4ο Μάθημα – Προβολές και Μετασχηματισμοί Παρατήρησης

Γραφικα

Ευάγγελος Σπύρου

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ακ. Έτος 2018-19

Σύνοψη του σημερινού μαθήματος

Εισαγωγή

- Οι περισσότερες συσκευές **απεικόνισης** είναι **2Δ** (οθόνες-εκτυπωτές)
- Το μαθηματικό **μοντέλο** του συνθετικού κόσμου είναι **3Δ**
- **Πριν** τη δημιουργία κάθε 2Δ καρέ πρέπει τα 3Δ αντικείμενα να **προβληθούν** σε ένα **επίπεδο προβολής**
- Οι **παράμετροι** της προβολής καθορίζονται κατά τον μετασχηματισμό παρατήρησης

Ορισμός

Μετασχηματισμοί Παρατήρησης: *μετατρέπουν τα 3Δ αντικείμενα από το σύστημα συντεταγμένων κόσμου (ΣΣΚ) στο οποίο έχουν αρχικά ορισθεί, στον κανονικοποιημένο χώρο οθόνης (ΚΧΟ) μέσω του συστήματος συντεταγμένων του παρατηρητή (ΣΣΠ).*

Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός παρατήρησης καθορίζει επίσης τα **όρια αποκοπής** στο ΣΣΠ
- Το **σκεπτικό** πίσω από τα παραπάνω είναι:
  - Τα αντικείμενα ορίζονται αρχικά στο **δικό τους** τοπικό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο μπορεί π.χ. να είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας σχεδιασμού
  - **Ενοποιούνται** στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου (ΣΣΚ) όπου τοποθετούνται **μετασχηματισμένα**
  - Το ΣΣΚ χρησιμοποιείται για να ορίσει το μοντέλο ενός **συνθετικού** κόσμου
  - Η μετάβαση από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ γίνεται για τη **διευκόλυνση** λειτουργιών όπως η περικοπή και η προβολή
  - Εξασφαλίζει ότι όλα τα αντικείμενα που επέζησαν της περικοπής θα είναι ορισμένα σε έναν **κανονικοποιημένο** χώρο (π.χ. με όρια -1 εώς 1)

Εμπλεκόμενα συστήματα συντεταγμένων

Επισκόπηση συστημάτων συντεταγμένων που εμπλέκονται στον μετασχηματισμό παρατήρησης (CSS=ΚΧΟ).

Προβολές

Ορισμός

*Στα μαθηματικά **προβολή** είναι όρος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τεχνικών για τη δημιουργία της εικόνας ενός αντικειμένου πάνω σε ένα άλλο απλούστερο αντικείμενο όπως μια ευθεία, ένα επίπεδο ή μια επιφάνεια.*

- Ένα **κέντρο προβολής** μαζί με **σημεία** του αντικειμένου που προβάλλεται χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των **ευθειών προβολής** (ή απλά: προβολείς)
- Η **τομή** μιας ευθείας προβολής με το απλό αντικείμενο (π.χ., το επίπεδο προβολής) δημιουργεί την **απεικόνιση** ενός σημείου του αρχικού αντικειμένου
- Προβολές μπορούν να οριστούν σε χώρους **τυχαίων** διαστάσεων

Κατηγορίες Προβολών

Οι προβολές διακρίνονται σε 2 βασικές κατηγορίες

- **Προοπτική** (ή κεντρική) προβολή (perspective): η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι **πεπερασμένη**
- **Παράλληλη** προβολή (parallel): η απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής είναι **άπειρη**

Ιδιότητες Προβολών

Οι ιδιότητες αυτές αφορούν προβολές και των δύο κατηγοριών:

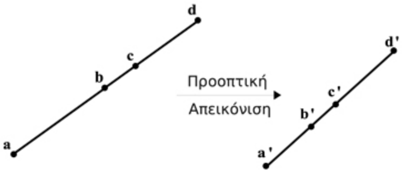
- Οι ευθείες προβάλλονται σε **ευθείες**
- Οι αποστάσεις γενικά **αλλάζουν**
- Οι παράλληλες ευθείες στις 3Δ που δεν είναι παράλληλες με το επίπεδο προβολής, δεν προβάλλονται σε παράλληλες ευθείες, αλλά σε ευθείες που τέμνονται σε κάποιο **σημείο φυγής**
- Η γωνία μεταξύ δύο ευθειών **αλλάζει**, εκτός κι αν το επίπεδο των ευθειών είναι παράλληλο προς το επίπεδο προβολής

Οι προοπτικές απεικονίσεις δεν είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί: **δεν** περιγράφονται με συσχετισμένους **πίνακες** μετασχηματισμού

Ιδιότητες Προβολών

- Οι συσχετισμένοι συνδυασμοί **δεν διατηρούνται** από τις προβολές
- Οι λόγοι αποστάσεων **διατηρούνται** από τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς από τον ορισμό τους
- Π.χ., στο σχήμα:

