7ο Μάθημα – Παραμετρικές Καμπύλες και Επιφάνειες

Γραφικα

Ευάγγελος Σπύρου

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ακ. Έτος 2018-19

Σύνοψη του σημερινού μαθήματος

Εισαγωγή

- Εώς τώρα έχει εξεταστεί η σχεδίαση **απλών** γεωμετρικών τμημάτων (ευθεία, κύκλος, έλλειψη)
- Η σύνθεση **ρεαλιστικών** σκηνών με γραφικά απαιτεί τη χρήση πιο **ευέλικτων** καμπυλών και επιφανειών
- Θα παρουσιαστούν τρόποι σχεδίασης πιο **πολύπλοκων**, ελεύθερης μορφής καμπυλών και επιφανειών
- Η περιοχή των γραφικών που ασχολείται με αυτά τα σχήματα ονομάζεται “Γεωμετρική Σχεδίαση με τη βοήθεια Υπολογιστή” (Computer-Aided Geometric Design-**CAGD**)

Εισαγωγή

- Η ανάγκη για τη μαθηματική αναπαράσταση πολύπλοκων καμπυλών και επιφανειών, κατάλληλη για χρήση με **υπολογιστή**, παρουσιάστηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1960
- Διαδόθηκαν στη βιομηχανία μηχανές που μπορούσαν να κατασκευάσουν αντικείμενα σύνθετης μορφής, **καθοδηγούμενες** από υπολογιστή
- Εφαρμόστηκαν στην **αυτοκινητιστική** και **αεροπορική** βιομηχανία
- Υιοθετήθηκε η **παραμετρική** αναπαράσταση καμπυλών και επιφανειών
- Οι P. de Casteljau (Citroen) και P. Bezier (Renault) κατέληξαν **ανεξάρτητα** στη θεωρία καμπυλών και επιφανειών

Παραστάσεις Καμπυλών

Μια καμπύλη είναι μια **συλλογή σημείων** του επιπέδου ή του 3Δ χώρου

- Για να περιγραφεί μια καμπύλη, απαιτούνται οι συντεταγμένες x, y (και z για 3Δ) **όλων** των σημείων της
- Οι συντεταγμένες δίνονται από κατάλληλες εξισώσεις, που περιγράφουν **ακριβώς** την καμπύλη
- Θα περιγραφούν **επίπεδες** καμπύλες
- Οι καμπύλες στο **χώρο** περιγράφονται με τον **ίδιο** τρόπο, με προσθήκη της z συντεταγμένης

Αλγεβρική Παράσταση Καμπυλών

- Συνήθης μορφή παράστασης καμπύλης με αλγεβρική εξίσωση σε **απλή** μορφή:

$$y = f(x)$$

ή σε **πεπλεγμένη** μορφή

$$g(x, y) = 0$$

- Αυτές οι εξισώσεις **συσχετίζουν** τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Οι συντεταγμένες κάθε σημείου δίνονται ξεχωριστά, με τη βοήθεια μιας **ανεξάρτητης** παραμέτρου t:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \text{ ή } \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

- $t \in (-\infty, \infty)$ για **άπειρες** καμπύλες ή σε διάστημα $t \in [a, b]$ για **πεπερασμένες**
- Ανάλογα, οι επιφάνειες δίνονται ως τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες συναρτήσεις ως προς δύο παραμέτρους u, v:

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

Ποια είναι η φυσική σημασία;
Ενα αντικείμενο κινείται κατά μήκος της καμπύλης με **σταθερή** ταχύτητα, τότε τη χρονική στιγμή t θα βρίσκεται ακριβώς στο σημείο $\mathbf{X}(t)$ της καμπύλης

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

- Έστω **ευθεία** που διέρχεται από τα σημεία

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

- με **παραμετρική** εξίσωση

$$\begin{bmatrix} x(t) = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y(t) = (1-t)y_1 + ty_2 \end{bmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Μπορεί να γραφεί σε **συνεπτυγμένη** μορφή

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\cdot\mathbf{p}_1 + t\cdot\mathbf{p}_2, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

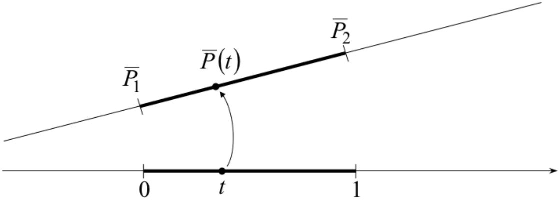
- Για τα δύο σημεία $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ που **ορίζουν** την ευθεία, ισχύει
  - $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_1$
  - $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_2$
- Άρα η

$$\mathbf{p}(t) = (1-t) \cdot \mathbf{p}_1 + t \cdot \mathbf{p}_2, \quad t \in [0,1]$$

είναι η παραμετρική εξίσωση του **προσανατολισμένου** ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$

