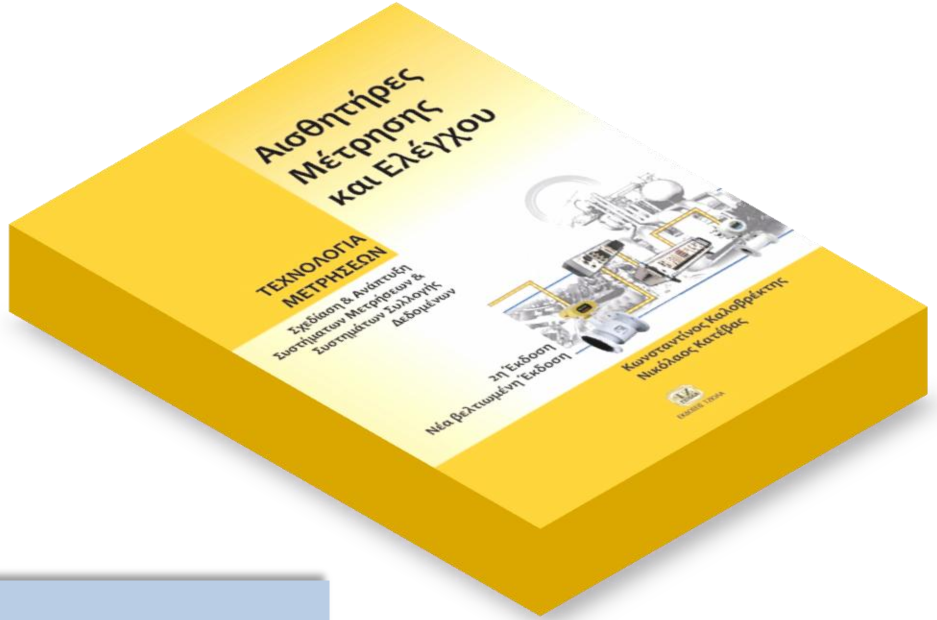
1

Θεμελιώδεις έννοιες συστημάτων μέτρησης



Οι διαφάνειες αποτελούν υλικό του βιβλίου:

Αισθητήρες Μέτρησης και Ελέγχου

Τεχνολογία μετρήσεων

2η Αναθεωρημένη Έκδοση

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 22694842

Έκδοση: 2η Έκδοση/2013

ISBN: 978-960-418-386-9

Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

Μονάδες μέτρησης

Το διεθνές σύστημα μονάδων:

✓ορίζει επτά (7) *Θεμελιώδεις Μονάδες*, και δύο *Συμπληρωματικές Μονάδες*.

Θεμελιώδεις μονάδες

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο
Μάζα	Kg (kilogramme/χιλιόγραμμο)
Μήκος	m (meter/μέτρο)
Χρόνος	s (second/δευτερόλεπτο)
Ένταση Ηλεκτρικού Ρεύματος	A (Amper/Αμπέρ)
Θερμοκρασία	K (Kelvin/βαθμός Κέλβιν))
Ποσότητα Ουσίας	mol (mol/μολ)
Ένταση Φωτεινής Ακτινοβολίας	Cd (candela/ καντέλα)

Συμπληρωματικές μονάδες

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο
Επίπεδη Γωνία	rad (radian / ακτίνιο)
Στερεά Γωνία	sr (steradian / στερακτίνιο)

Θεμελιώδεις και Συμπληρωματικές Μονάδες στο S.I.

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο	Ορισμός
Μάζα	Kg	Το χιλιόγραμμο (kg) ορίζεται ως η μάζα κυλίνδρου ύψους 39,17 mm και διαμέτρου 39,17 mm από κράμα ιριδίου (10%) και λευκόχρυσου (90%).
Μήκος	m	Το μέτρο (m) ορίζεται ως η απόσταση την οποία διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα ίσο με 1/299.792.458 δευτερόλεπτα.
Χρόνος	s	Το δευτερόλεπτο (s) ορίζεται ως η χρονική διάρκεια 9.192.631.770 περιόδων ακτινοβολίας τις ατόμου Καισίου 133 σε θερμοκρασία 0 K.
Ένταση Ηλεκτρικού Ρεύματος	A	Το Αμπέρ (A) ορίζεται ως το σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο όταν διαρρέει σε δύο ευθύγραμμους και παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους και αμελητέας διατομής, τοποθετημένους σε απόσταση 1 μέτρου μεταξύ τους στο κενό, θα παραχθεί μεταξύ αυτών των αγωγών μία δύναμη ίση με $2x10^{7}$ Νιούτον ανά μέτρο μήκους.

Συνέχεια…

Θεμελιώδεις και Συμπληρωματικές Μονάδες στο S.I.

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο	Ορισμός
Θερμοκρασία	K	Το απόλυτο μηδέν (0) στην κλίμακα Κέλβιν (0 ^{o}K) ορίζεται ως το 1/273,15 της θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.
Ποσότητα Ουσίας	mol	Το μολ (mol) ορίζεται ως η ποσότητα της ουσίας που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες όσα είναι τα άτομα σε 0,012 χιλιόγραμμα καθαρού Άνθρακα-12 (12C).
Ένταση Φωτεινής Ακτινοβολίας	Cd	Η καντέλα (Cd) ορίζεται ως η ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας, προς μία δεδομένη διεύθυνση, μιας μονοχρωματικής φωτεινής πηγής που εκπέμπει ακτινοβολία με συχνότητα 540 x 10^{12} Hz και έχει ένταση ακτινοβολίας στην κατεύθυνση αυτή ίση με 1/683 Watt ανά στερακτίνιο.
Επίπεδη Γωνία	rad	Το ακτίνιο (rad) ορίζεται ως η επίπεδη γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη ορίζει τόξο, σε οποιοδήποτε κύκλο, με μήκος ίσο με την ακτίνα του.
Στερεά Γωνία	sr	Το στερακτίνιο (sr) ορίζεται ως η στερεά γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη ορίζει επιφάνεια σφαίρας, σε οποιαδήποτε σφαίρα, με εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο της ακτίνας της.