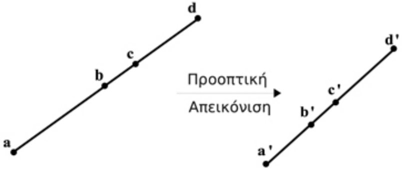
$$\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}} \neq \frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}$$



Ιδιότητες Προβολών

- Οι προβολές όμως διατηρούν τους **λόγους αναλογιών**:

$$\frac{\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{cd}}}{\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bd}}} = \frac{\frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{c'd'}}}{\frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{b'd'}}}$$



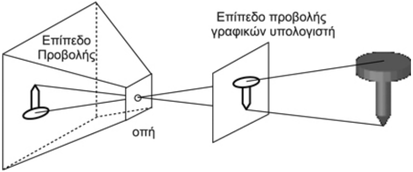
- Άρα, για να περιγραφεί **πλήρως** η προοπτική απεικόνιση μιας ευθείας χρειαζόμαστε την απεικόνιση **τριών** σημείων της (στους συσχετισμένους μετασχηματισμούς μόνο δύο)

Η "**ευθύτητα**" μιας ευθείας διατηρείται με δύο σημεία, αλλά ιδιότητες όπως το **βάθος** και το **χρώμα** απαιτούν τρία

Προοπτική Προβολή

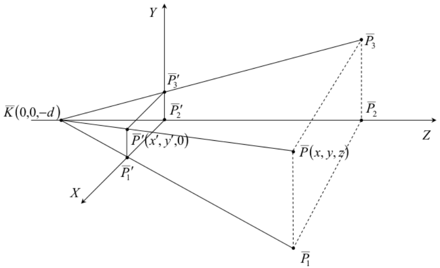
- Μοιάζει με το οπτικό σύστημα των **ματιών** μας
- Μπορεί να μοντελοποιηθεί με **σημειακή κάμερα οπής**
- Η οπή της κάμερας είναι το **κέντρο προβολής**
- Το επίπεδο προβολής που σχηματίζεται το **είδωλο** είναι το **επίπεδο εικόνας**

Προοπτική Προβολή



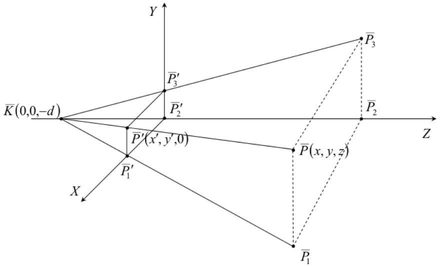
- Το απλό μοντέλο σημειακής κάμερας δημιουργεί **αντεστραμμένο είδωλο**
- Στα γραφικά παίρνουμε ένα “**όρθιο**” είδωλο, τοποθετώντας το επίπεδο προβολής “**μπροστά**” από την οπή της κάμερας

Προοπτική Προβολή



- Το **κέντρο** προβολής θεωρείται ότι βρίσκεται πάνω στον **αρνητικό** z-άξονα, στο σημείο $\overline{K}(0, 0, -d)$
- Το **επίπεδο** προβολής είναι το XY ($z = 0$)
- Ένα σημείο $\overline{P}(x, y, z)$ του 3Δ χώρου προβάλλεται στο **σημείο τομής** της $\overline{P}\overline{K}$ με το επίπεδο XY, έστω το $\overline{P}'$

Προοπτική Προβολή



- Από τα όμοια τρίγωνα $\bar{K}\bar{P}_1'\bar{P}_2'$, $\bar{K}\bar{P}_1\bar{P}_2$, καθώς και από τα $\bar{K}\bar{P}_2'\bar{P}_3'$, $\bar{K}\bar{P}_2\bar{P}_3$ υπολογίζονται οι συντεταγμένες του **σημείου προβολής**

$$\frac{x'}{x} = \frac{d}{d+z} \Rightarrow x' = \frac{d \cdot x}{d+z}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{d}{d+z} \Rightarrow y' = \frac{d \cdot y}{d+z}$$

Προοπτική Προβολή - Ομογενείς Συντεταγμένες

- Για τη μεταβολή της **ομογενούς** συντεταγμένης w μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας

$$P_{pers} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

Προοπτική Προβολή - Ομογενείς Συντεταγμένες

- Ο πίνακας αυτός **μεταβάλλει** τις συντεταγμένες ενός σημείου $\bar{P}(x, y, z, w)$ ως εξής

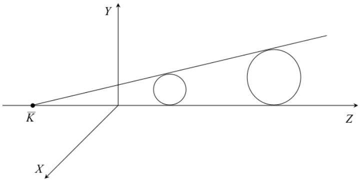
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cdot x \\ d \cdot y \\ 0 \\ z + d \end{bmatrix}$$