Παραμετρική Παράσταση Καμπυλών

Παραμετρική εξίσωση ευθείας



- $\mathbf{p}(t) = (1-t)\cdot\mathbf{p}_1 + t\cdot\mathbf{p}_2, \quad t \in [0,1]$
- για $t < 0$ είναι η ημιευθεία **πριν** το $\mathbf{p}_1$
- για $t > 1$ είναι η ημιευθεία **μετά** το $\mathbf{p}_2$

Καμπύλες Bezier

- Είναι θεμελιώδες **εργαλείο** για τη σχεδίαση καμπυλών στα γραφικά
- Έχουν σχετικά **απλή** μαθηματική μορφή
- Έχουν ενδιαφέρουσες **ιδιότητες**
- Αποτελούν τη **βάση** για πιο σύνθετες και ισχυρές μορφές καμπύλων (π.χ. B-Spline)

Τετραγωνικές Καμπύλες Bezier

Γραμμική Παρεμβολή

- Η **παραμετρική** εξίσωση μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ είναι

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\cdot\mathbf{p}_0 + t\cdot\mathbf{p}_1, \quad t \in [0,1]$$

- Το ευθύγραμμο τμήμα **παρεμβάλλει γραμμικά** τα δύο σημεία
- Η εξίσωση εκφράζει τη **γραμμική παρεμβολή** μεταξύ των σημείων

Η γραμμική παρεμβολή είναι ένας **κυρτός συνδυασμός** των δύο σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$, οι συντελεστές έχουν άθροισμα 1 και είναι θετικοί

Τετραγωνικές Καμπύλες Bezier

- Έστω **τρία** σημεία $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$
- Πραγματοποιούμε γραμμική παρεμβολή ανά **ζεύγη**
- Παρεμβολή των $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$

$$\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \quad t \in [0,1]$$

- Παρεμβολή των $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$

$$\mathbf{p}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2, \quad t \in [0,1]$$

Για κάθε t μεταξύ 0 και 1, τα $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ είναι συγκεκριμένα **σημεία** των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων

Τετραγωνικές Καμπύλες Bezier

Μπορεί να γίνει γραμμική παρεμβολή στα $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$

- το **σημείο** που παρεμβάλλει τα σημεία αυτά είναι το

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{p}_0^1(t) + t\mathbf{p}_1^1(t)\\ &= (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2\\ &= \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}t^i(1-t)^{2-i}\mathbf{p}_i\end{aligned}$$

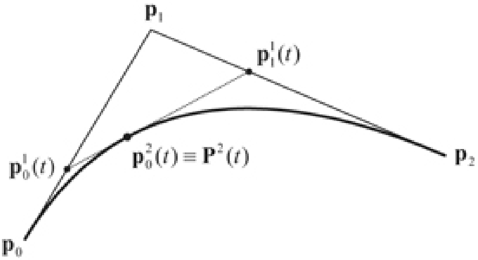
- Ο **εκθέτης** r αναφέρεται στο **βήμα** παρεμβολής, ο **δείκτης** i στο πρώτο από τα δύο σημεία του **προηγούμενου** βήματος

Τετραγωνικές Καμπύλες Bezier

- Η σχέση $\mathbf{p}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$ δείχνει ότι το $\mathbf{p}_0^2(t)$ διαγράφει μια **τετραγωνική** καμπύλη ως προς t, καθώς το t μεταβάλλεται από 0 εώς 1
- Η καμπύλη αυτή είναι μια **τετραγωνική καμπύλη Bezier** ή καμπύλη Bezier δεύτερου βαθμού, $\mathbf{P}^2(t)$
- Τα $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ είναι τα σημεία **ελέγχου** της καμπύλης

Τετραγωνικές Καμπύλες Bezier

Τετραγωνική καμπύλη Bezier

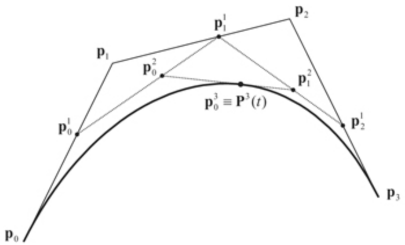


- καθώς το t **μεταβάλλεται** από 0 εώς 1, τα τρία σημεία **μετακινούνται συγχρόνως** πάνω στα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα
- έτσι **παράγεται** η τετραγωνική καμπύλη Bezier

Καμπύλες Bezier βαθμού n

Η διαδικασία που περιγράφηκε για τρία σημεία, μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα

- Με **τέσσερα** αρχικά σημεία, εκτελούνται **τρία** διαδοχικά επίπεδα γραμμικής παρεμβολής
- Προκύπτει έτσι μια **κυβική** καμπύλη Bezier (ή καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού)



Καμπύλες Bezier βαθμού n

- Στη **γενική** περίπτωση με $n+1$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$, κατασκευάζεται μια καμπύλη Bezier βαθμού n, $P^n(t)$

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i$$

- Προφανώς η **τετραγωνική** καμπύλη Bezier αποτελεί **ειδική** περίπτωση της ανωτέρω σχέσης για $n=2$

