Σκοπός της τελευταίας εργασίας (2ης προόδου) είναι να μάθουμε πως υπολογίζονται αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\frac{1}{2}(-1+n)\,n$$

για απλές πολυωνυμικές μορφές του k.

Απειροστικός <===> Πεπερασμένος
Λογισμός

Παράγωγος	Διαφορές
D[f[x], x]	$\triangle_i f = f(i+1) - f(i)$
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Δf = f(x+1) - f(x)

Στο *Mathematica* ο τελεστής Δ ονομάζεται DifferenceDelta και για f(x) = x^2 έχουμε

```
DifferenceDelta[x^2, x]
```

$1 + 2\,x$

Στον απειροστικό λογισμό ξέρουμε πως ισχύει ο τύπος

$D[x^m, x] = m * x^{m-1}$ (2.44)

Αυτή όμως η μορφή δύναμης δεν ισχύει για τις διαφορές: Πράγματι, όπως είδαμε παραπάνω έχουμε

$\Delta x^2 = 1 + 2\,x \neq 2\,x$

Για να ισχύει για το Δ τύπος ανάλογος του (2.44), πρέπει να ορίσουμε μια διαφορετική δύναμη.
Η δύναμη αυτή ονομάζεται (φθίνουσα) παραγοντική δύναμη (falling factorial power) και ορίζεται ως εξής::

$x^{\underline{m}}$ = x*(x-1)*(x-2)*...*(x-m+1). Στο *Mathematica* ονομάζεται FactorialPower

```
FactorialPower[x, 4] // FunctionExpand
```

$(-3+x)\,(-2+x)\,(-1+x)\,x$

ή και αλλοιώς

```
FactorialPower[x, 4] // TraditionalForm
```

$x^{(4)}$

και ισχύει:

```
DifferenceDelta[FactorialPower[x, m], x]
```

m FactorialPower[x, -1 + m]

ή και αλλοιώς

```
DifferenceDelta[FactorialPower[x, m], x] // TraditionalForm
```

$m\,x^{(m-1)}$

δηλαδή, ισχύει ο τύπος ο ανάλογος προς τον (2.44)

$\Delta\, x^{\underline{m}} = m * x^{\underline{m-1}}$ (2.45)

Υπάρχει και άλλη μορφή δύναμης η οποία ονομάζεται (αύξουσα) παραγοντική δύναμη (rising factorial power) *και ορίζεται από τον τύπο::*

$x^{\overline{m}}$ = x*(x+1)*(x+2)*...*(x+m-1)

Στο Mathematica η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Pochhammer

```
Pochhammer[x, 4] // FunctionExpand
```

```
x (1 + x) (2 + x) (3 + x)
```

Στον απειροστικό λογισμό ισχύει

$\int g(x)\, dx$ = f(x) + C $\Longleftrightarrow$ g(x) = D[f(x),x]

Στον πεπερασμένο λογισμό ισχύει

$\sum g(x) \delta(x)$ = f(x) + C $\Longleftrightarrow$ g(x) = Δ f(x) (2.46)

Στον απειροστικό λογισμό ξέρουμε πως ισχύει:

$\int_a^b g(x)\, dx = f(x) \Big|_a^b =$ f(b) - f(a)

Εάν g(x) = Δ f(x) (*Σημείωση*:: *η εύρεση συνάρτησης* f(x) *που να πληρεί την εξίσωση* g(x) = Δ f(x) *είναι εύκολη μόνο όταν* g(x) *είναι πολυώνυμο — περίπτωση στην οποία και περιοριζόμαστε) τότε στον πεπερασμένο λογισμό ισχύει αντίστοιχα:*

$\sum_a^b g(x)\, \delta(x) = f(x) \Big|_a^b$ = f(b) - f(a) (2.47)

Όπως αποδεικνύουμε παρακάτω ισχύει και :

$\sum_a^b g(x)\, \delta(x) = \sum_{k=a}^{b-1} g(k)$ (2.48)

Δηλαδή το πεπερασμένο άθροισμα ισούται με το συνήθες άθροισμα με όρια, όπου εξαιρούμε την τιμή στο πάνω όριο.