Παράγωγες μονάδες

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο	Ορισμός	Μονάδες
Δύναμη	N	Μάζα Επιτάχυνση	kg m/s^2
Ενέργεια ή Έργο	J	Δύναμη Μήκος	N m
Ισχύς	W	Έργο / Χρόνος	J/s
Ταχύτητα	v	Μήκος / Χρόνος	m/s
Επιτάχυνση	α	Μήκος / Χρόνος^2	m/s^2
Πίεση	P	Δύναμη / Επιφάνεια	N/m^2
Ροπή	τ	Δύναμη Μήκος	N m
Πυκνότητα	ρ	Μάζα / Όγκος	kg/m^3
Ειδικό βάρος	SG	Δύναμη/ Όγκος	N/m^3

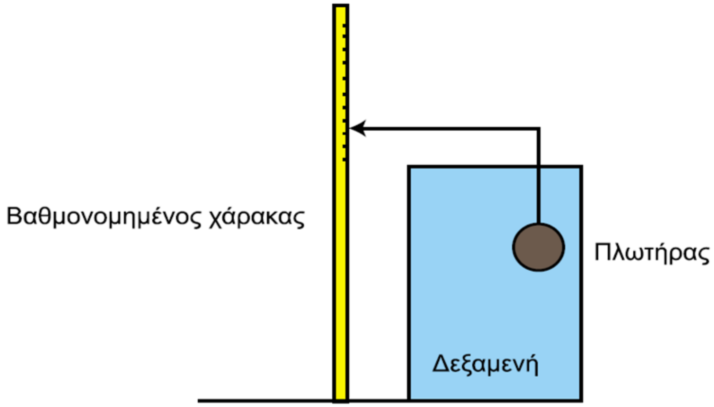
Ηλεκτρικά μεγέθη

Φυσικό Μέγεθος	Διεθνές Σύμβολο	Ορισμός	Μονάδες
Ηλεκτρική Τάση	V (Volt / Βολτ)	Ισχύς / Ρεύμα	W/A
Συχνότητα	Hz (Hertz / Χερτζ)	1 / Χρόνος	1/s
Ηλεκτρικό Φορτίο	Cb (Coulomb / Κουλόμπ)	Ρεύμα x Χρόνος	A x s
Ηλεκτρική Αντίσταση	Ω (Ohm / Ωμ)	Τάση / Ρεύμα	V/A
Χωρητικότητα	F (Farad / Φαράντ)	Φορτίο / Τάση	Cb/V
Επαγωγή	H (Henry / Ανρί)	Wb/ Ρεύμα (Wb=Vxs)	(V x s) / A

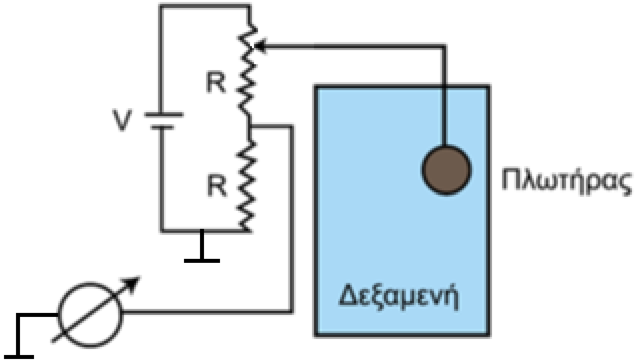
Συστήματα μετρήσεων

- ✓ Παθητικά και ενεργά συστήματα μετρήσεων
- ✓ Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα μετρήσεων
- ✓ Στατικά και δυναμικά συστήματα μετρήσεων
- ✓ Συνεχή και διακριτά συστήματα μετρήσεων
- ✓ Χρονομεταβλητά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα μετρήσεων

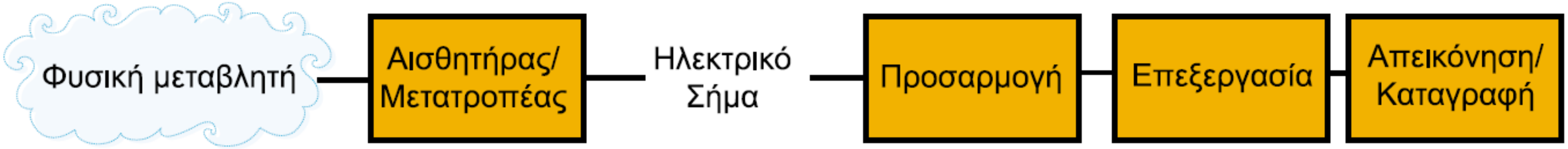
Διάταξη παθητικού συστήματος μέτρησης



Διάταξη ενεργού συστήματος μέτρησης

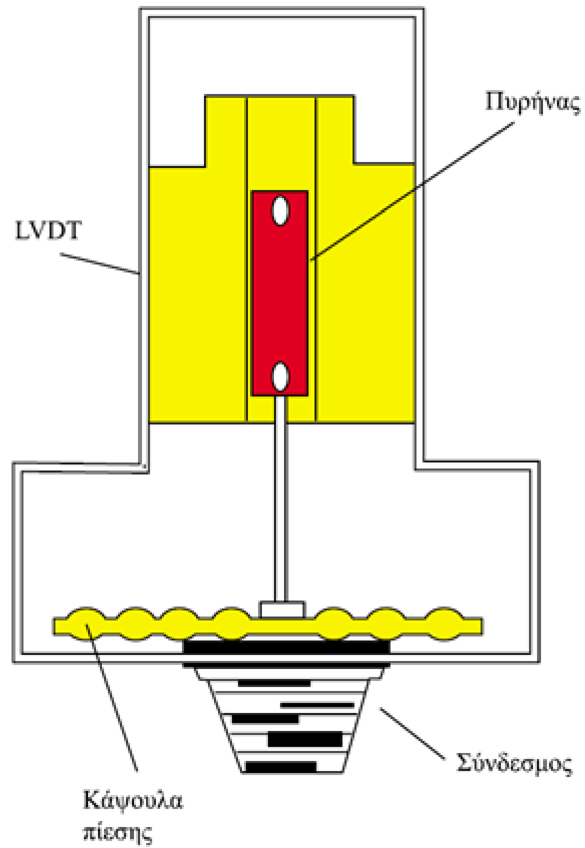


Δομή συστημάτων μέτρησης



Μορφοτροπέας (transducer)

Μονάδα η οποία μετατρέπει μία μορφή ενέργειας σε μία άλλη.