- Ακολουθεί **διαίρεση** με w' αφού πρέπει $w = 1$

$$\bar{P}' = \frac{1}{w'} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x \cdot d}{z+d} \\ \frac{y \cdot d}{z+d} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κεντρική Σμίκρυνση

- Χαρακτηριστικό της προοπτικής προβολής είναι η **κεντρική σμίκρυνση**
- Μειώνεται το μέγεθος των αντικειμένων κατά έναν παράγοντα που είναι ανάλογος της **απόστασης** του αντικειμένου από το **κέντρο προβολής**



Ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες, αλλά μελετήθηκε σε βάθος από τον Leonardo da Vinci

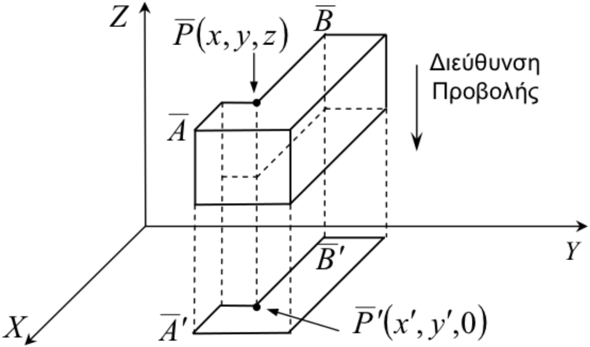
Προοπτική Προβολή - Συμπεράσματα

- Η προοπτική προβολή προσομοιάζει καλά τον τρόπο που αντιλαμβάνεται το βάθος το **ανθρώπινο μάτι**
- Σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών (π.χ. αρχιτεκτονική), είναι επιθυμητό να διατηρηθούν αναλλοίωτες οι αποστάσεις, κάτι που **αδυνατεί** να κάνει η προοπτική προβολή
- Λύση: **Παράλληλη** προβολή

Παράλληλη Προβολή

- Το κέντρο προβολής θεωρείται ότι βρίσκεται στο **άπειρο**
- Η προβολή γίνεται σε ένα δοσμένο **επίπεδο** προβολής, ως προς κάποια συγκεκριμένη **διεύθυνση** προβολής
- Απλούστερη παράλληλη προβολή είναι η **ορθογραφική** προβολή, πάνω σε ένα από τα βασικά επίπεδα συντεταγμένων $x = 0, y = 0, z = 0$
- Επίσης, η πλάγια προβολή έχει διεύθυνση προβολής **όχι απαραίτητα κάθετη** στο επίπεδο προβολής

Ορθογραφική Προβολή



- Αν π.χ. επίπεδο προβολής είναι το $z = 0$, τότε το σημείο $\bar{P}(x, y, z)$ προβάλλεται στο $\bar{P}'(x', y', z') = (x, y, 0)$

Ορθογραφική Προβολή

- Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$P_{par} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας αυτός **μεταβάλλει** τις συντεταγμένες ενός σημείου $\bar{P}(x, y, z, 1)$ ως εξής

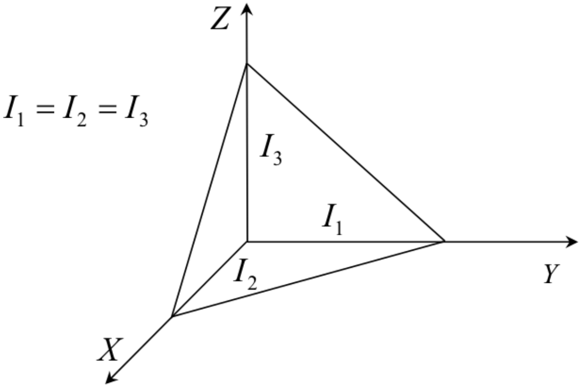
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ορθογραφικές Προβολές

Η 1η κατηγορία παράλληλων προβολών είναι οι **ορθογραφικές** προβολές

- Οι παράλληλες ακτίνες πέφτουν **κάθετα** στο επίπεδο προβολής
- Στην κατηγορία των ορθογραφικών προβολών υπάρχει ο διαχωρισμός
  - **Ορθογώνιες**: Η δέσμη ακτίνων είναι στην κατεύθυνση κάποιου άξονα συντεταγμένων (π.χ. η κάτοψη στο επίπεδο XY)
  - **Αξονομετρικές** (αξονικές): Το επίπεδο προβολής δεν είναι κάθετο σε κανέναν άξονα συντεταγμένων, δηλαδή τέμνει 2 ή 3 άξονες συντεταγμένων
  - **Ισομετρικές**: ειδική περίπτωση των αξονομετρικών προβολών που η δέσμη των ακτίνων είναι παράλληλη προς την κύρια διαγώνιο του χώρου

