Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πληροφορικής

Εισαγωγή στους Η/Υ

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

22 Μαΐου 2019
παράδοση μέχρι την τελική εξέταση (Ιουνίου ή Σεπτεμβρίου)

Άσκηση 1:

Έστω ένας δυαδικός αθροιστής επιλογής κρατουμένου (carry-select) των 32 bits, στον οποίο το μέγεθος των επιμέρους αθροιστών δεν είναι κατ' ανάγκη το ίδιο. Οι επιμέρους αθροιστές είναι αθροιστές διάδοσης κρατουμένου. Αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 5 επιμέρους αθροιστές, υπολογίστε το μέγεθος που πρέπει να έχει κάθε επιμέρους αθροιστής, ώστε να ελαχιστοποιείται ο χρόνος υπολογισμού του κρατουμένου εξόδου, υποθέτοντας ότι κάθε κύκλωμα πλήρους αθροιστή και κάθε κύκλωμα πολυπλέκτη επιφέρουν καθυστέρηση 2T στον υπολογισμό, όπου T είναι ο χρόνος καθυστέρησης μιας στοιχειώδους πύλης.

Άσκηση 2:

A. Έστω ένας δυαδικός αθροιστής παράκαμψης κρατουμένου (carry-skip) των 32 bits, που περιλαμβάνει 6 επιμέρους αθροιστές διάδοσης κρατουμένου, με εύρος κατά σειρά από λιγότερο προς περισσότερο σημαντικά τμήματα 4, 4, 6, 6, 8 και 4 bits. Αν κάθε κύκλωμα πλήρους αθροιστή του 1 bit, κάθε πύλη AND περισσότερων των 4 εισόδων και κάθε κύκλωμα πολυπλέκτη επιφέρουν καθυστέρηση 2T, ενώ κάθε άλλη λογική πύλη επιφέρει καθυστέρηση T στην εκτέλεση της πράξης, βρείτε τον ελάχιστο και το μέγιστο χρόνο υπολογισμού του κρατουμένου εξόδου και του πλήρους αθροίσματος ως συνάρτηση του T στον αθροιστή αυτό.

B. Δείξτε τις τιμές που προκύπτουν εσωτερικά στο κύκλωμα του πιο πάνω αθροιστή παράκαμψης κρατουμένου για εκτέλεση της πρόσθεσης των αριθμών 01011011001100111110110011001101 και 10010110011111000001101100110110. Ειδικότερα, δείξτε τις τιμές εισόδου και εξόδου σε κάθε κύκλωμα πλήρους αθροιστή του 1 bit, τις τιμές εισόδου και εξόδου στις πύλες AND και τις τιμές εισόδου και εξόδου σε όλους τους πολυπλέκτες του κυκλώματος. Να υπολογίσετε το χρόνο υπολογισμού του κρατουμένου εξόδου και του πλήρους αθροίσματος για τους συγκεκριμένους αριθμούς με βάση τις προαναφερθείσες στοιχειώδεις καθυστερήσεις.

Άσκηση 3:

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν μη επαναληπτικό αθροιστή 20 αριθμών των 64 bits, αγνοώντας κρατούμενα εξόδου ή σήματα υπερχείλισης. Σχεδιάστε δύο τέτοιους αθροιστές με τις ακόλουθες μεθόδους:

A. Χρησιμοποιήστε επιμέρους αθροιστές διάδοσης κρατουμένου (carry-propagate ή ripple-carry) των 64 bits για να προσθέτετε τους αριθμούς ανά δύο στον ελάχιστο δυνατό αριθμό επιπέδων διαδοχικής πρόσθεσης.

B. Χρησιμοποιήστε επιμέρους αθροιστές διατήρησης κρατουμένου (carry-save) των 64 bits και έναν αθροιστή πρόβλεψης κρατουμένου (carry-lookahead) των 64 bits για να προσθέσετε τα τελικά επιμέρους κρατούμενα με τα τελικά επιμέρους αθροίσματα. Ελαχιστοποιήστε τον αριθμό επιπέδων διαδοχικής πρόσθεσης διατήρησης κρατουμένου.