Μορφομετατροπέας μέτρησης πίεσης

Μοντελοποίηση συστημάτων μέτρησης

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots \underbrace{a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{a_1\frac{dx}{dt} + \overbrace{a_0 x = f(t)}^{\text{Συστημαμηδενικήςτάξης}}}_{\text{Σύστημα πρώτης τάξης}}}_{\text{Σύστημαδεύτερηςτάξης}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς στο πεδίο συχνοτήτων αποτελεί το λόγο της μετασχηματισμένης εξόδου προς την μετασχηματισμένη είσοδο του συστήματος, πάντα με μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη χρονική απόκριση και την απόκριση συχνότητας συστήματος:

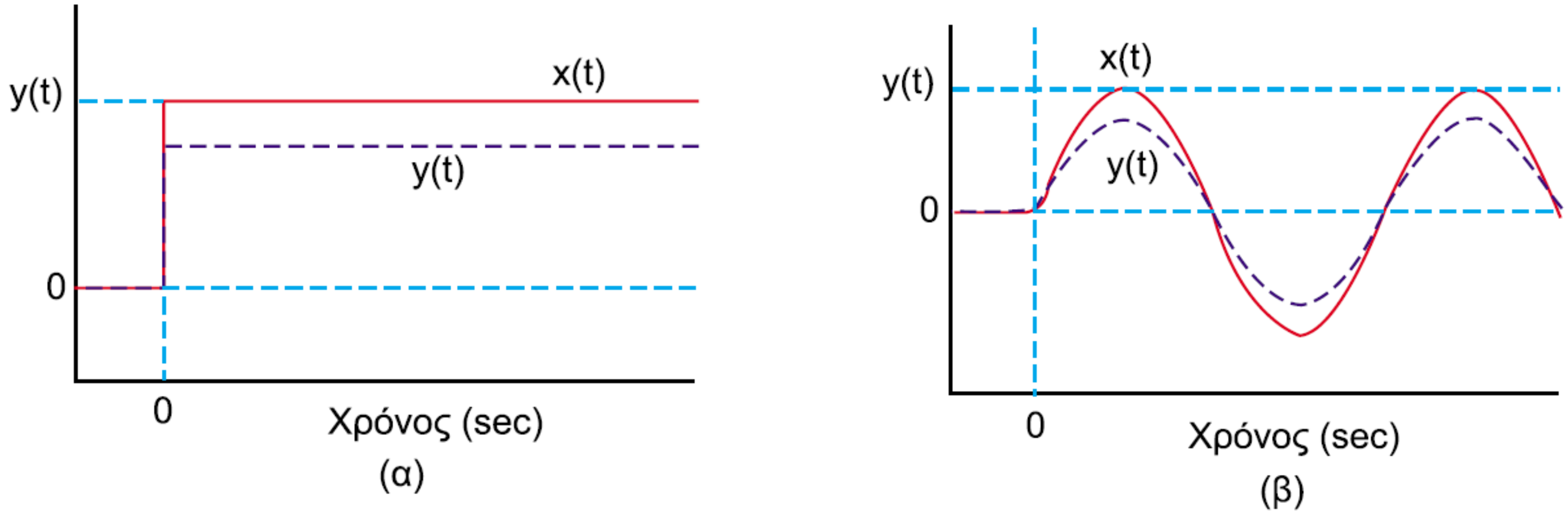
- ✓ **μηδενικής τάξης**
- ✓ **πρώτης τάξης**
- ✓ **δεύτερης τάξης**

Σύστημα μηδενικής τάξης

$$\boxed{a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + \overbrace{a_0 x = f(t)}^{\Sigma\upsilon\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος μηδενικής τάξης περιγράφεται κατά Laplace από τη σχέση:

$$\boxed{H(s) = 1}$$



Απόκριση συστήματος μηδενικής τάξης με είσοδο: α) βηματικής και β) ημιτονοειδής συνάρτησης εισόδου

Σύστημα πρώτης τάξης

Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος πρώτης τάξης

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + \underbrace{a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)}_{\text{Σύστημα πρώτης τάξης}}$$

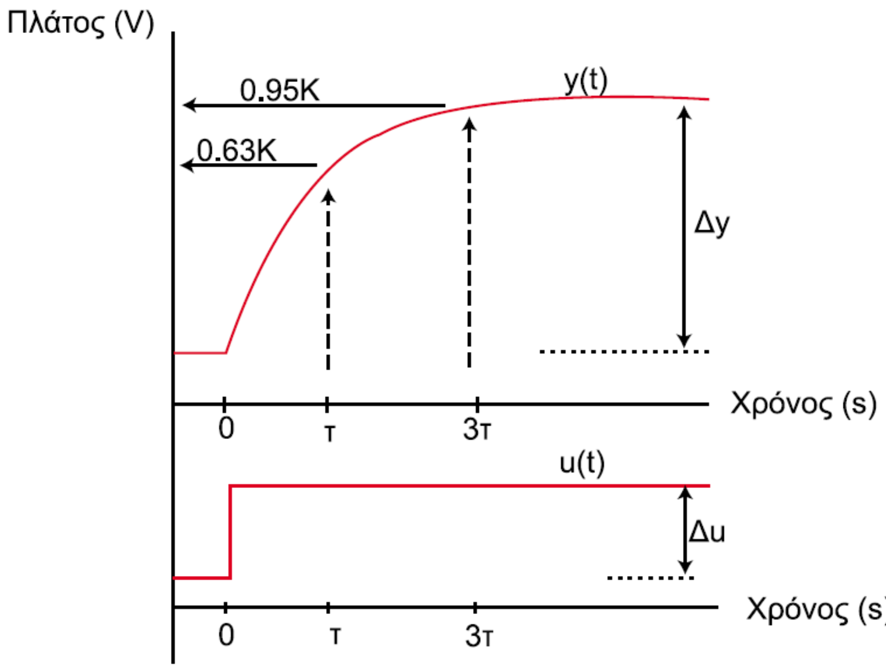
Μέσω του μετασχηματισμού Laplace:

$$H(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

K : η στατική ευαισθησία του συστήματος ή κέρδος σταθερής κατάστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Γραφικός προσδιορισμός της στατικής ευαισθησίας