Αλγόριθμος de Casteljau

- Η σχέση ορισμού της καμπύλης Bezier βαθμού n δίνει έναν **άμεσο** τρόπο για τον υπολογισμό των σημείων της
- Η σχέση αυτή είναι υπολογιστικά **πολύπλοκη**
- Αντίθετα, η γραμμική παρεμβολή γίνεται με **απλές** πράξεις
- Μπορεί να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία για τον υπολογισμό των σημείων της καμπύλης
- Χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος **de Casteljau**

Αλγόριθμος de Casteljau

- Ο αλγόριθμος de Casteljau συνοψίζει τα βήματα της γραμμικής παρεμβολής που απαιτούνται για την παραγωγή μιας καμπύλης Bezier βαθμού n σε μια εύχρηστη **επαναληπτική** σχέση
- **Θέτοντας**

$$\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \ldots n$$

- τα **ενδιάμεσα** σημεία που προκύπτουν κατά τις γραμμικές παρεμβολές είναι

$$\mathbf{p}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$$

με $r = 1, 2, \ldots n$ και $i = 0, 1, \ldots n - r$

- τότε το $\mathbf{p}_0^n(t) \equiv \mathbf{p}^n(t)$ είναι το σημείο της καμπύλης Bezier που **αντιστοιχεί** στην **τιμή** της παραμέτρου t

Αλγόριθμος de Casteljau

- Τα ενδιάμεσα σημεία μπορούν να γραφούν σε μια τριγωνική διάταξη που ονομάζεται **τρίγωνο του de Casteljau**
- π.χ. για μια **κυβική** καμπύλη Bezier

$$
\begin{tikzcd}
\bar{P}_0 \equiv \bar{P}_0^0 \arrow[r, "1-t"] & \bar{P}_0^1 \arrow[r] & \bar{P}_0^2 \arrow[r] & \bar{P}_0^3 \equiv \bar{P}_3(t) \\
\bar{P}_1 \equiv \bar{P}_1^0 \arrow[ur, "t"] \arrow[r] & \bar{P}_1^1 \arrow[ur] \arrow[r] & \bar{P}_1^2 \arrow[ur] \\
\bar{P}_2 \equiv \bar{P}_2^0 \arrow[ur] \arrow[r] & \bar{P}_2^1 \arrow[ur] \\
\bar{P}_3 \equiv \bar{P}_3^0 \arrow[ur]
\end{tikzcd}
$$

- **Οικονομική** υλοποίηση του αλγορίθμου: καταχωρούνται τα σημεία **ελέγχου** της καμπύλης και με τον τρόπο που δείχνουν οι δείκτες υπολογίζονται τα **ενδιάμεσα** σημεία

Αλγόριθμος de Casteljau

- Με τη χρήση του τριγώνου λαμβάνεται ένα **συγκεκριμένο** σημείο της καμπύλης, αυτό που αντιστοιχεί σε **συγκεκριμένο** t
- Για το σχεδιασμό **ολόκληρης** της καμπύλης, πρέπει να εκτελεστεί ο υπολογισμός για τιμές του t από 0 εώς 1 με **μικρό** βήμα Δt
- Το βήμα είναι τόσο μικρότερο, όσο μεγαλύτερη είναι η επιθυμητή **λεπτομέρεια**
- Στη συνέχεια **ενώνονται** τα ευθύγραμμα τμήματα που προέκυψαν

Πολυώνυμα Bernstein

- Οι **συντελεστές** των $\mathbf{p}_i$ είναι "**ειδικά**" πολυώνυμα, που ονομάζονται πολυώνυμα **Bernstein** βαθμού n

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

- Για τις πιο **κοινές** περιπτώσεις ($n = 2, 3$), τα πολυώνυμα Bernstein είναι τα
  - $B_0^2(t) = (1-t)^2$
  - $B_1^2(t) = 2t(1-t)$
  - $B_2^2(t) = t^2$
  - $B_0^3(t) = (1-t)^3$
  - $B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$
  - $B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$
  - $B_3^3(t) = t^3$

Πολυώνυμα Bernstein

Πολυώνυμα Bernstein και καμπύλες Bezier

- Η καμπύλη Bezier βαθμού n μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P^n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{p}_i, \quad t \in [0, 1]$$

Ιδιότητες Πολυωνύμων Bernstein

Βάση Διανυσματικού Χώρου

- Τα πολυώνυμα Bernstein αποτελούν μια **βάση** του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων βαθμού n
- **Κάθε** πολυώνυμο $f(t)$, βαθμού n μπορεί να γραφεί στη **μορφή**

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n c_i$$

με c_i κατάλληλους **βαθμωτούς** συντελεστές
- Άρα, κάθε **πολυωνυμική** καμπύλη βαθμού n μπορεί να γραφεί σε μορφή καμπύλης Bezier