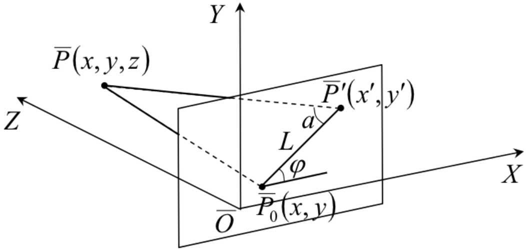
Ισομετρική Προβολή



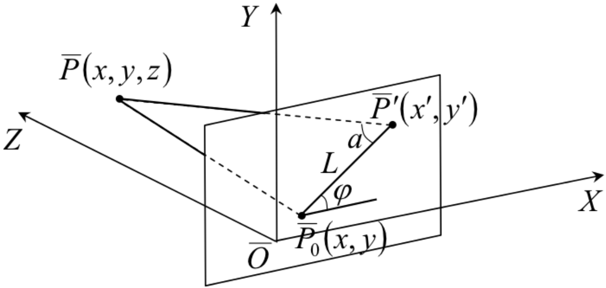
Πλάγια Παράλληλη Προβολή

Η 2η κατηγορία παράλληλων προβολών είναι οι **πλάγιες παράλληλες** προβολές

- Οι παράλληλες ακτίνες **δεν** είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής
- Μια πλάγια προβολή χαρακτηρίζεται από τις **γωνίες** α, ϕ
- Αυτές φαίνονται στο σχήμα για το επίπεδο XY



Πλάγια Παράλληλη Προβολή



- Είναι $x' = x + Lcos\phi, \quad y' = y + Lsin\phi$
- Αν α η γωνία πρόσπτωσης, θα ισχύουν: $tan\alpha = \frac{z}{L}, \quad L = \overline{P}\overline{P}_0$
- Άρα $L = \frac{z}{tan\alpha} = z \cdot c, \quad c = \frac{1}{tan\alpha}$
- Και τελικά: $x' = x + z \cdot c \cdot cos\phi, \quad y' = y + z \cdot c \cdot sin\phi$

Πλάγια Παράλληλη Προβολή

- Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$P_{obl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \cdot cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & c \cdot sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας αυτός **μεταβάλλει** τις συντεταγμένες ενός σημείου $\bar{P}(x, y, z, 1)$ ως εξής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \cdot cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & c \cdot sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \cdot c \cdot cos\phi \\ y + z \cdot c \cdot sin\phi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ορθογραφική Προβολή

για $\alpha = 90° \Rightarrow c = \frac{1}{tan 90°}$ προκύπτει η **ορθογραφική** προβολή

- Ο πίνακας γίνεται

$$P_{orth} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προβολή Cavalier

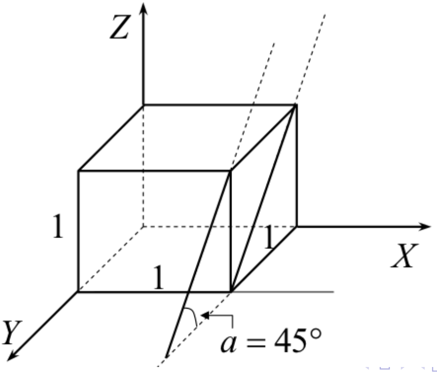
Ειδική περίπτωση για $\alpha = 45^\circ \Rightarrow c = \frac{1}{tan45^\circ} = 1$

- Ο πίνακας της προβολής **Cavalier** για $\phi = 45^\circ$ είναι

$$P_{cav} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προβολή Cavalier

- Κύριο χαρακτηριστικό της προβολής Cavalier είναι ότι **δεν** εμφανίζει **σμίκρυνση** των ευθειών που είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής



Προβολή Cabinet

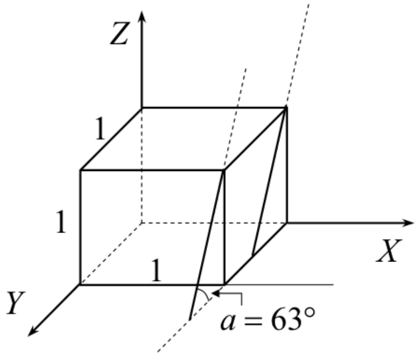
Ειδική περίπτωση για $\alpha = 63^\circ \Rightarrow c = \frac{1}{tan 30^\circ} = \frac{1}{2}$

- Ο πίνακας της προβολής **Cabinet** για $\phi = 30^\circ$ είναι

$$P_{cab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

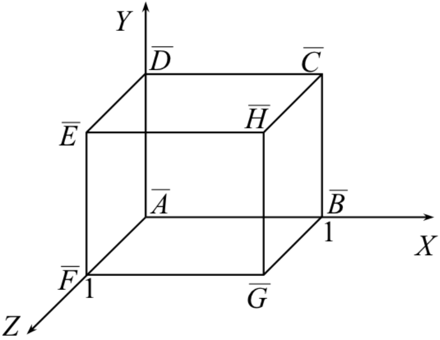
Προβολή Cabinet

- Κύριο χαρακτηριστικό της προβολής Cabinet είναι ότι εμφανίζει **σμίκρυνση** κατά $\frac{1}{2}$ των ευθειών που είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής

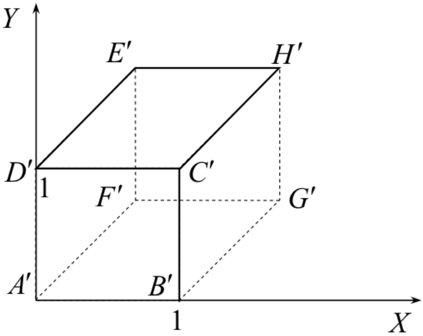


Εφαρμογή

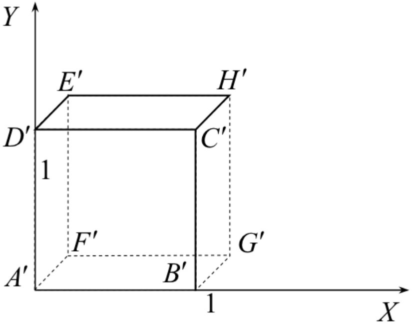
Σχεδιάστε στο επίπεδο XY τις προβολές Cavalier και Cabinet του μοναδιαίου κύβου



Εφαρμογή - προβολή Cavalier



Εφαρμογή - προβολή Cabinet



Μετασχηματισμοί Παρατήρησης

- Ένας **μετασχηματισμός παρατήρησης** ορίζει όλη τη διαδικασία **μετατροπής συντεταγμένων** από το ΣΣΚ ως τον ΚΧΟ, μέσω του ΣΣΠ
- Επιπλέον, ορίζει τα **όρια** για την **περικοπή** στο οπτικό πεδίο, στο ΣΣΠ
- Όλα τα συστήματα συντεταγμένων είναι **δεξιόστροφα**
- Θα περιγράψουμε τον ΜΠ σε **δύο** τμήματα:
  01. μετατροπή από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ
  02. μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ

Η συντεταγμένη z **διατηρείται** κατά την μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ: κάποια από τα στάδια που ακολουθούν τον ΜΠ χρειάζονται **3Δ** δεδομένα!

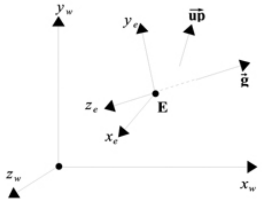
ΣΣΚ σε ΣΣΠ

Το **πρώτο** βήμα είναι η μετάβαση από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ

- Το ΣΣΠ μπορεί να ορισθεί **μέσα** στο ΣΣΚ με τις ακόλουθες **παραμέτρους**:
  - το **κέντρο** του ΣΣΠ $\mathbf{E}$
  - την κατεύθυνση **παρατήρησης** $\vec{\mathbf{g}}$
  - την "**άνω**" κατεύθυνση $\vec{\mathbf{up}}$
- Το κέντρο $\mathbf{E}$ παριστάνει το **σημείο παρατήρησης** (εκεί βρίσκεται ένας "φανταστικός" παρατηρητής
- Το διάνυσμα $\vec{\mathbf{up}}$ ορίζει την "άνω" κατεύθυνση και **δεν** χρειάζεται να είναι κάθετο στο $\vec{\mathbf{g}}$

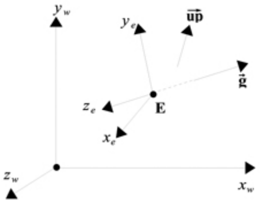
ΣΣΚ σε ΣΣΠ

Επιλέγουμε **δεξιόστροφο** σύστημα, έχουμε αρκετά δεδομένα για να ορίσουμε τους άξονες του ΣΣΠ, x_e, y_e, z_e



- Οι άξονες x_e, y_e πρέπει να **ευθυγραμμιστούν** με τους αντίστοιχους του ΚΧΟ
- Ο x_e **οριζόντιος**, αυξάνει προς τα **δεξιά**, ο y_e **κάθετος**, αυξάνει προς τα **πάνω**
    - Για **δεξιόστροφο** ΣΣΠ, διαλέγουμε z_e που αυξάνει προς την κατεύθυνση του **παρατηρητή**

ΣΣΚ σε ΣΣΠ



- Τα **διανύσματα** που ορίζουν τους δύο άλλους άξονες του ΣΣΠ υπολογίζονται με **εξωτερικά** γινόμενα ως εξής:
  - $\vec{\mathbf{z_e}} = -\vec{\mathbf{g}}$
  - $\vec{\mathbf{x_e}} = \vec{\mathbf{up}} \times \vec{\mathbf{z_e}}$
  - $\vec{\mathbf{y_e}} = \vec{\mathbf{z_e}} \times \vec{\mathbf{x_e}}$