Χρονική απόκριση συστήματος πρώτης τάξης

Η έξοδος του συστήματος με εφαρμογή εισόδου βηματικής συνάρτησης γίνεται:

$$\boxed{Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s}}$$

Η έξοδος του συστήματος προκύπτει από την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (L^{-1}):

$$\boxed{y(t) = \underbrace{uK(1 - e^{t/\tau})}_{\text{Μεταβατική κατάσταση}} + \underbrace{uK}_{\text{Μόνιμη κατάσταση}}}$$

όπου:

K: η στατική ευαισθησία του συστήματος ή κέρδος σταθερής κατάστασης,

τ: σταθερά χρόνου, και

u: πλάτος σήματος της μοναδιαίας βηματικής διέγερσης.

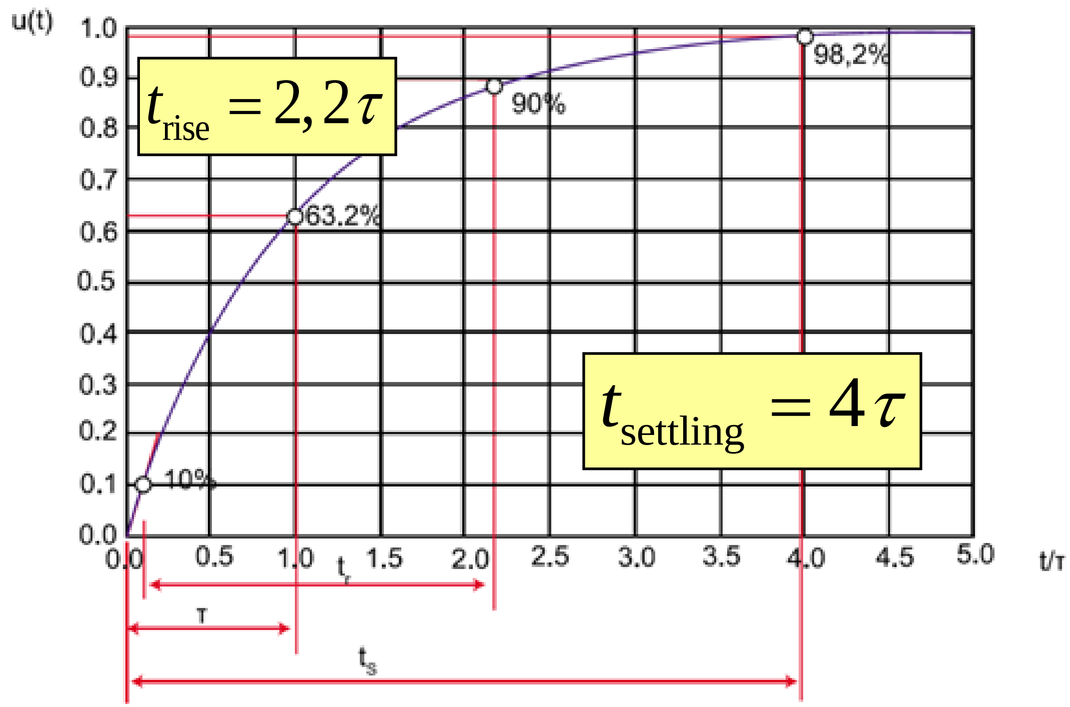
Προσδιορισμός χρονικών μεγεθών κατά τη μεταβατική κατάσταση

Σταθερά χρόνου (τ): u(t) στο 0,632 ή 63.2% της διέγερσης από τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Χρόνος αποκατάστασης (settling time): u(t) να παραμείνει στη μόνιμη κατάσταση με απόκλιση 2%.

Χρόνος ανύψωσης (rise time): u(t) από 10% στο 90% της τελικής της τιμής.

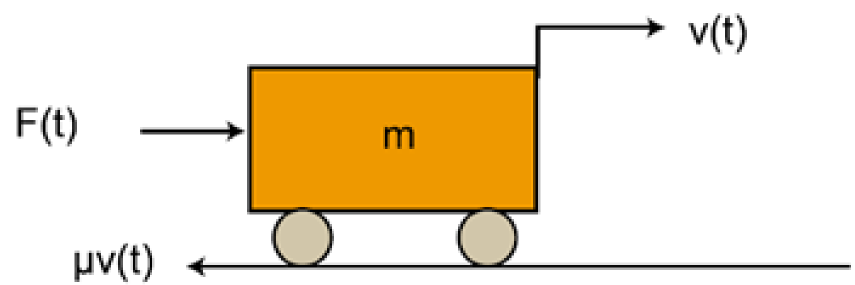
$$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha\ \varepsilon\xi\acute{o}\delta o\upsilon = e^{-t/\tau}$$



Παράδειγμα τυπικού μηχανικού συστήματος πρώτης τάξης

$$\underbrace{a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)}_{\Sigma \acute{\upsilon} \sigma \tau \eta \mu \alpha \;\; \pi \rho \acute{\omega} \tau \eta \varsigma \;\; \tau \acute{\alpha} \xi \eta \varsigma}$$

$$\underbrace{m \frac{dv(t)}{dt} + \mu v(\tau) = F(t)}_{\Sigma \acute{\upsilon} \sigma \tau \eta \mu \alpha \;\; \pi \rho \acute{\omega} \tau \eta \varsigma \;\; \tau \acute{\alpha} \xi \eta \varsigma}$$