Ιδιότητες Πολυωνύμων Bernstein

- Για **κάθε** n ισχύουν
  - $B_i^n(t) \geq 0$
  - $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- Η ιδιότητα αυτή μπορεί να επιβεβαιωθεί από τη σχέση **ορισμού** των πολυωνύμων Bernstein
- Τα πολυώνυμα Bernstein είναι **συμμετρικά** ως προς t και $1-t$, δηλαδή

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$$

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Ιδιότητα **κυρτής περιβάλλουσας**

- Η καμπύλη Bezier είναι ένας συσχετισμένος (**κυρτός**) **συνδυασμός** των σημείων ελέγχου της
- Βρίσκεται **πάντα** μέσα στην κυρτή **περιβάλλουσα** των σημείων ελέγχου της
- Χρήσιμη ιδιότητα για την **πρόβλεψη** του σχήματος της καμπύλης Bezier
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το **γρήγορο** έλεγχο τομής της με ευθεία (αν η ευθεία δεν τέμνει την περιβάλλουσα, δεν τέμνει ούτε την καμπύλη)

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς

- Η καμπύλη Bezier είναι ένας **συσχετισμένος** μετασχηματισμός των σημείων ελέγχου της
- Παραμένει **αναλλοίωτη** κάτω από συσχετισμένες απεικονίσεις (εκτός από προβολές)

Για να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός σε μια καμπύλη Bezier, αρκεί να εφαρμοστεί στα **σημεία ελέγχου** της

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Αναλλοίωτη σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς **παραμέτρου**

- Η καμπύλη Bezier παραμένει η **ίδια** αν αλλάξει το διάστημα της παραμέτρου **ομοιόμορφα** από $t \in [0, 1]$ σε $u \in [a, b]$
- Στην περίπτωση αυτή εκτελείται ένας **συσχετισμένος** μετασχηματισμός του t σε $u = a + (b - a)t$
- Τα **ενδιάμεσα** σημεία παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{p}_i^r = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$$

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Συμμετρία

- Αν τα σημεία ελέγχου χρησιμοποιηθούν με **αντίστροφη** σειρά, η καμπύλη **δεν** αλλάζει, απλά διατρέχεται με **αντίστροφη** φορά (συμμετρία πολυωνύμων Bernstein

Γραμμική **Ακρίβεια**

- Αν τα σημεία ελέγχου είναι **συνευθειακά**, η καμπύλη είναι ένα **ευθύγραμμο** τμήμα

Παρεμβολή ακραίων σημείων

- $\mathbf{P}^n(0) = \mathbf{p}_0, \ \mathbf{P}^n(1) = \mathbf{p}_n$
- Η καμπύλη **αρχίζει** ακριβώς από το πρώτο σημείο ελέγχου και **τελειώνει** ακριβώς στο τελευταίο

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Εφαπτόμενα **Διανύσματα** στα Άκρα

- Τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα της καμπύλης είναι **παράλληλα** προς τις πλευρές του πολυγώνου ελέγχου
- Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}^n(0) = n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \ \frac{d}{dt}\mathbf{P}^n(1) = n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1})$$

- Η ιδιότητα αυτή **περιορίζει** περαιτέρω το **σχήμα** της καμπύλης

Ιδιότητες Καμπύλων Bezier

Φθίνουσα διακύμανση

- Μια **επίπεδη** καμπύλη Bezier τέμνεται από μια **τυχαία** ευθεία το πολύ τόσες φορές όσες η ευθεία τέμνει το **πολύγωνο** ελέγχου της
- Παρομοίως μια **μη** επίπεδη καμπύλη Bezier τέμνεται από μια ευθεία ή ένα επίπεδο το πολύ τόσες φορές όσες η ευθεία ή το επίπεδο τέμνει το πολύγωνο ελέγχου αυτής
- Άρα μια καμπύλη με κυρτό πολύγωνο ελέγχου είναι **επίσης** κυρτή
- Το αντίθετο **δεν** ισχύει: μια κυρτή καμπύλη Bezier μπορεί να έχει **μη** κυρτό πολύγωνο ελέγχου

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

Δεύτερες παράγωγοι στα άκρα

- Οι **δεύτερες** παράγωγοι της καμπύλης Bezier στα δύο άκρα δίνονται από τους τύπους

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P}^n(0) = n(n-1)(\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0)$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P}^n(1) = n(n-1)(\mathbf{p}_n - 2\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_{n-2})$$

- Εκφράζουν το **ρυθμό** της **μεταβολής** της **εφαπτομένης** στα αντίστοιχα **σημεία**

