Κεφάλαιο 8

Κ Α Ν Ο Ν Ι Κ Ε Σ Μ Ο Ρ Φ Ε Σ

8.1 Διαγωνοποίηση πίνακα

Ορισμός 8.1α

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ονομάζεται* ***διαγωνοποιήσιμος*** *στο* $\mathbb{F}$ *αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* $P \in M_n(\mathbb{F})$ *τέτοιος ώστε ο πίνακας* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

Αν ισχύει ο Ορισμός 8.1α, τότε λέμε ότι εφαρμόζεται μια διαγωνοποίηση στον πίνακα A και γράφουμε

$$\text{(i)} \quad \Delta = P^{-1}AP \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad \text{(ii)} \quad A = P\Delta P^{-1} \tag{8.1}$$

όπου $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγώνιος πίνακας. Είναι φανερό ότι, η ισότητα (i) στην (8.1) είναι ακριβώς ο ορισμός ομοιότητας των πινάκων A, Δ , γι΄ αυτό συχνά χρησιμοποιούμε αυτόν ως ισοδύναμο ορισμό διαγωνοποίησης πίνακα, ο δε πίνακας P ονομάζεται ***πίνακας ομοιότητας***.

Ορισμός 8.1β

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ονομάζεται* ***διαγωνοποιήσιμος*** *αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.*

Παράδειγμα 8.1 i) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, διότι υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{F}$.

Πράγματι, αν είναι διαγωνοποιήσιμος σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1α, πρέπει να υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας, έστω $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$, για τον οποίο ισχύει η

(8.1). Ο πίνακας P^{-1} υπολογίζεται σύμφωνα με την Εφαρμογή 1.4, οπότε κάνοντας τις πράξεις έχουμε :

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}P=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad+cd-bc & d^2\\ -c^2 & ad-cb-cd\end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο στην περίπτωση $d=c=0$, αλλά τότε $\det P=0$, το οποίο είναι αδύνατο, επειδή θεωρήσαμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.

Μια άλλη απόδειξη παρουσιάζεται στην Εφαρμογή 8.8 (iv).

iii) Θεωρούμε τον πίνακα $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Ο πίνακας E **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος όταν θεωρηθεί στοιχείο του $M_2(\mathbb{R})$. Πράγματι, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αν θεωρήσουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, από την (8.1) προκύπτει

$$P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}P=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ab+cd & b^2+d^2\\ -a^2-c^2 & -ab-cd\end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο στην περίπτωση $a=b=c=d=0$, αλλά τότε ισχύει $\det P=0$, που είναι αδύνατο, επειδή θεωρήσαμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.[1]

Όμως ο πίνακας E **διαγωνοποιείται** αν θεωρηθεί ως στοιχείο του $M_2(\mathbb{C})$. Πράγματι, εύκολα επαληθεύεται η σχέση $P^{-1}EP=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$, όπου $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$. ◆◆◆

Ένα εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι: πως σκεπτόμαστε και κατασκευάζουμε το συγκεκριμένο πίνακα P, ώστε να είναι αντιστρέψιμος και να επαληθεύει την (8.1). Η απάντηση βρίσκεται στην επόμενη πρόταση.

---

[1] Στα επόμενα, αποδεικνύεται ότι η διαγωνοποίηση ενός πίνακα σχετίζεται με τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα (Πρόταση 8.1). Όπως έχει αναφερθεί στο Παράδειγμα 7.1, ο πίνακας E δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα επί του $\mathbb{R}$, άρα δε διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$, το οποίο αποτελεί έναν άλλο τρόπο απόδειξης.

Πρόταση 8.1

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη : Θέτουμε P τον $n \times n$ πίνακα με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ και Δ το $n \times n$ διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του πίνακα A. Παρατηρούμε ότι

$$AP = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

και

$$P\Delta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή, υπάρχει P αντιστρέψιμος, έτσι ώστε να ισχύει η (8.1) (ii), $A = P\Delta P^{-1}$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση επί P καταλήγουμε στην $AP = P\Delta$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα πινάκων με τις (8.2), (8.3) συμπεραίνουμε ότι ισχύει :

$$(A\boldsymbol{x}_1 \quad A\boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\boldsymbol{x}_n) \tag{8.4}$$

Από την (8.4) προκύπτει

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i, \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, n. \tag{8.5}$$

Επειδή ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (Πρόταση 5.12) και μη μηδενικά. Επιπλέον, από την (8.5) είναι φανερό ότι, τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ είναι ιδιοδιανύσματα των αντίστοιχων ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του πίνακα A.

Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ότι τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας P, που κατασκευάζεται με στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 5.12), και επιπλέον ισχύει η (8.5) ή η ισοδύναμη ισότητα (8.4). Επειδή ισχύει η (8.4) συμπεραίνουμε ότι τα πρώτα μέλη των (8.2) και (8.3) είναι ίσα, συνεπώς

$$AP = P\Delta \ \Rightarrow \ A = P\Delta P^{-1},$$

άρα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (Ορισμός 8.1β). ◆◆◆

Η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης στηρίζεται στην κατασκευή ενός πίνακα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A και ενός διαγώνιου πίνακα $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές (λαμβάνεται υπόψη η αλγεβρική πολλαπλότητα). Αυτή είναι και η βασική ιδέα του επόμενου αλγορίθμου, τον οποίο εφαρμόζουμε, όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε μία διαγωνοποίηση του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Αλγόριθμος 8.1

Διαγωνοποίηση του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$

Βήμα 1 Υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A, οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Βήμα 2 Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, υπολογισμός μίας βάσης του αντίστοιχου ιδιοχώρου, λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Βήμα 3 Έστω το σύνολο $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$, το οποίο συγκεντρώνει όλα τα διανύσματα των βάσεων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2.

- Αν $r \neq n$, τότε ο πίνακας A δε διαγωνοποιείται.

Βήμα 4

- Αν $r = n$, τότε ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Έστω P ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, έχουμε

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_i$, $1 \le i \le n$.

Για παράδειγμα, για να εξετάσουμε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1α και την απόδειξη της Πρότασης 8.1, αρκεί να βρούμε έναν κατάλληλο πίνακα $P \in M_2(\mathbb{R})$, τέτοιον ώστε $\Delta = P^{-1}AP$.

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τη διανυσματική εξίσωση, $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, έχουμε

$$(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι κάθε διάνυσμα του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, δηλαδή $V(2) = \{x_1(1 \quad 1)^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $V(2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$, επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad 1)^t$, το οποίο βρίσκουμε για $x_1 = 1$.

• Για $\lambda_2 = 3$, έχουμε

$$(A - 3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = \dfrac{3}{2}x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dfrac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Ο ιδιόχωρος είναι $V(3) = \{\boldsymbol{x} = x_1(1 \quad 3/2)^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$, οι μη μηδενικές λύσεις του ιδιοχώρου είναι ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 3$, επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (2 \quad 3)^t$, το οποίο βρίσκουμε για $x_1 = 2$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, οπότε θέτοντας

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την $\det P = 1 \neq 0$, άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πόρισμα 4.4 ή Πρόταση 5.12).

Επομένως, ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.1).

Επιπλέον υπάρχει ο πίνακας $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (υπολογίζεται σύμφωνα με την Εφαρμογή 1.4), οπότε κάνοντας πράξεις εύκολα επαληθεύουμε την ισότητα στην (8.1) (i), δηλαδή,

$$P^{-1}AP = \varDelta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Για περισσότερα παραδείγματα εφαρμογής αυτού του αλγορίθμου παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 8.7.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A ήταν διακεκριμένες, όσες και το μέγεθός του και αποδείξαμε ότι ο πίνακας διαγωνοποιήθηκε. Αυτό δεν είναι τυχαίο, συμβαίνει πάντοτε, διότι ο τετραγωνικός πίνακας P είναι πάντοτε αντιστρέψιμος, επειδή έχει στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα-ιδιοδιανύσματα (Πρόταση 5.12). Επομένως, στην ειδική περίπτωση όπου όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για τη διαγωνοποίηση του πίνακα, χωρίς την αναζήτηση των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα, συμπέρασμα που αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.2

Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Απόδειξη : Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A με $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.5 αυτά τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.1). ◆◆◆

Σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης ενός πίνακα είναι ο υπολογισμός των δυνάμεών του.

Πρόταση 8.3

Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε*

$$A^k = Pdiag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)P^{-1}, \tag{8.6}$$

για κάθε φυσικό αριθμό k.