ΣΣΚ σε ΣΣΠ

- Έχοντας ορίσει το ΣΣΠ, πρέπει να γίνει η **μετατροπή** από το ΣΣΚ στο ΣΣΠ
- Πρακτικά, αφού υπολογισθεί ο πίνακας $\mathbf{M}_{\text{ΣΣΚ}\rightarrow\text{ΣΣΠ}}$, οι κορυφές όλων των αντικειμένων **πολλαπλασιάζονται** με αυτόν από δεξιά
- Μπορεί να γίνει μια **μεταφορά** κατά $-\vec{\mathbf{E}} = [E_x, E_y, E_z]$, ακολουθούμενη από ένα μετασχηματισμό **περιστροφής**
  - ο δεύτερος μπορεί να εκφραστεί ως **αλλαγή βάσης**

ΣΣΚ σε ΣΣΠ

- Έστω τα **διανύσματα βάσης** των αξόνων του ΣΣΠ εκφρασμένα στο ΣΣΚ είναι: $\hat{\mathbf{x}}_e = [a_x, a_y, a_z]$, $\hat{\mathbf{y}}_e = [b_x, b_y, b_z]$, $\hat{\mathbf{z}}_e = [c_x, c_y, c_z]$. Τότε:

$$\mathbf{M}_{\Sigma\Sigma K \to \Sigma\Sigma\Pi} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \\ c_x & c_y & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E_x \\ 0 & 1 & 0 & -E_y \\ 0 & 0 & 1 & -E_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ

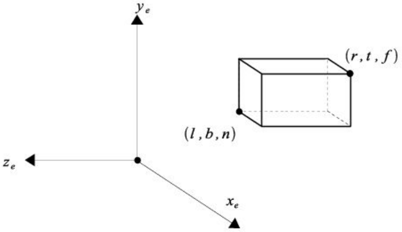
- Στη συνέχεια, θα **μετατρέψουμε** τη σκηνή μας από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ
- Εδώ διακρίνουμε **δύο** περιπτώσεις:
  - **ορθογραφική** προβολή σε ένα από τα τρία βασικά επίπεδα του χώρου (θα χρησιμοποιήσουμε το xy)
  - **προοπτική** προβολή

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Ορθογραφική προβολή

- Έστω ότι έχουμε **ορθογραφική** προβολή πάνω στο επίπεδο xy
- Πρέπει να επιλέξουμε ένα **τμήμα** του χώρου το οποίο θα απεικονισθεί στον ΚΧΟ
- Αυτό το τμήμα ονομάζεται **στερεό παρατήρησης**, παίρνει τη μορφή ορθογώνιου παραλληλεπίπέδου
- Μπορεί να οριστεί από δύο **διαμετρικά αντίθετες** κορυφές, οι οποίες ορίζουν ταυτόχρονα και τα **επίπεδα αποκοπής** που χρησιμοποιούνται στην περικοπή στο οπτικό πεδίο

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Ορθογραφική προβολή

- $x_e = l$: **αριστερό** επίπεδο αποκοπής
- $x_e = r$: **δεξί** επίπεδο αποκοπής ($r > l$)
- $y_e = b$: **κάτω** επίπεδο αποκοπής
- $y_e = t$: **πάνω** επίπεδο αποκοπής ($t > b$)
- $z_e = n$: **έμπροσθεν** επίπεδο αποκοπής
- $z_e = f$: **όπισθεν** επίπεδο αποκοπής ($f < n$, ο z έχει κατεύθυνση προς τον παρατηρητή)



ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Ορθογραφική προβολή

- Θέλουμε να **διατηρήσουμε** τη συντεταγμένη z
- Έτσι, ο πίνακας **ορθογραφικής** προβολής πάνω στο xy είναι ο μοναδιαίος πίνακας $(\mathbf{ID})$
- Το στερεό παρατήρησης μπορεί να μετατραπεί στον ΚΧΟ με μια **μεταφορά** και μια **αλλαγή κλίμακας**
- Το (l,b,n) **απεικονίζεται** στο -1 και το (r,t,f) στο 1
- Ο απαιτούμενος **μετασχηματισμός** θα είναι:

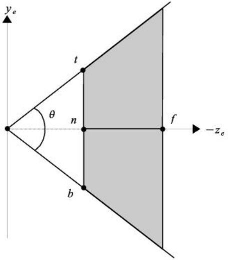
$$\mathbf{M}^{\text{ΟΡΘΟ}}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}} = \mathbf{S}\left(\frac{2}{r-l},\frac{2}{t-b},\frac{2}{f-n}\right)\cdot\mathbf{T}\left(-\frac{r+l}{2},-\frac{t+b}{2},-\frac{n+f}{2}\right)\cdot\mathbf{ID}$$

- Έτσι, ένα **σημείο** του ΣΣΚ $\mathbf{X_W} = [x_w, y_w, z_w]^T$ **απεικονίζεται** στον ΚΧΟ με τον $\mathbf{X_S} = \mathbf{M}^{\text{ΟΡΘΟ}}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}} \cdot \mathbf{M}_{\text{ΣΣΚ}\rightarrow\text{ΣΣΠ}} \cdot \mathbf{X_W}$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