Για απλούστευση, μη σχεδιάσετε τους αθροιστές ανά bit, αλλά ανά λέξη των 64 bits, δείχνοντας μόνο το πώς οι επιμέρους αθροιστές πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους. Για κάθε περίπτωση, να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο καθυστέρησης για τον υπολογισμό του αθροίσματος. Για τον α-θροιστή πρόβλεψης κρατουμένου, υποθέστε ότι κάθε επίπεδο πρόβλεψης συνδυάζει 4 ψηφία που παράγονται από το προηγούμενο επίπεδο πρόβλεψης. Για όλες τις περιπτώσεις βρείτε το χρόνο καθυστέρησης σα συνάρτηση του χρόνου καθυστέρησης μιας στοιχειώδους λογικής πύλης, θεω-ρώντας ότι όλες οι στοιχειώδεις λογικές πύλες έχουν τον ίδιο χρόνο καθυστέρησης T.

Άσκηση 4:

Ο αλγόριθμος του Booth για πολλαπλασιασμό προσημασμένων αριθμών σταθερής υποδιαστολής αναπαράστασης συμπληρώματος ως προς 2 υλοποιείται με έλεγχο πολλαπλών διαδοχικών ψηφίων του πολλαπλασιαστή, οπότε μετά από κάθε έλεγχο ο αλγόριθμος προχωράει κατά N ψηφία (πχ. για έλεγχο 3 bits το βήμα N είναι ίσο με 2).

Α. Ξεκινώντας με την αλγεβρική έκφραση της τιμής ενός προσημασμένου αριθμού και μετασχη-ματίζοντάς την κατάλληλα, βρείτε τις σχέσεις από τις οποίες προκύπτει ο αλγόριθμος Booth για $N = 3$ και $N = 4$. Έτσι, αφού βρείτε τη μορφή τους, εφαρμόστε τις σχέσεις για τους δυνατούς συν-δυασμούς ψηφίων και καθορίστε για καθεμία από τις δύο περιπτώσεις τι πράξεις πρέπει να γίνονται σε κάθε επανάληψη, με βάση τις δυνατές τιμές των ψηφίων του πολλαπλασιαστή.

Β. Τι προεργασία χρειάζονται οι αλγόριθμοι πριν την πρώτη πράξη τους και τι σας λέει αυτό για την πρακτική υλοποίηση του αλγόριθμου Booth για $N \geq 3$;

Γ. Δοκιμάστε κατ' αρχήν τον αλγόριθμο Booth για $N = 1$ και $N = 2$ στους δύο αριθμούς των 16 bits X = 0110100110111011 και Y = 1100101111011001, για μια επαναληπτική μονάδα πολλα-πλασιασμού σταθερής υποδιαστολής με διαδοχικές προσθέσεις και ολισθήσεις που εκτελεί την πράξη $X \times Y$, όπου X ο πολλαπλασιαστέος και Y ο πολλαπλασιαστής, κατασκευάζοντας έναν πίνακα με τις τιμές των καταχωρητών της μονάδας σε κάθε φάση εκτέλεσης της πράξης. Η μονάδα βασίζεται στο βελτιωμένο υλικό με τον ενιαίο καταχωρητή Γινόμενο/Πολλαπλασιαστής, και με ΑΛΜ του ελάχιστου δυνατού εύρους.

Δ. Επαναλάβετε για τις δύο νέες περιπτώσεις $N = 3$ και $N = 4$.

Άσκηση 5:

Α. Θεωρήστε τον κλασικό αλγόριθμο διαίρεσης σταθερής υποδιαστολής, ο οποίος εκτελεί την α-φαίρεση του διαιρέτη από το μερικό υπόλοιπο, και ξαναπροσθέτει τον διαιρέτη όταν η αφαίρεση έχει αρνητικό αποτέλεσμα. Για τους μη προσημασμένους ακέραιους X = 1011001100010110 και Y = 0000010011011011, δείξτε πώς η κλασική μονάδα διαίρεσης με διαδοχικές αφαιρέσεις/προ-σθέσεις και ολισθήσεις εκτελεί την πράξη $X \div Y$, κατασκευάζοντας έναν πίνακα όπου δείχνονται οι τιμές των καταχωρητών της μονάδας σε κάθε φάση εκτέλεσης της πράξης.

Β. Σκεφτείτε μια βελτίωση του κλασικού αλγόριθμου διαίρεσης, με την οποία να μπορούμε να αποφύγουμε την παραπάνω πρόσθεση επαναφοράς, ενσωματώνοντάς την στις πράξεις της επόμε-νης επανάληψης. Σχεδιάστε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο με βάση τη βελτίωση αυτή, ο οποίος να εκτελεί μόνο μία πράξη αφαίρεσης/πρόσθεσης ανά επανάληψη, και επαληθεύστε τον για την προηγούμενη πράξη.