Αν $\lambda_i \neq 0$, *τότε* $A^{-k} = Pdiag\left(\lambda_1^{-k}, \lambda_2^{-k}, \ldots, \lambda_n^{-k}\right)P^{-1}$, *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη : Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, οπότε παραγοντοποιείται στη μορφή (ii) της (8.1), $A = P\Delta P^{-1}$, από έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και έναν $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A, (υπολογίζεται η αλγεβρική πολλαπλότητα). Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A^k = \left(P\Delta P^{-1}\right)^k = \underbrace{P\Delta P^{-1} \cdot P\Delta P^{-1} \cdot \cdots \cdot P\Delta P^{-1}}_{k-\text{φορές}} = P\Delta^k P^{-1} = Pdiag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)P^{-1}.$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει $\lambda_i \neq 0$ ιδιοτιμές, τότε είναι αντιστρέψιμος (Πόρισμα 7.1), και συνεπώς ορίζεται ο A^{-1}, ο οποίος έχει ιδιοτιμές λ_i^{-1} και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους $\boldsymbol{x}_i$ είναι ίδια με αυτά που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i του A, (Πόρισμα 7.3). Άρα υπάρχει P αντιστρέψιμος, ίδιος με αυτόν που διαγωνοποιεί τον A, τέτοιος ώστε $A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$. Όμοια με προηγούμενα αποδεικνύεται ότι

$$A^{-k} = P\Delta^{-k}P^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

◆◆◆

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον πίνακα $A^{2008} - 2A^{-8}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$, οπότε οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ και $\lambda_3 = i$. Άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται στο $\mathbb{C}$ (Πρόταση 8.2) και είναι αντιστρέψιμος (Πόρισμα 7.1). Από την (8.6) παίρνουμε

$$A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^k & 0 \\ 0 & 0 & i^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

- για $k = 2008$: $A^{2008} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{2008} & 0 \\ 0 & 0 & i^{2008} \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I$,
- για $k = -8$: $A^{-8} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & i^{-8} \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I$.

Επομένως, ο ζητούμενος πίνακας είναι $A^{2008} - 2A^{-8} = -I$.

Όπως αναφέρεται στην πρόταση που ακολουθεί, η μορφή του ελαχίστου πολυωνύμου δίνει ένα άλλο χρήσιμο κριτήριο για τη διαγωνοποίηση ή όχι ενός πίνακα.

Πρόταση 8.4

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A, $m_A(\lambda)$, είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_k) \tag{8.7}$$

όπου οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι ανά δύο διαφορετικές.

Αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι της μορφής (8.7), σύμφωνα με τον Ορισμό 7.4 (b) του ελαχίστου πολυωνύμου έχουμε

$$m_A(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_k I) = \mathbb{O}.$$

Επομένως, για να ελέγξουμε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, αρκεί να εξετάσουμε αν επαληθεύεται η ισότητα

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_k I) = \mathbb{O}, \tag{8.8}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **δε** διαγωνοποιείται. Πράγματι, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$, οι διακεκριμένες (διαφορετικές) ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$ (η δεύτερη ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και η ισότητα στην (8.8) δεν επαληθεύεται, διότι

$$(A-3I)(A+I)=\begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 8.1 i) Η διαγωνοποίηση ενός πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ που έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές επιτυγχάνεται πάντοτε (Πρόταση 8.2). Αν χρειάζεται να γνωρίζουμε τη διαγωνοποίηση είναι απαραίτητος ο αντιστρέψιμος πίνακας P, τον οποίο υπολογίζουμε σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1.

ii) Η διαγωνοποίηση ενός πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ του οποίου οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν αλγεβρική πολλαπλότητα διαφορετική της μονάδας, δεν είναι πάντοτε εφικτή. Η εφαρμογή της Πρότασης 8.4 ή ισοδύναμα η επαλήθευση της σχέσης (8.8) αποτελεί το συντομότερο κριτήριο για να αποφανθούμε για τη διαγωνοποίηση ή όχι του πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$. Αν η διαγωνοποίηση είναι εφικτή ο αντιστρέψιμος πίνακας P, υπολογίζεται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1.

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα, χρειάζεται να αναφερθούμε και στην έννοια της διαγωνοποίησης των γραμμικών απεικονίσεων, καθώς επίσης και στα ανάλογα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για αυτήν.