Απόκριση συχνότητας συστήματος πρώτης τάξης

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KA}{1+\omega^2\tau^2}\tau e^{-t/\tau}}_{\text{Μεταβατική κατάσταση}} + \underbrace{\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega\tau+\varphi)}_{\text{Μόμινη κατάσταση}}$$

Μετά από χρόνο:

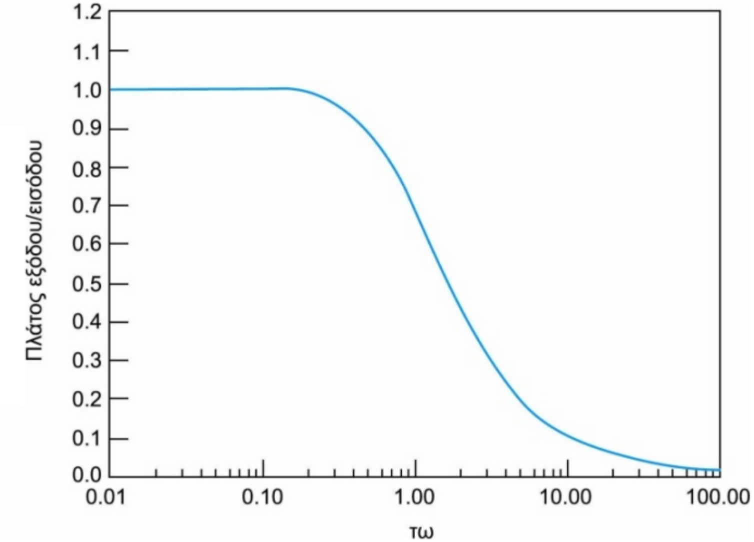
$$t = \infty$$

$$y(t) = \left(\frac{KA}{1+\omega^2\tau^2}\right)\left(\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\sin(\omega\tau+\varphi)\right) = \left(\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right)\sin(\omega\tau+\varphi)$$

Ο συντελεστής $M = \dfrac{KA}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ προσδιορίζει το πλάτος του σήματος εξόδου.

Η διαφορά φάσης δίνετε:

$$\varphi = \tan^{-1}(-\omega t)$$



Απόκριση M(ω) σε σύστημα πρώτης τάξης

Συστήματα δεύτερης τάξης

Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος δεύτερης τάξης

ζ: ο συντελεστής απόσβεσης του συστήματος.

- ✓Κατάσταση δίχως απόσβεση.
- ✓Κατάσταση με ύπο-απόσβεση.
- ✓Κατάσταση κρίσιμής απόκρισης.
- ✓Κατάσταση υπερ-απόσβεσης.

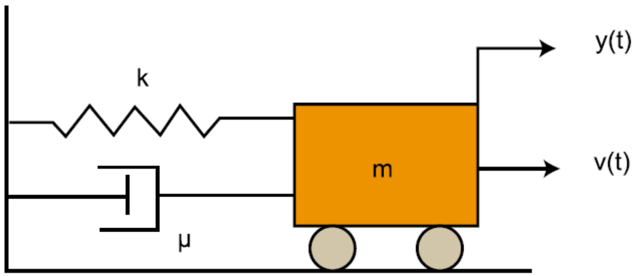
$$H(s) = \frac{K\omega_n^{\;2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\;2}}$$

ω: η φυσική συχνότητα ή ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

K: Η στατική ευαισθησία του συστήματος ή κέρδος σταθερής κατάστασης.

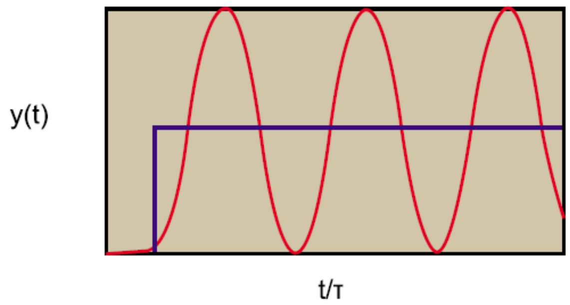
Παράδειγμα τυπικού μηχανικού συστήματος δεύτερης τάξης

$$\underbrace{a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)}_{\textit{Σύστημα δεύτερης τάξης}} \Leftrightarrow \underbrace{m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu v \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = v(t)}_{\textit{Σύστημα δεύτερης τάξης}}$$



Χρονική απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης

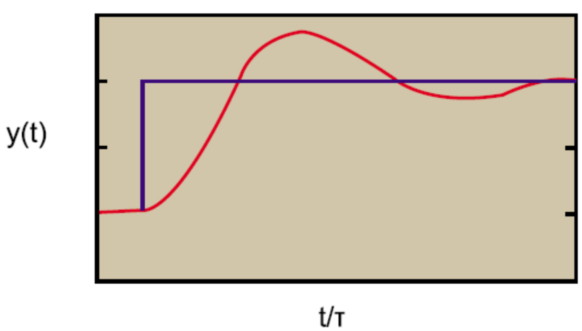
Για $\boxed{\zeta = 0}$ το σύστημα δεν παρουσιάζει απόσβεση (Undamped)



$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

Απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης δίχως απόσβεση

Για πεδίο τιμών $\boxed{0 \leq \zeta \leq 1}$ το σύστημα οδηγείται σε υπο-απόσβεση (Underdamped)