Ιδιότητες Καμπυλών Bezier

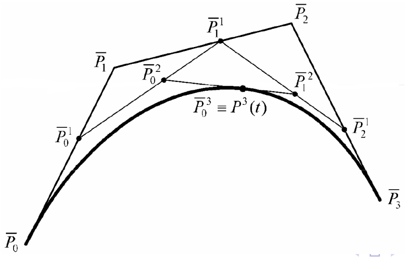
Ψευδο-τοπικός έλεγχος

- Οι καμπύλες Bezier δεν έχουν **τοπικό** έλεγχο
- Μια αλλαγή σε ένα από τα σημεία ελέγχου επηρεάζει **ολόκληρη** την καμπύλη
- Τα $B_i^n(t)$ είναι ορισμένα σε ολόκληρο το **εύρος** του t
- Κάθε $B_i^n(t)$ έχει μόνο ένα **μέγιστο**, στην τιμή $t = i/n$ άρα αλλαγή σε κάποιο P_i θα έχει επίδραση κυρίως στην περιοχή **γύρω** από την τιμή αυτή του t
- Το αποτέλεσμα των αλλαγών είναι συνήθως **προβλέψιμο**

Υποδιαίρεση καμπυλών Bezier

- Έστω μια **κυβική** καμπύλη Bezier με **τρίγωνο** του de Casteljau

$$\begin{tikzcd}
\bar{P}_0 \equiv \bar{P}_0^0 \arrow[r, "1-t"] & \bar{P}_0^1 \arrow[r] & \bar{P}_0^2 \arrow[r] & \bar{P}_0^3 \equiv \bar{P}_3(t) \\
\bar{P}_1 \equiv \bar{P}_1^0 \arrow[r] \arrow[ur, "t"] & \bar{P}_1^1 \arrow[r] \arrow[ur] & \bar{P}_1^2 \arrow[ur] & \\
\bar{P}_2 \equiv \bar{P}_2^0 \arrow[r] \arrow[ur] & \bar{P}_2^1 \arrow[ur] & & \\
\bar{P}_3 \equiv \bar{P}_3^0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$



Υποδιαίρεση καμπυλών Bezier

- Για **κάποια** τιμή του $t \in [0, 1]$, έστω το τμήμα της καμπύλης με **άκρα** τα σημεία $\mathbf{P}^3(0) = \mathbf{p}_0$ και $\mathbf{P}^3(t_0) = \mathbf{p}_0^3(t_0)$
- Δηλαδή, το τμήμα της καμπύλης που **αντιστοιχεί** στο παραμετρικό διάστημα $[0, t_0]$
- Το τμήμα αυτό, έστω $\mathbf{L}$ είναι μια **κυβική** καμπύλη (μέρος κυβικής)
- Άρα μπορεί να γραφεί σαν **καμπύλη Bezier**
- Δηλαδή θα **διαθέτει** σημεία ελέγχου $\mathbf{l}_i,\ i = 0, 1, 2, 3$

$$\mathbf{L}(t') = \sum_{t=0}^{3} B_i^3(t') \cdot \mathbf{l}_i,\ t' \in [0, 1]$$

- Πώς;

Υποδιαίρεση καμπυλών Bezier

- Άρα τα σημεία ελέγχου του τμήματος $\mathbf{L}$ της **καμπύλης** Bezier είναι τα
$$\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_0^i(t_0)$$
- Δηλαδή τα σημεία της **1ης γραμμής** στο τρίγωνο του De Casteljau!!!
- Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για καμπύλες Bezier **οποιουδήποτε** βαθμού n

Υποδιαίρεση καμπυλών Bezier

- Με **παρόμοια** διαδικασία αποδεικνύεται ότι το **υπόλοιπο** τμήμα της καμπύλης (αυτό που αντιστοιχεί στο διάστημα $[t_0, 1]$ μπορεί να γραφεί ως καμπύλη Bezier του ίδιου βαθμού n με σημεία ελέγχου τα

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i^{n-i}(t_0)$$

- Δηλαδή τα σημεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου** στο τρίγωνο του De Casteljau!!!

Υποδιαίρεση καμπυλών Bezier

Εφαρμογές

01 **Εύρεση σημείου τομής καμπύλης με ευθεία:** αφού βεβαιωθεί ότι υπάρχει τομή, υποδιαιρείται η καμπύλη και ελέγχονται ξεχωριστά το "αριστερό" και το "δεξί" τμήμα. Η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά.
Για τον έλεγχο τομής ευθείας με καμπύλη Bezier, υπολογίζεται το **ελάχιστο ορθό παραλληλόγραμμο** που περικλείει την καμπύλη και ελέγχεται η τομή της καμπύλης με αυτό

02 **Σχεδίαση της καμπύλης Bezier:** αν τα σημεία της καμπύλης δεν είναι συγγραμικά, υποδιαιρείται η καμπύλη ως προς τυχαίο t_0 και αυτό επαναλαμβάνεται αναδρομικά, εώς ότου καταλήξει σε συγγραμικά σημεία (με κάποια απόκλιση)

Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

- Κατά την επεξεργασία μιας καμπύλης Bezier για την αναπαράσταση ενός σχήματος, η καμπύλη μπορεί να φανεί **ανεπαρκής**
- Η **ευελιξία** μιας καμπύλης αυξάνει, όσο αυξάνει ο **βαθμός** της, δηλαδή το πλήθος των σημείων ελέγχου της
- Είναι αναγκαίο να αναζητηθούν **τρόποι** αύξησης του βαθμού μιας καμπύλης με τρόπο που να διατηρεί **αναλλοίωτο** το σχήμα της