Γ. Μια άλλη εναλλακτική βελτίωση του κλασικού αλγόριθμου είναι η αφαίρεση να μην αποθηκεύει το αποτέλεσμά της στον καταχωρητή υπολοίπου, παρά μόνο αν αυτό προκύψει μη αρνητικό. Εξηγήστε γιατί η βελτίωση αυτή δεν είναι τόσο καλή όσο η προηγούμενη. Μολαταύτα, χρησιμοποιήστε την ιδέα αυτής της βελτίωσης για μια υλοποίηση στην οποία θα μπορείτε, κάνοντας παράλληλες αφαιρέσεις, και επιλέγοντας το «καλύτερο» αποτέλεσμα, να πάρετε δύο ψηφία πηλίκου σε κάθε επανάληψη. Εφαρμόστε το νέο αλγόριθμο στους προηγούμενους αριθμούς X και Y. Θα μπορούσε αυτή η τεχνική να εφαρμοστεί για να υπολογίζετε περισσότερα ψηφία πηλίκου ανά επανάληψη; Ποιο είναι το κύριο μειονέκτημα μιας τέτοιας προσέγγισης;

Άσκηση 6:

Θεωρήστε τους ακόλουθους αριθμούς κινητής υποδιαστολής:

$$X = 0.0100000011000101000000001_2 \times 2^{10}$$
$$Y = -0.0011011000000000010010000_2 \times 2^{9}$$
$$Z = -1.1010000010001010000000001_2 \times 2^{6}$$

όπου οι εκθέτες αναγράφονται σε δεκαδική βάση.

Α. Μετατρέψτε τους τρεις αριθμούς σε αναπαράσταση του προτύπου IEEE 754 απλής ακρίβειας.

Β. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο πρόσθεσης κινητής υποδιαστολής που περιγράφεται στο βιβλίο των Patterson-Hennessy για τον υπολογισμό X+Y. Δώστε το αποτέλεσμα πρώτα σε αναπαράσταση του προτύπου – όπως θα προκύψει από τον αλγόριθμο, και στη συνέχεια σε μια αλγεβρική αναπαράσταση όμοια με την αναπαράσταση των X, Y και Z που δίνεται παραπάνω. Να βγάλετε τέσσερα αποτελέσματα, ένα για κάθε έναν από τους τέσσερεις τρόπους στρογγυλοποίησης που περιγράφονται στο βιβλίο.

Γ. Εφαρμόστε τώρα τον αλγόριθμο πολλαπλασιασμού κινητής υποδιαστολής που περιγράφεται στο βιβλίο των Patterson-Hennessy για τον υπολογισμό X*Y, χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό αλγόριθμο Booth βήματος N = 2 για τον πολλαπλασιασμό σταθερής υποδιαστολής. Και πάλι δώστε το αποτέλεσμα σε δύο αναπαραστάσεις, με ένα αποτέλεσμα για κάθε έναν από τους τέσσερεις τρόπους στρογγυλοποίησης.

Δ. Υπολογίστε στη συνέχεια την έκφραση πολλαπλασιασμού-πρόσθεσης X*Y+Z, εκτελώντας δύο ανεξάρτητες επιμέρους πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης κινητής υποδιαστολής, σύμφωνα με τα παραπάνω ερωτήματα, και δώστε το τελικό αποτέλεσμα σε δύο αναπαραστάσεις, με ένα αποτέλεσμα για κάθε έναν από τους τέσσερεις τρόπους στρογγυλοποίησης του γινομένου και του αθροίσματος.

Ε. Επαναλάβετε τον υπολογισμό του προηγούμενου ερωτήματος, με τη διαφορά ότι τώρα καλείστε να υλοποιήσετε μια συγκερασμένη πράξη, η οποία βασίζεται μεν στους δύο αλγόριθμους πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης κινητής υποδιαστολής, όμως τους ενοποιεί σε έναν ενιαίο αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος αυτός καταργεί τη στρογγυλοποίηση του πολλαπλασιασμού, διατηρώντας όλα τα ψηφία που προκύπτουν από αυτόν για να προχωρήσει στην πρόσθεση. Και πάλι εκτελέστε τις επιμέρους πράξεις σύμφωνα με τα παραπάνω ερωτήματα, και δώστε το τελικό αποτέλεσμα σε δύο αναπαραστάσεις, με ένα αποτέλεσμα για κάθε έναν από τους τέσσερεις τρόπους στρογγυλοποίησης του αθροίσματος.

Υπενθύμιση: Οι ασκήσεις παραδίνονται μόνο χειρόγραφες.