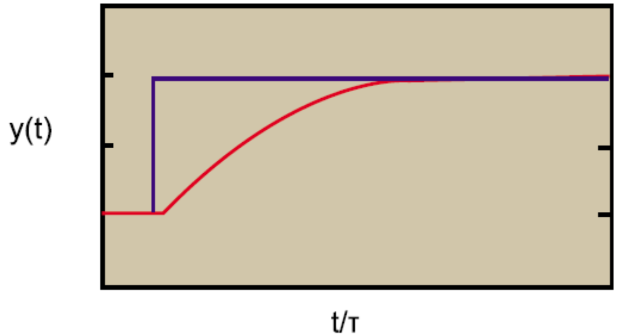


$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \varphi_0\right)$$

$$\phi_0 = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

Απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης με υπο-απόσβεση

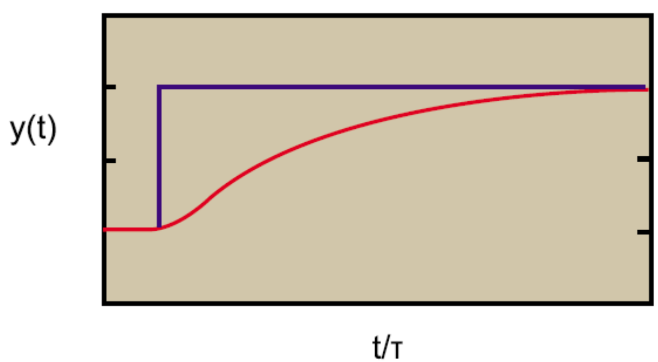
Για τιμή $\zeta = 1$ το σύστημα οδηγείται κρίσιμη απόκριση (Critically damped)



$$y(t) = 1 - (1 - \omega_n t) e^{-\omega_n t}$$

Απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης σε κρίσιμη απόσβεση

Για τιμή $\zeta > 1$ το σύστημα οδηγείται σε υπερ-απόσβεση (Overdamped)



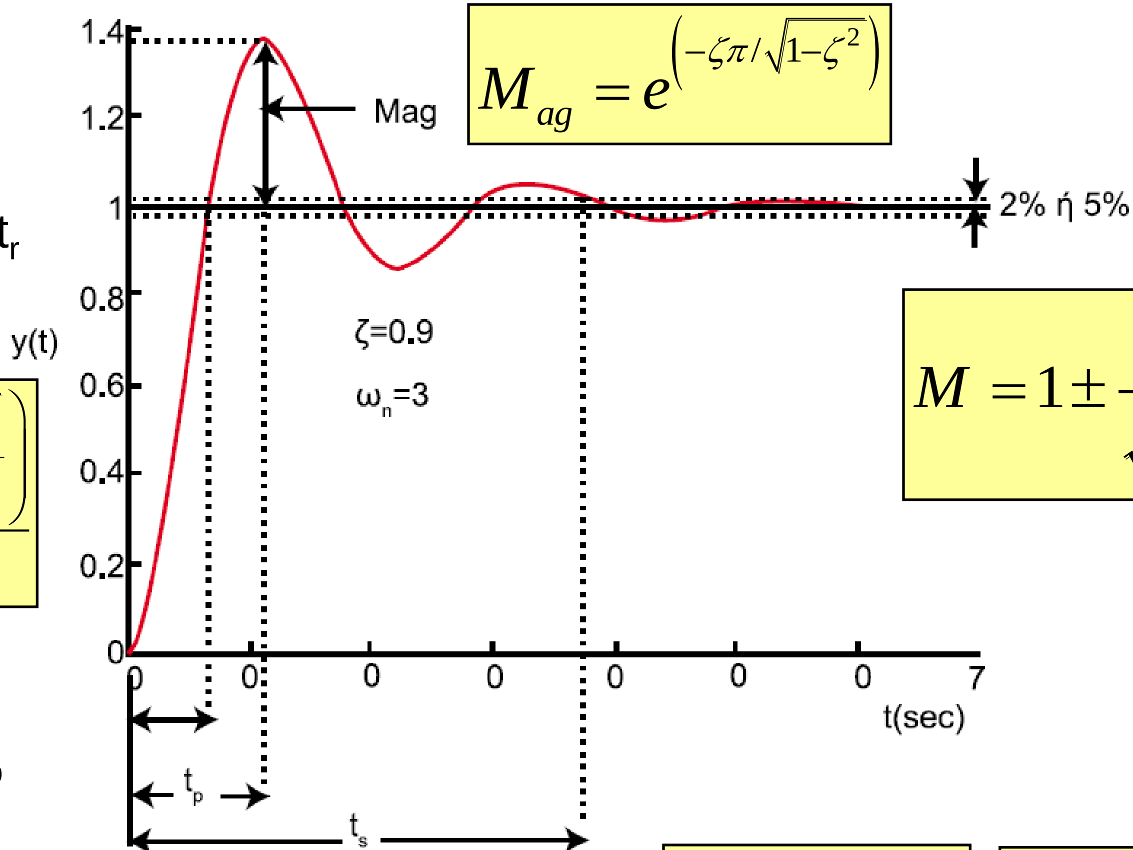
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cosh(\omega_n t \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right)$$

Απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης σε υπερ-απόσβεση

Χρονικά μεγέθη κατά τη μεταβατική κατάσταση σε σύστημα δεύτερης τάξης

Πλάτος υπερύψωσης (M_{ag})

$$M_{ag} = e^{\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$$



Χρόνος ανύψωσης t_r (rise time)

$$t_r = \frac{\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M = 1 \pm \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Χρόνος κορυφής t_p (peak time)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Χρόνος αποκατάστασης t_s (settling time)

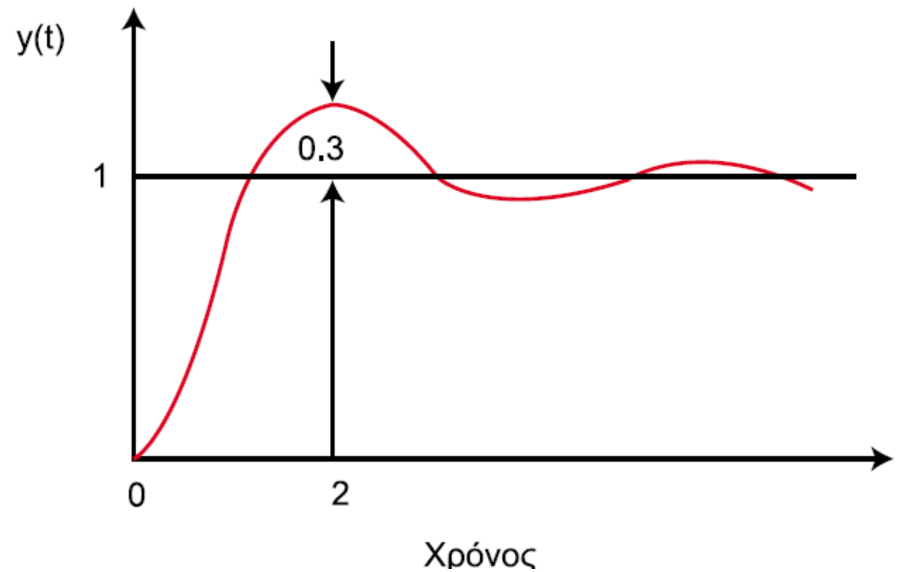
$$t_{st(2\%)} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$t_{st(5\%)} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Παράδειγμα