Πρόβλημα: με **δεδομένη** μια καμπύλη Bezier βαθμού n, να βρεθεί καμπύλη Bezier με βαθμό $n+1$ και **ίδιο** σχήμα με την αρχική

Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

- Για να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό, αρκεί να βρεθεί ένα σύνολο από **σημεία ελέγχου** της νέας καμπύλης
- Έστω $\mathbf{P}^n(t),\ t \in [0,1]$ η **αρχική** καμπύλη με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$
- Έστω $\mathbf{Q}^{n+1}(t),\ t \in [0,1]$ η **νέα** καμπύλη με σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_{n+1}$
- Για να **ταυτίζονται** οι δύο καμπύλες, θα πρέπει $Q^{n+1}(t) = P^n(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, ή

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \mathbf{q}_i = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i$$

- Πώς;

Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

- Τελικά

$$\binom{n+1}{i}\mathbf{q}_i = \binom{n}{i-1}\mathbf{p}_{i-1} + \binom{n}{i}\mathbf{p}_i$$

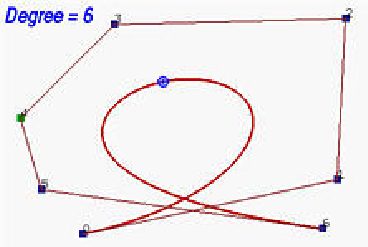
- Δηλαδή
  - $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$
  - $\mathbf{q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{p}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
  - $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{p}_n$

Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

- Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με **γραμμική παρεμβολή** των παλαιών σημείων
- Λόγω της γραμμικής παρεμβολής, τα νέα σημεία βρίσκονται **μέσα** στην περιβάλλουσα της αρχικής καμπύλης
- Το νέο πολύγωνο ελέγχου βρίσκεται πιο “**κοντά**” από το αρχικό
- Όσο αυξάνει ο βαθμός, τόσο το πολύγωνο ελέγχου **συγκλίνει** στην καμπύλη

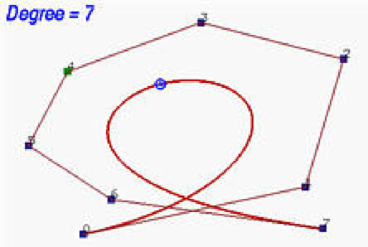
Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



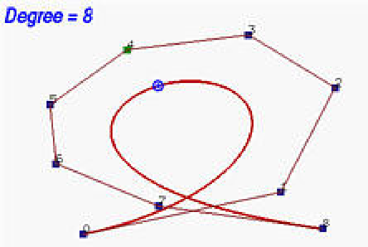
Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



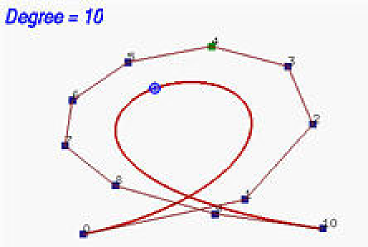
Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



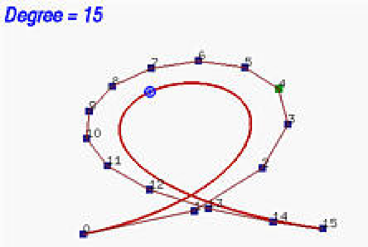
Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



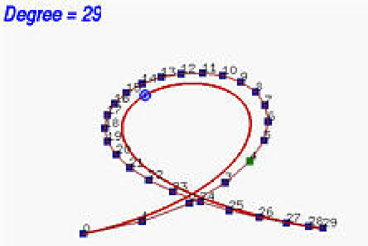
Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



Αύξηση Βαθμού Καμπύλης Bezier

Τα νέα σημεία ελέγχου $\mathbf{q}_i$ προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των παλαιών σημείων



Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bezier

- Η διαδικασία που περιγράφηκε δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν καμπύλες Bezier **αρκετά** μεγάλου βαθμού
- Όσο μεγαλώνει ο βαθμός της καμπύλης, τόσο ο υπολογισμός της γίνεται πιο **πολύπλοκος** και λιγότερο **ευσταθής**
- Εμπλέκονται πολυώνυμα **υψηλού** βαθμού!
- Στην πράξη **δύσκολα** χρησιμοποιούνται καμπύλες βαθμού μεγαλύτερου από 4