Απόδειξη: a, b, *ακέραιοι*!!

g(x) = Δf(x) = f(x+1) - f(x)

Εάν b = a

$\sum_a^a g(x)\, \delta(x)$ = f(a) - f(a) = 0

Εάν b = a+1

$\sum_a^{a+1} g(x)\, \delta(x)$ = f(a+1) - f(a) = g(a)

Εάν *το* b *αυξάνει κατά* 1

$\sum_a^{b+1} g(x)\, \delta(x) - \sum_a^b g(x)\, \delta(x)$ = g(b)

===>>> 2.48
****
****
Στον απειροστικό λογισμό έχουμε

$$\int_0^n x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

Το *αντίστοιχο στον πεπερασμένο λογισμό είναι*

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}} \delta(\chi) = \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

και εύκολα προκύπτει πως η συνάρτηση f(x) *που ικανοποεί την σχέση* g(x) = Δ f(x) (*όπου* g(x) = $x^{\underline{m}}$ = FactorialPower[x, m] ή *εδώ* g(k) = $k^{\underline{m}}$) *είναι*

$$f(x) = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} = \frac{\text{FactorialPower}[x, m+1]}{m+1}.$$

Πράγματι,

```
DifferenceDelta[FactorialPower[x, m + 1]/(m + 1), x]
```

```
FactorialPower[x, m]
```

ή *και αλλοιώς*

```
DifferenceDelta[FactorialPower[x, m + 1]/(m + 1), x] // TraditionalForm
```

$x^{(m)}$

Από (2.45), (2.47) *και* (2.48) *βλέπουμε πως*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^1 = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{1}}\, \delta(k) = f(n) - f(0).$$

Επομένως, *για* m = 1,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{\text{FactorialPower}[n, m+1]}{m+1} - \frac{\text{FactorialPower}[0, m+1]}{m+1}$$

και επειδή $\frac{\text{FactorialPower}[0, 2]}{2} = 0$ *έχουμε*

$$= \frac{\text{FactorialPower}[n, 2]}{2} = \frac{n*(n-1)}{2}$$

Πράγματι, όπως είδαμε και στην αρχή

$$\sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\frac{1}{2}(-1+n)\, n$$

Για m = 2, *δηλαδή για να υπολογίσουμε το άθροισμα*

$\sum_{k=0}^{n-1} k^2$, *τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όσο για* m = 1, *διότι* $k^2 \neq k^{\underline{2}}$. Εύκολα *όμως βλέπουμε πως*

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^1 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$$

Επομένως,

$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}\right)\delta(\mathrm{k}) = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{2}}\delta(\mathrm{k}) + \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{1}}\,\delta(\mathrm{k}) =$

$f_2(\mathrm{n}) - f_2(0) + f_1(\mathrm{n}) - f_1(0)$,

όπου

$f_2(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{FactorialPower}[x, 3]}{3}$; $f_1(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{FactorialPower}[x, 2]}{2}$.

Με άλλα λόγια και επειδή $f_2(0) = f_1(0) = 0$ έχουμε

$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{\mathrm{FactorialPower}[n, 3]}{3} + \frac{\mathrm{FactorialPower}[n, 2]}{2} =$

$$\frac{n*(n-1)*(n-2)}{3} + \frac{n*(n-1)}{2} \text{ // Factor}$$

$$\frac{1}{6}(-1+n)\,n\,(-1+2n)$$

Πράγματι,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$\frac{1}{6}(-1+n)\,n\,(-1+2n)$$

Τέλος, για να υπολογίσουμε το $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$ πρέπει να βρούμε πως συνδέεται το k^3 με το $k^{\underline{3}}$. Εκτελώντας πράξεις με το χέρι (ή και με την βοήθεια του Mathematica) βλέπουμε πως

$k^{\underline{3}} = 2\,k - 3\,k^2 + k^3$. Άρα,

$k^3 = k^{\underline{3}} + 3\,k^2 - 2\,k = k^{\underline{3}} + 3(k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}) - 2\,k^{\underline{1}} =$
$= k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$.