- Στην περίπτωση αυτή, το στερεό παρατήρησης είναι μια **κόλουρη πυραμίδα**, συμμετρική ως προς τον άξονα $-z_e$
- Μπορεί να οριστεί με 4 **παραμέτρους**:

- θ η **γωνία** του οπτικού πεδίου στην κατεύθυνση του y
- asp ο **λόγος** του πλάτους ως προς το ύψος μιας τομής της πυραμίδας
- $z_e = n$ το **έμπροσθεν** επίπεδο αποκοπής
- $z_e = f$ το **όπισθεν** επίπεδο αποκοπής ($f < n$)



ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

- Το πάνω, κάτω, δεξί και αριστερό όριο αποκοπής στο βάθος του έμπροσθεν επιπέδου αποκοπής μπορούν να **εξαχθούν** από τις παραπάνω παραμέτρους ως εξής:
  - $t = |n| \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
  - $b = -t$
  - $r = t \cdot asp$
  - $l = -r$
- Μπορούμε να **τροποποιήσουμε** τον πίνακα της προοπτικής προβολής P_{PER}
- Πρέπει να γίνει **ειδική** μεταχείριση στην z, η οποία πρέπει να **διατηρηθεί** για τους αλγορίθμους απομάκρυνσης κρυμμένων επιφανειών στο χώρο οθόνης

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

- Η **απλή** φύλαξη της z_e συντεταγμένης θα **παραμορφώσει** τα αντικείμενα
- Χρειαζόμαστε μια απεικόνιση που να **διατηρεί** ευθείες και επίπεδα
  - Ευθείες και επίπεδα του ΣΣΠ πρέπει να απεικονίζονται σε **ευθείες** και **επίπεδα** του ΚΧΟ
- Μια τέτοια απεικόνιση είναι η $z_s = A + B/z_e$ με A, B **σταθερές**
  - **αντιστρέφοντας** την z, απαιτείται $(z_e = n) \Rightarrow (z_s = n)$ και $(z_e = f) \Rightarrow (z_s = f)$
  - από τις **εξισώσεις** προκύπτει $A = n + f$, $B = -nf$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

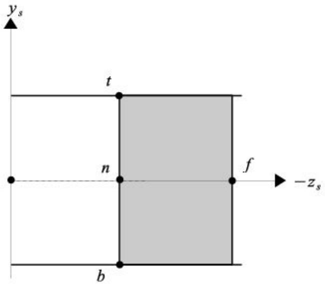
- Συνεπώς, ο **πίνακας προοπτικής προβολής** θα είναι:

$$\mathbf{P_{VT}} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Αυτός ο πίνακας κάνει τη συντεταγμένη w να ισούται με z_e
- Έτσι, πρέπει να ακολουθήσει μια διαίρεση με z_e (**προοπτική διαίρεση**)

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

- Ο μετασχηματισμός $\mathbf{P_{VT}}$ μετατρέπει την κόλουρη πυραμίδα σε **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**:



- Τα όρια αποκοπής **δεν** επηρεάζονται από τον $\mathbf{P_{VT}}$

ΣΣΠ σε ΚΧΟ – Προοπτική προβολή

- Για να **ολοκληρωθεί** η μετατροπή από το ΣΣΠ στον ΚΧΟ, πρέπει να ακολουθήσουν τον $\mathbf{P_{VT}}$ μια μεταφορά (κατά τον z_e και μια αλλαγή κλίμακας:

$$\mathbf{M}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}}^{\text{ΠΡΟΟΠ}} = \mathbf{S}\left(\frac{2}{r-l}, \frac{2}{t-b}, \frac{2}{f-n}\right) \cdot \mathbf{T}\left(0, 0, -\frac{n+f}{2}\right) \cdot \mathbf{P_{VT}}$$

- Ένα σημείο του ΣΣΚ $X_W = [x_w, y_w, z_w, 1]^T$ μπορεί να μετατραπεί στον ΚΧΟ με **προοπτική προβολή**:

$$[x, y, z, w]^T = \mathbf{M}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}}^{\text{ΠΡΟΟΠ}} \cdot \mathbf{M}_{\text{ΣΣΚ}\rightarrow\text{ΣΣΠ}} \cdot \mathbf{X_W}$$

- Ακολουθεί **προοπτική διαίρεση** με την $w = z_e$
- Η περικοπή στο οπτικό πεδίο συνήθως γίνεται αμέσως **πριν** την προοπτική διαίρεση, εξασφαλίζοντας ότι οι συντεταγμένες οποιουδήποτε αντικειμένου θα είναι **εντός** των ορίων αποκοπής $-w \leq x, y, z \leq w$