Εναλλακτική Λύση: ομαλή **συνένωση** καμπυλών μικρού βαθμού

Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bezier

Ορισμός

- Έστω δύο πολυωνυμικές καμπύλες σε παραμετρική μορφή, $\mathbf{F}(t),\ t \in [t_0, t_1]$, $\mathbf{G}(t),\ t \in [t_1, t_2]$
- Οι δύο καμπύλες ενώνονται με **παραμετρική συνέχεια** C^r στο t_1, αν έχουν ίσες παραγώγους r-τάξης στο t_1

$$\mathbf{F}^{(r)}(t_1) = \mathbf{G}^{(r)}(t_1)$$

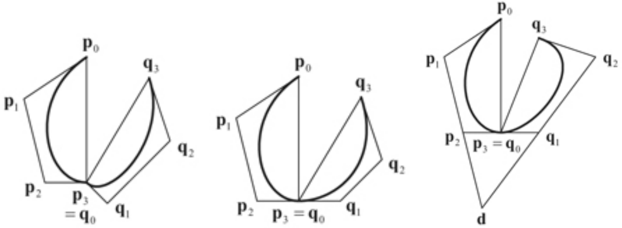
- Αποδεικνύεται ότι συνέχεια C^r συνεπάγεται και συνέχεια C^m, για όλα τα $0 \leq m < r$
- Μια τέτοια ένωση των καμπυλών είναι **λεία**

Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bezier

- Για κάθε πολυώνυμο βαθμού k, η k-οστή παράγωγος είναι **σταθερή**
- Οι παράγωγοι με βαθμό μεγαλύτερο του k είναι **μηδενικές**
- Στην περίπτωση συνένωσης, γίνεται **αναζήτηση** για συνέχεια, μέχρι C^{k-1}
- Πώς;

Ομαλή Συνένωση Καμπυλών Bezier

Παράδειγμα ομαλής συνένωσης καμπυλών Bezier εώς συνέχεια C^2 (δηλ. ως προς 2η παράγωγο



Επιφάνειες

- Οι καμπύλες Bezier μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή παραμετρικών **επιφανειών** με διάφορους τρόπους
- Ο πιο απλός και διαισθητικός τύπος επιφανειών είναι οι **επιφάνειες Bezier τανυστικό γινόμενο**
- Θα φανεί στη συνέχεια ότι αυτές οι μορφές παραμετρικών επιφανειών είναι απλές **γενικεύσεις** των αντίστοιχων καμπύλων και επομένως **κληρονομούν** τις περισσότερες από τις ιδιότητές τους

Επιφάνειες Bezier τανυστικό γινόμενο

- Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη Bezier βαθμού m, με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_i, i = 0, 1, \ldots, m$, εκφρασμένη ως προς μια **παράμετρο** u

$$\mathbf{P}^m(u) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\mathbf{p}_i, \quad u \in [0, 1]$$

- Ας θεωρήσουμε επίσης ότι κάθε σημείο ελέγχου $\mathbf{p}$ διαγράφει μια καμπύλη Bezier βαθμού n (**κοινή** για όλα τα σημεία ελέγχου) με σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_{i,j}, j = 0, 1, \ldots, n$ ως προς μια παράμετρο v

$$\mathbf{P}_i^n(v) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\mathbf{p}_{i,j}, \quad v \in [0, 1]$$

Επιφάνειες Bezier τανυστικό γινόμενο

- Τότε, **κάθε** σημείο της αρχικής καμπύλης θα διατρέχει μια καμπύλη Bezier βαθμού n, και όλες αυτές οι καμπύλες θα αποτελούν μια **καμπύλη Bezier τανυστικό γινόμενο**
- Η εξίσωση αυτής της επιφάνειας μπορεί να σχηματιστεί αν **αντικαταστήσουμε** τα σημεία $\mathbf{p}_i$ στην πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις με την καμπύλη $\mathbf{P}_i^n(v)$ που αυτό διαγράφει
- Έτσι, η εξίσωση μιας επιφάνειας Bezier τανυστικό γινόμενο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ βαθμού m ως προς u και n ως προς v είναι

$$\mathbf{P}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u) \left(\sum_{j=0}^{n} B_j^n(v) \mathbf{p}_{i,j} \right), \quad u, v \in [0,1]$$

Επιφάνειες Bezier τανυστικό γινόμενο

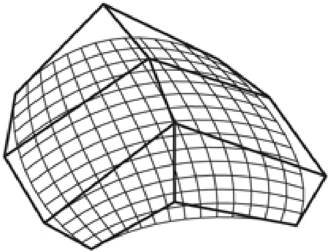
- Οι καμπύλες Bezier που χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό της επιφάνειας έχουν $(m+1) \times (n+1)$ σημεία ελέγχου, τα οποία είναι σημεία (**πλέγμα**) ελέγχου της επιφάνειας Bezier τανυστικό γινόμενο
- Μπορούν να γραφούν σε **ορθογώνια** διάταξη:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & v \rightarrow & & & \\
\hline
u & \mathbf{p}_{0,0} & \mathbf{p}_{0,1} & \cdots & \mathbf{p}_{0,n} \\
\downarrow & \mathbf{p}_{1,0} & \mathbf{p}_{1,1} & \cdots & \mathbf{p}_{1,n} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \mathbf{p}_{m,0} & \mathbf{p}_{m,1} & \cdots & \mathbf{p}_{m,m}
\end{array}
$$