Επομένως,

$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = f_3(\mathrm{n}) - f_3(0) + 3(f_2(\mathrm{n}) - f_2(0)) + f_1(\mathrm{n}) - f_1(0)$,

όπου

$f_3(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{FactorialPower}[x, 4]}{4}$;

$f_2(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{FactorialPower}[x, 3]}{3}$; $f_1(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{FactorialPower}[x, 2]}{2}$

Επειδή δε $f_i(0) = 0$, i = 1, 2, 3, έχουμε

$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = f_3(\mathrm{n}) + 3 f_2(\mathrm{n}) + f_1(\mathrm{n})$

Πράγματι, ορίζοντας την συνάρτηση

$$f_{\mathrm{m\_}}[\mathrm{x\_}] := \frac{\mathrm{FactorialPower}[x,\ m+1]}{m+1};$$

έχουμε

```
f3[n] + 3 f2[n] + f1[n] // FunctionExpand // Expand // Factor
```

$\frac{1}{4} (-1+n)^2 n^2$

$\sum_{k=0}^{n-1} k^3$

$\frac{1}{4} (-1+n)^2 n^2$

```
(***********)
```

```
(***********)
```

Μέχρι τώρα είδαμε θετικές δυνάμεις.

$x^{\underline{3}}$ = x(x -1)(x - 2)
$x^{\underline{2}}$ = x(x -1)
$x^{\underline{1}}$ = x
$x^{\underline{0}}$ = 1

Προσέξτε πως για να πάμε από το $x^{\underline{3}}$ στο $x^{\underline{2}}$ διαιρούμε με το (x - 2). Ομοίως για να πάμε από το $x^{\underline{2}}$ στο $x^{\underline{1}}$ διαιρούμε με το (x - 1) κοκ.

Άρα, για να πάμε από το $x^{\underline{0}}$ στο $x^{\underline{-1}}$ διαιρούμε με το (x - (-1)) = (x + 1) και έχουμε

$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$
$x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$
$x^{\underline{-3}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Για τις κανονικές δυνάμεις ισχύει

$x^{m+n} = x^m x^n$

Για τις φθίνουσες παραγοντικές δυνάμεις ισχύει

$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}} (x - m)^{\underline{n}}$.

Έτσι, για παράδειγμα έχουμε

$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}} (x - 2)^{\underline{-3}} = x(x-1) \frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}$.
Ομοίως,
$x^{\underline{4-5}} = x^{\underline{4}} (x - 4)^{\underline{-5}} = x(x-1)(x-2)(x-3) \frac{1}{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}$.

Άρα, ξέρουμε τώρα να υπολογίζουμε αθροίσματα της μορφής

$\sum_a^b x^{\underline{m}} \delta(x) = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b$, m≠-1

για κάθε τιμή του m εκτός από -1.

Από τον απειριστικό λογισμό ξέρουμε πως

$\int_{\alpha}^{\beta} x^{-1}\, dx = \ln(x) \Big|_{0}^{n}$

Στον πεπερασμένο λογισμό θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση, f(x), *τέτοια ώστε*

$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$

Η *συνάρτηση αυτή — εύκολα βλέπουμε πως — είναι της μορφής*

$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{x},$
διότι αν πάρουμε
$f(x+1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1},$
τότε
$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$

Η *συνάρτηση αυτή είναι το αντίστοιχο του* ln(x), *και ονομάζεται αρμονικός αριθμός*, H_x. Ά*ρα*,

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\, \delta(x) = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} \Big|_{a}^{b}, & m \neq -1 \\ H_x \Big|_{a}^{b}, & m = -1. \end{cases}$$

Έ*χοντας τελειώσει με τα αθροίσματα παραγοντικών δυνάμεων θα εξετάσουμε πως μεταβαίνουμε από τις συνήθεις δυνάμεις στις αντίστοιχες παραγοντικές*. Α*υτό γινεται με τους αριθμούς* StirlingS2.