Περικοπή στο οπτικό πεδίο και Μετ. Παρατήρησης

- Θα δούμε ότι η **περικοπή** στο οπτικό πεδίο υλοποιείται με αλγόριθμους **3Δ αποκοπής**
- Ο μετασχηματισμός παρατήρησης ορίζει τα **3Δ όρια αποκοπής**
- Η αποκοπή λαμβάνει χώρα στον ΚΧΟ μετά την εφαρμογή του $\mathbf{M}^{\text{ΠΡΟΟΠ}}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}}$ ή του $\mathbf{M}^{\text{ΟΡΘΟ}}_{\text{ΣΣΠ}\rightarrow\text{ΚΧΟ}}$, αντίστοιχα, αλλά **πριν** από τη διαίρεση με το w στον πρώτο
- Τα όρια αποκοπής για την **προοπτική** προβολή είναι $-w \leq x, y, z \leq w$
- Τα όρια αποκοπής για την **ορθογραφική** ή την **παράλληλη** προβολή είναι $-1 \leq x, y, z \leq 1$

Περικοπή στο οπτικό πεδίο και Μετ. Παρατήρησης

- Γιατί γίνεται η περικοπή στο οπτικό πεδίο με αποκοπή στις **3Δ** και όχι στις 2Δ αφού απορριφθεί η z;
- Υπάρχουν **τρεις** λόγοι γι'αυτό:
  1. Στην προοπτική προβολή, μετά την απόρριψη της z δεν υπάρχει **αρκετή** πληροφορία για την περικοπή αντικειμένων που βρίσκονται **πίσω** από το κέντρο προβολής E και τα οποία θα εμφανίζονταν **ανάποδα** στο επίπεδο προβολής
  2. Στην προοπτική προβολή αποφεύγουμε τη **διαίρεση** με το 0 (για σημεία με $z_e = 0$, αποφεύγουμε και το **κόστος** της προοπτικής διαίρεσης για σημεία που αποκόπτονται
  3. Ο συνδυασμός του έμπροσθεν και του όπισθεν επιπέδου αποκοπής περιορίζει το διάστημα βάθους και επιτρέπει την **ιδανική** αξιοποίηση της ακρίβειας του καταχωρητή βάθους

Το Πεδίο Παράστασης

- Το **πεδίο παράστασης** είναι το ορθογώνιο τμήμα της οθόνης όπου απεικονίζονται τα **περιεχόμενα** του στερεού παρατήρησης
- Μπορεί να καταλαμβάνει και **ολόκληρη** την οθόνη
- Ένα πεδίο παράστασης ορίζεται συνήθως από την **κάτω αριστερή** και την **πάνω δεξιά** κορυφή του
  - $[x_{min}, y_{min}]^T$ και $[x_{max}, y_{max}]^T$, σε συντεταγμένες **εικονοστοιχείων**
  - ή $[x_{min}, y_{min}, z_{min}]^T$ και $[x_{max}, y_{max}, z_{max}]^T$, για τη **διατήρηση** της συντεταγμένης z

Μετασχηματισμός Πεδίου Παράστασης

- Ο **μετασχηματισμός πεδίου παράστασης** μετατρέπει αντικείμενα από τον ΚΧΟ στο σύστημα συντεταγμένων παραθύρου (ΣΣΘ)
- Περιλαμβάνει μια αλλαγή κλίμακας και μια μεταφορά:

$$\mathbf{M}^{\text{VIEWPORT}}_{\text{ΚΧΟ}\rightarrow\text{ΣΣΘ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x_{min}+x_{max}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_{min}+y_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z_{min}+z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_{max}-x_{min}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_{max}-y_{min}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}-z_{min}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Άρα:

$$\mathbf{M}^{\text{VIEWPORT}}_{\text{ΚΧΟ}\rightarrow\text{ΣΣΘ}} = \begin{bmatrix} \frac{x_{max}-x_{min}}{2} & 0 & 0 & \frac{x_{min}+x_{max}}{2} \\ 0 & \frac{y_{max}-y_{min}}{2} & 0 & \frac{y_{min}+y_{max}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}-z_{min}}{2} & \frac{z_{min}+z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός Πεδίου Παράστασης

- Αποτελεί μια **γενίκευση** του 2Δ μετασχηματισμού παράστασης
- Η συντεταγμένη z διατηρείται από τον μετασχηματισμό για χρήση σε **αλγορίθμους χώρου οθόνης** όπως είναι ο Z-buffer
- Αφού όλα τα περιεχόμενα του στερεού παρατήρησης εμφανίζονται στο πεδίο παράστασης, το μέγεθος του τελευταίου ορίζει το **τελικό μέγεθος** των αντικειμένων στην οθόνη
- Η επιλογή ενός **μεγάλου** πεδίου παράστασης (π.χ., ολόκληρη η οθόνη) θα **μεγαλώσει** τα αντικείμενα, ενώ ένα **μικρό** πεδίο παράστασης θα τα **μικρύνει**