- Οι **ισοπαραμετρικές** καμπύλες που αντιστοιχούν σε $u=0, u=1, v=0, v=1$ καλούνται **συνοριακές** καμπύλες της επιφάνειας Bezier

Κατασκευή επιφάνειας Bezier τανυστικό γινόμενο

- Η κατασκευή μιας επιφάνειας Bezier τανυστικό γινόμενο είναι **συμμετρική**
- Μπορούμε να ξεκινήσουμε από την **συνοριακή** καμπύλη $u = 0$ και να διατρέξουμε μια καμπύλη με **καθένα** από τα σημεία ελέγχου της, κατασκευάζοντας την ίδια επιφάνεια όπως προηγουμένως
- Αυτό μπορεί να επαληθευτεί **εναλλάσσοντας** τα δύο αθροίσματα στην εξίσωση που είδαμε προηγουμένως
- Γενικότερα, η ίδια επιφάνεια κατασκευάζεται ξεκινώντας από **οποιαδήποτε** από τις συνοριακές καμπύλες



Μια επιφάνεια Bezier τανυστικό γινόμενο βαθμών 2 και 3

De Casteljau για επιφάνειες Bezier

- Ο αλγόριθμος του de Casteljau είναι πολύ σημαντικός για την επεξεργασία των καμπύλων Bezier, καθώς εφαρμόζεται στον αποδοτικό **υπολογισμό** των σημείων της καμπύλης, καθώς και στην **υποδιαίρεση** της καμπύλης σε δύο τμήματα του ίδιου τύπου
- Η υποδιαίρεση έχει επίσης ενδιαφέρουσες **εφαρμογές**, από τις οποίες σημαντική είναι η **σχεδίαση** της καμπύλης Bezier
- Ο **ίδιος** αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί σε **επιφάνειες** Bezier τανυστικό γινόμενο, με ανάλογες εφαρμογές

De Casteljau για επιφάνειες Bezier

- Για να υπολογίσουμε ένα **σημείο** $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ μιας επιφάνειας Bezier, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο σε κάθε μία από τις **γραμμές** του προηγούμενου πίνακα
  - δηλαδή σε κάθε μία από τις **καμπύλες** που διαγράφονται από τα $\mathbf{p}_{i,0}$
- Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζονται $m+1$ σημεία που αντιστοιχούν στη **δεδομένη** τιμή της v πάνω σε αυτές τις καμπύλες
  - αυτά είναι τα σημεία **ελέγχου** της **ισοπαραμετρικής** καμπύλης που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη τιμή του v
- Το ζητούμενο σημείο $\mathbf{P}^{m,n}(u,v)$ της επιφάνειας είναι το σήμείο αυτής της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή του u και μπορεί να υπολογιστεί με μια **ακόμη** εφαρμογή του αλγορίθμου

Ιδιότητες επιφανειών Bezier τανυστικό γινόμενο

- Οι ιδιότητες των επιφανειών Bezier τανυστικό γινόμενο είναι **γενικεύσεις** των αντίστοιχων ιδιοτήτων των καμπυλών Bezier
- Η μόνη ιδιότητα που **δεν** γενικεύεται είναι αυτή της φθίνουσας διακύμανσης

Υποδιαίρεση επιφανειών Bezier

- Η υποδιαίρεση μιας επιφάνειας Bezier τανυστικό γινόμενο είναι **απλή γενίκευση** της υποδιαίρεσης της καμπύλης Bezier
- Στην περίπτωση της επιφάνειας, επιλέγεται ένα **ζεύγος** παραμετρικών τιμών (u_0, v_0) και η επιφάνεια **υποδιαιρείται** σε 4 υπο-επιφάνειες του ίδιου τύπου, των οποίων τα σημεία ελέγχου παράγονται κατά τον υπολογισμό του σημείου $\mathbf{P}^{m,n}(u_0, v_0)$ της επιφάνειας, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο de Casteljau

Υποδιαίρεση επιφανειών Bezier

- Για να σχεδιάσουμε μια επιφάνεια Bezier τανυστικό γινόμενο, λαμβάνουμε υπόψη ότι αν τα σημεία ελέγχου αυτής είναι **συνεπίπεδα**, τότε η επιφάνεια εκφυλίζεται σε ένα **επίπεδο** πολύγωνο, το οποίο ορίζεται από τα 4 ακραία σημεία ελέγχου
- Επομένως, ελέγχουμε αν τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας είναι συνεπίπεδα (μέχρι μια ορισμένη **ακρίβεια**)
  - αν είναι σχεδιάζουμε **απλώς** το πολύγωνο που αναφέρθηκε
  - διαφορετικά, **υποδιαιρούμε** την επιφάνεια σε 4 υπο-επιφάνειες για ένα τυχαίο ζεύγος παραμετρικών τιμών (u_0, v_0) και **επαναλαμβάνουμε** τη διαδικασία αναδρομικά, για κάθε μία από τις υπο-επιφάνειες