Α*ρχίζουμε όμως εξετάζοντας τους δυωνυμικούς συντελεστές* (Binomial coefficients), $\binom{n}{k}$, *όπου* $\binom{n}{k}$ = *ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους διαλέγουμε* k *αντικείμενα από ένα σύνολο* n *αντικειμένων*.

Π*αράδειγμα*, *από το σύνολο των* 4 *στοιχείων* {1, 2, 3, 4} *μπορούμε να πάρουμε ζεύγη με* $\binom{4}{2}$ = 6 *τρόπους*, *δηλαδή* {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}. Γ*ενικά ισχύει ο τύπος*

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

Ο*ι δυωνυμικοί αριθμοί είναι συντελεστές στην παράσταση*
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$, *όπου εδώ το* $\binom{n}{k}$ *μας λέει τον αριθμό των όρων όπου το* x *εμφανίζεται* k *φορές και το* y *εμφανίζεται* n - k *φορές*.
Π*αράδειγμα*:: Σ*την έκφραση*

```
(x + y) (x + y) // Expand
```

```
x^2 + 2 x y + y^2
```

όπου n = 2, *το* x *εμφανίζεται* 0 *φορές στον όρο* y^2 *και άρα* $\binom{2}{0}$ = 1. Τ*ο* x *εμφανίζεται* 1 *φορά στους όρους* x*y *και* y*x *και άρα* $\binom{2}{1}$ = 2. Τ*έλος*, *το* x *εμφανίζεται* 2 *φορές στον όρο* x^2 *και άρα* $\binom{2}{2}$ = 1.
Σ*το Mathematica υπολογίζονται από την συνάρτηση*

```
? Binomial
```

Binomial[n, m] gives the binomial coefficient $\binom{n}{m}$. ≫

και καλώντας την

```
Column[Table[Binomial[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}], Center]
```

```
        {1}
      {1, 1}
    {1, 2, 1}
  {1, 3, 3, 1}
{1, 4, 6, 4, 1}
```

έχουμε τους δυωνυμικούς συντελεστές σε μορφή τριγώνου — του γνωστού τριγώνου Pascal *ή* Tartaglia (*στην* Ιταλία). *Οι γραμμές του παραπάνω πίνακα αριθμούνται με* n = 0, 1, 2, 3, 4, *όπου το* n *αυτό είναι το* n *του δυωνυμικού συντελεστή* $\binom{n}{k}$. *Οι στήλες δεν είναι σε καλή διάταξη, αλλά παρ' όλα αυτά βλέπουμε πως κάθε δυωνυμικός συντελεστής* $\neq 1$ *ισούται με το άθροισμα των 2 συντελεστών που βρίσκονται στην επάνω γραμμή και διαγώνιά του.*
Καλώντας *την συνάρτηση τώρα λίγο διαφορετικά*

```
Column[Table[Binomial[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}]]
```

```
{1}
{1, 1}
{1, 2, 1}
{1, 3, 3, 1}
{1, 4, 6, 4, 1}
```