Για το παρακάτω σύστημα δεύτερης τάξης να υπολογιστεί: ο συντελεστής απόσβεσης, και η φυσική συχνότητα του συστήματος.

$$H(s)=\frac{K}{\tau s^2+s+K}$$



Απάντηση

$$Mag=e^{\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}=e^{-1.20}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}=1,20\Rightarrow\zeta=0,357$$

Ο χρόνος κορυφής t_p που απαιτείται για να μεταβεί η απόκριση στην πρώτη κορυφή της ταλάντωσης δίνετε 2.

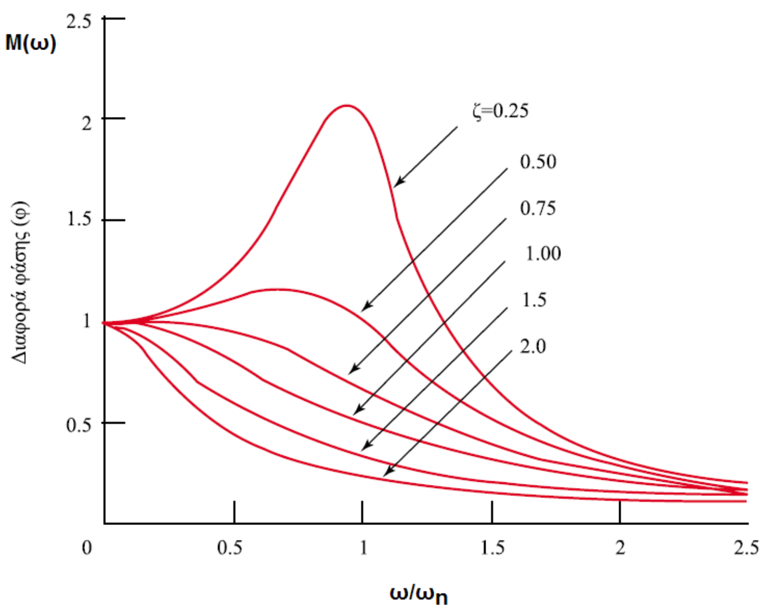
οπότε :

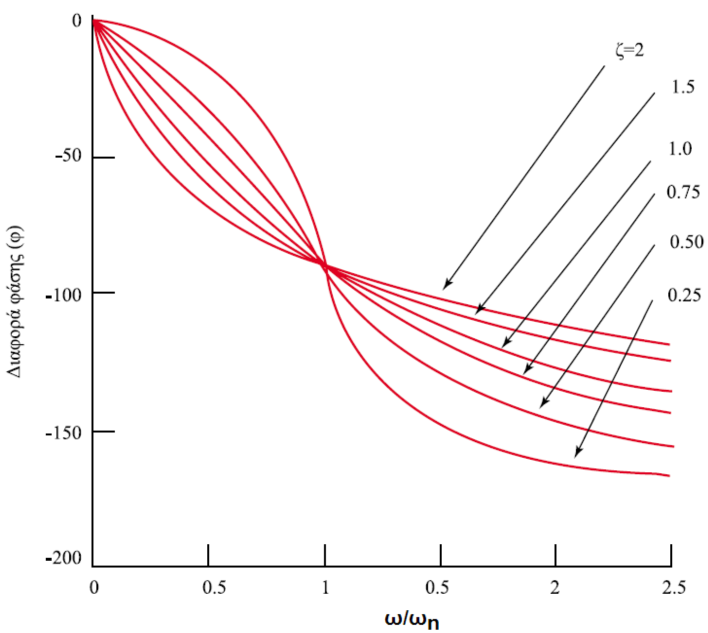
$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\Rightarrow 2=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0,357^2}}=2\Rightarrow\omega_n=1,68rad/s$$

Απόκριση συχνότητας συστήματος δεύτερης τάξης

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$$

Απόκριση μέτρου για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης (ζ)





Διαφορά φάσης για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης (ζ)

Διαγράμματα Bode

Βήματα σχεδίασης διαγραμμάτων Bode

Σχεδίαση διαγράμματος μέτρου απόκρισης συχνοτήτων

I. Τροποποιούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$H(s) = K\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0} \Rightarrow H(s) = K\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdot\dots(s+z_n)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdot\dots(s+p_n)}$$

και απλοποιούμε ώστε όλοι οι όροι να είναι της μορφής: $\boxed{\left(\frac{s}{x}+1\right)}$

