^{(0)})} = -f(x^{(0)})$$

Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{f(x)} = \underline{f(a)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \partial f & & \partial f_n \end{bmatrix}(a)(x-a) + \cdots$$

$J(x) \equiv$ Jacobian matrix $\leftarrow \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right]$ .....

$\in \mathbb{R}^n \quad \in \mathbb{R}^n \quad \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \in \mathbb{R}^n$

$x^{(0)}$ αρχική τιμή

θέλω $x^{(1)}$ να είναι η ρίζα:

$$0 = f(x^{(1)}) = f(x^{(0)}) + J(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)})$$

Παρατήρηση:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$0 = \underbrace{f(x^{(0)})}_{\in\mathbb{R}^n} + \underbrace{J(x^{(0)})}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\left(\underbrace{x^{(1)}}_{?} \underbrace{- x^{(0)}}_{}\right)}_{=s,\ \in\mathbb{R}^n}$$

$$J(x^{(0)}) \cdot \underset{?}{s} = -f(x^{(0)})$$

(γραμμική άλγεβρα (LU παραγ.))

$$\Downarrow$$

$$s$$

$$s = x^{(1)} - x^{(0)} \Rightarrow \underline{\underline{x^{(1)} = s + x^{(0)}}}$$

Γενικά:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ρίζα?

Με αρχική τιμή $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$J(x^{(k)}) \cdot s = -f(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s \quad , \quad k=0,1,2\ldots$$

(Μιγαδικό πρόβλημα $\Rightarrow n = 2$)

Παράδειγμα

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 4$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 2$$

$$\boxed{f(\overset{*}{x}) \overset{?}{=} 0}$$

$$f_2(x) = f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4$$

$$x_1 + 4x_2 - 4$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}(x)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 + 2x_2 - 2\right) = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 + 2x_2 - 2\right) = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + 4x_2^2 - 4\right) = 2x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = \dots = 8x_2$$

2×2

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1+2\cdot 2-2 \\ 1^2+4\cdot 2^2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2\cdot 1 & 8\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζω s τω. $J_f(x^{(0)}) \cdot s = -f(x^{(0)})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.83 \\ -0.58 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.83 \\ -0.58 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix}$$

$$f(X^{(1)}) = \ldots$$

$$J_f(X^{(1)}) = \ldots$$

$$J_f(X^{(1)}) \cdot S = -f(X^{(1)}) \Rightarrow \ldots$$

$$s = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s$$

K.O.K.