ευθυγραμμίζουμε και τις στήλες, οι οποίες αριθμούνται με k = 0, 1, 2, 3, 4, *όπου το* k *αυτό είναι το* k *του δυωνυμικού συντελεστή* $\binom{n}{k}$. *Στον επόμενο πίνακα φαίνεται τόσο η αρίθμηση του* n, *όσο και η αρίθμηση του* k

```
{"   πίνακας(n k) όπου n↓ και k→      ", Table[k, {k, 0, 4}], "                  ",
 Thread[{Column[Table[n, {n, 0, 4}]], Column[Table["  --→→   ", {5}]],
   Column[Table[Binomial[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}]]}]}
```

```
{   πίνακας(n k) όπου n↓ και k→       , {0, 1, 2, 3, 4},

                          0      --→→      {1}
                          1      --→→      {1, 1}
                      , { 2 ,    --→→    , {1, 2, 1}        }}
                          3      --→→      {1, 3, 3, 1}
                          4      --→→      {1, 4, 6, 4, 1}
```

Από *αυτήν την διάταξη του πίνακα βλέπουμε κατ' αρχάς πως* όταν k = 0, $\binom{n}{0} = 1$, *για κάθε τιμή του* n.
Επιπλέον, *βλέπουμε πως για κάθε δυωνυμικό συντελεστή* $\neq 1$ *ισχύει η σχέση*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Συγκεκριμένα, ο δυωνυμικός συντελεστής $6 = \binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3$.

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, *για* x = y =1 ==>> $(2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ *και επομένως κάθε σειρά στο τρίγωνο*

Pascal *αθροίζει σε* 2^n.

Για x = -1 *το αθροισμα των στοιχείων κάθε σειράς, με το πρόσημο να εναλλάσεται, είναι* 0

```
? StirlingS2
```

StirlingS2[n, m] gives the Stirling number of the second kind $\mathcal{S}_n^{(m)}$. >>

```
Column[Table[StirlingS2[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}], Center]
```

```
      {1}
     {0, 1}
    {0, 1, 1}
   {0, 1, 3, 1}
  {0, 1, 7, 6, 1}
```

```
Column[Table[StirlingS2[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}]]
```

```
{1}
{0, 1}
{0, 1, 1}
{0, 1, 3, 1}
{0, 1, 7, 6, 1}
```

Οι αριθμοί Stirling 2*ου τύπου, είναι οι αριθμοί* $\left\{ n \atop k \right\}$

που χρησιμοποιούνται για την μετατροπή

$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}.$

$\left\{ n \atop k \right\}$ = *ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύνολο σε* k *μη-κενά υποσύνολα.*

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$ *διότι*

$\{1, 2, 3\} \bigcup \{4\}, \{1, 2, 4\} \bigcup \{3\}, \{1, 3, 4\} \bigcup \{2\}, \{2, 3, 4\} \bigcup \{1\}, \{1, 2\} \bigcup \{3, 4\}, \{1, 3\} \bigcup \{2, 4\}, \{2, 3\} \bigcup \{1, 4\}.$

Εδώ *ισχύει η σχέση*

$\left\{ n \atop k \right\} = \mathrm{k} * \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$

```
Column[Table[StirlingS2[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}]]
```

```
{1}
{0, 1}
{0, 1, 1}
{0, 1, 3, 1}
{0, 1, 7, 6, 1}
```

Είχαμε *δει πως*

$x^0 = x^{\underline{0}}$
$x^1 = x^{\underline{1}}$
$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$
$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$
$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$
$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$ (*δεξιά* $\longrightarrow$ *αριστερά*)

```
{"   πίνακας {n k} όπου n↓ και k→      ", Table[k, {k, 0, 4}], "                    ",
 Thread[{Column[Table[n, {n, 0, 4}]], Column[Table["  --→→    ", {5}]],
   Column[Table[StirlingS2[n, k], {n, 0, 4}, {k, 0, n}]]}]}
```

```
{   πίνακας {n k} όπου n↓ και k→      , {0, 1, 2, 3, 4},

                  0      --→→      {1}
                  1      --→→      {0, 1}
             , {  2 ,    --→→    , {0, 1, 1}        }}
                  3      --→→      {0, 1, 3, 1}
                  4      --→→      {0, 1, 7, 6, 1}
```

$\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 3*\left\{ {3 \atop 3} \right\} + \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3*1+3$