II. Υπολογίζουμε την απολαβή K του συστήματος.

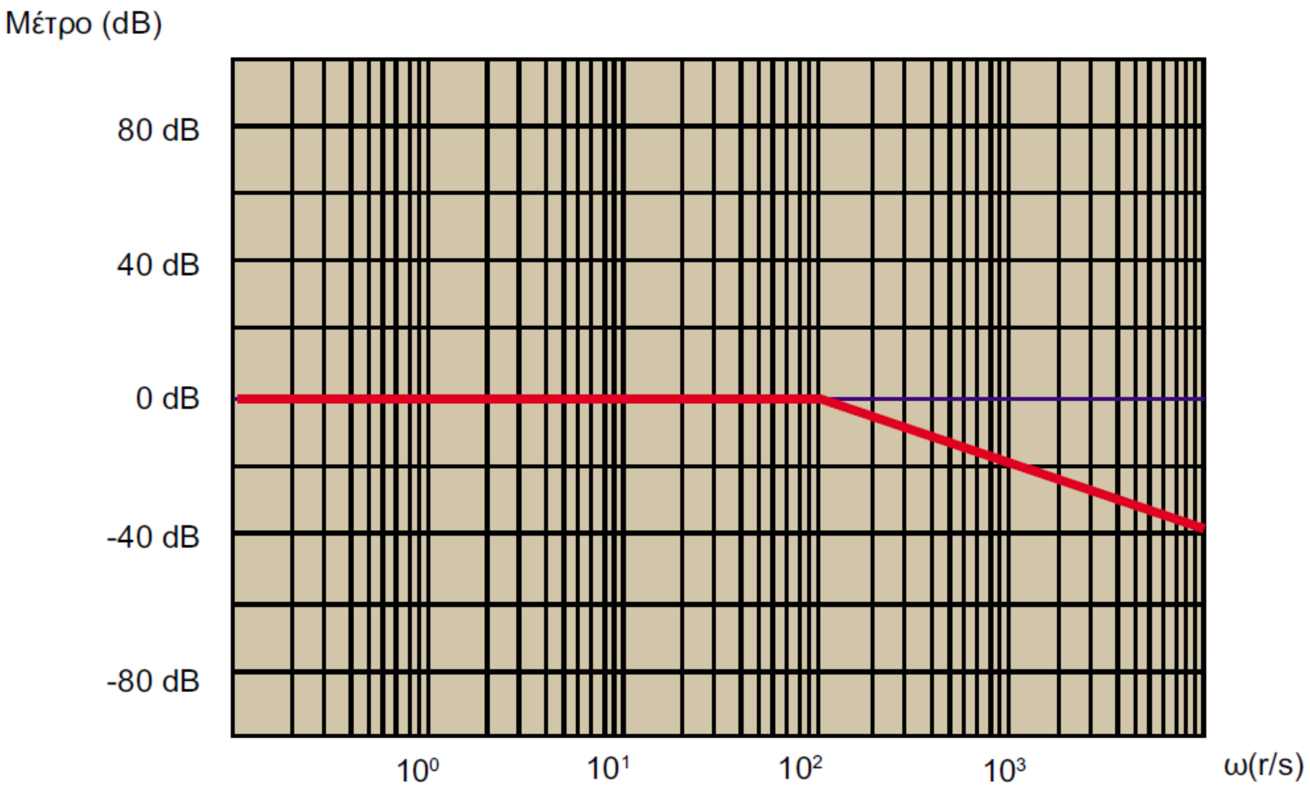
III. Παρατηρούμε τα μηδενικά και τους πόλους:

- H(s)= s zero at origine $\Rightarrow$ Θετική κλίση 20dB/δεκ.
- H(s)= 1/s pole at origine $\Rightarrow$ Αρνητική κλίση 20dB/δεκ.

Παράδειγμα

Ο όρος $\left(\dfrac{s}{100}+1\right)$ προσδιορίζει τον πόλο στο σημείο ω=100

Η συχνότητα αυτη καλείται *κρίσιμη* συχνότητα (critical frequency/break frequency).



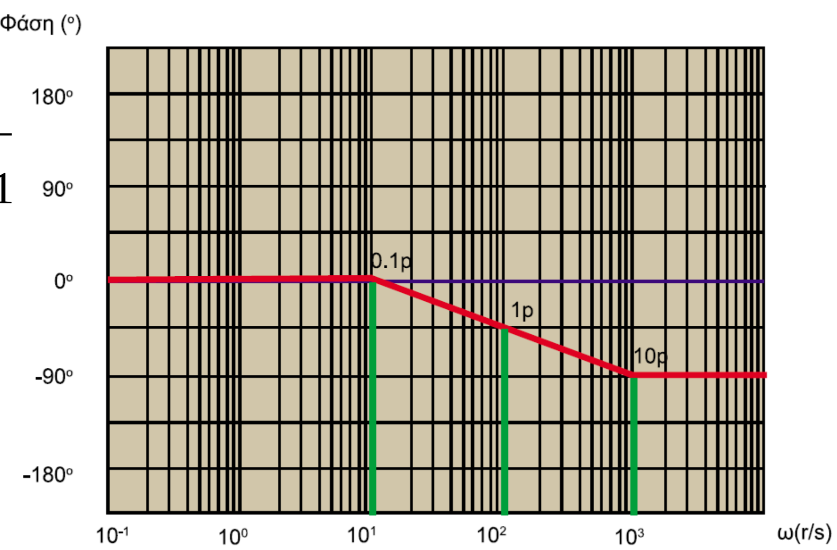
Σχεδίαση διαγράμματος απόκρισης φάσης

- ✓ Όταν η σταθερά Κ είναι θετικός αριθμός τότε δεν εισέρχεται καμία διαφορά φάσης.
- ✓ Όταν η σταθερά Κ είναι αρνητικός αριθμός τότε εισέρχεται διαφορά φάσης 180^0
- ✓ Πολλαπλασιασμός του αριθμητή με s (zero at origin) εισάγει διαφορά φάσης +90 μοίρες
- ✓ Πολλαπλασιασμός του παρονομαστή με s (pole at origin) εισάγει διαφορά φάσης -90 μοίρες
- ✓ Κάθε πραγματικό μηδενικό παρουσιάζει διαφορά φάσης 0 έως $+90^0$ μεταξύ των σημείων: 0,1z - 1 z - 10z
- ✓ Κάθε πραγματικός πόλος παρουσιάζει διαφορά φάσης 0 έως -90^0 μεταξύ των σημείων: 0,1p - 1p - 10p

Παράδειγμα

$$H(s)=\frac{1}{s+100}=\frac{1}{100\left(\frac{s}{100}+1\right)}=\frac{0,01}{\frac{s}{100}+1}=0,01\frac{1}{\frac{s}{100}+1}$$

Το σύστημα παρουσιάζει διαφορά φάσης 0^0 έως 90^0 για ω=100, σύμφωνα με τη θεώρηση: 0,1p- 1p-10p μεταξύ των σημείων: 10ω – 100ω - 1000ω.



Ερωτήσεις