Παρατήρηση 8.2 Τα ιδιοδιανύσματα του $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι στοιχεία του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, δηλαδή είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Για συντομία θα γράφουμε $\mathbb{F}^{n\times 1}$ στη θέση του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Όπως είπαμε και στο Κεφάλαιο 4, ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{F}^n$ με τη μόνη διαφορά ότι γράφοντας $\mathbb{F}^{n\times 1}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία σε στήλες $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ενώ γράφοντας $\mathbb{F}^n$ χρησιμοποιούμε γραμμές $(x_1,\dots,x_n)$. Ακριβέστερα η απεικόνιση $f:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^n$, $f\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=(x_1,\dots,x_n)$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Μέσω αυτού πολλές φορές ταυτίζουμε το $\mathbb{F}^{n\times 1}$ με το $\mathbb{F}^n$, συμβολισμό τον οποίο υιοθετούμε στα επόμενα.

Ορισμός 8.2

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμη**, αν υπάρχει μια βάση του V ως προς την οποία ο αντίστοιχος πίνακας αναπαράστασης της απεικόνισης είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2, το πρόβλημα της διαγωνοποίησης μιας γραμμικής απεικόνισης f είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα διαγωνοποίησης του πίνακα αναπαράστασης της f, το οποίο μελετήσαμε αναλυτικά. Ωστόσο, αξίζει να διατυπώσουμε τις ακόλουθες προτάσεις που αναφέρονται σε γραμμικές απεικονίσεις και είναι ανάλογες των Προτάσεων 8.2 και 8.4.

Πόρισμα 8.1

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(x+y,\ 5x-3y)$, χρησιμοποιώντας την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, υπολογίζουμε τον πίνακα αναπαράστασης $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, (Ενότητα 5.2.1). Όπως αναφέρθηκε και στο Παράδειγμα 8.1 (i), ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος[1], οπότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη, (Ορισμός 8.2). Μία άλλη απόδειξη βασίζεται στο Πόρισμα 8.1. Οι ιδιοτιμές της f είναι διακεκριμένες, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=2$, επειδή είναι ίδιες με αυτές του αντίστοιχου πίνακα αναπαράστασης της f (Παρατήρηση 7.2).

Πόρισμα 8.2

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Η f είναι διαγωνοποιήσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παράδειγμα 8.2 i) Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$f(x,y,z)=(3x+y+z,\,2x+4y+2z,\,x+y+3z),$$

είναι διαγωνοποιήσιμη. Ο πίνακας αναπαράστασης της f, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, το οποίο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-24=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=2$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2=6$. Η ισότητα της (8.8) επαληθεύεται, διότι κάνοντας πράξεις έχουμε $(A-2I)(A-6I)=\mathbb{O}$. Επομένως $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-6)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A, το οποίο ταυτίζεται με αυτό της απεικόνισης f και αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες. Άρα η f διαγωνοποιείται (Πόρισμα 8.2).

ii) Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$f(x,y,z)=(y,\,-4x+4y,\,-2x+y+2z),$$

[1] Πράγματι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda+4)(\lambda-2)$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες, οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 8.2.

δεν είναι διαγωνοποιήσιμη. Ο πίνακας αναπαράστασης της f, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_B(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$. Βρίσκουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα B είναι $m_B(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$ (Παράδειγμα 7.7), το οποίο ταυτίζεται με το ελάχιστο πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης f. Επειδή το $m_B(\lambda)$ **δεν** αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες, η f **δε** διαγωνοποιείται (Πόρισμα 8.2).

◆◆◆

8.2 Τριγωνοποίηση πίνακα

Ορισμός 8.3

*Ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** στο $\mathbb{F}$ αν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας*

$$S^{-1}AS=T \tag{8.9}$$

να είναι άνω τριγωνικός.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, επειδή για τον αντιστρέψιμο πίνακα $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ισχύει

$$S^{-1}AS=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ του Παραδείγματος 8.1 **δεν** είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, ενώ είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$, διότι κάθε πίνακας $A\in M_n(\mathbb{C})$ είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$, σύμφωνα με το Πόρισμα 8.3.

Στον Ορισμό 8.3, αν ο πίνακας $S \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ορθομοναδιαίος[1], λέμε ότι ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος** και τότε ισχύει

$$S^* A S = T \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = S T S^* \tag{8.10}$$

Ένας πίνακας είναι πάντοτε τριγωνοποιήσιμος όπως αυτό διατυπώνεται στο θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο στη βιβλιογραφία είναι γνωστό ως **θεώρημα Schur.**

Θεώρημα 8.1

Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα $T \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A.

Απόδειξη : Η πρόταση αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς τον τύπο n του πίνακα A. Για $n=1$ ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για οποιονδήποτε πίνακα τύπου $(n-1)\times(n-1)$. Θεωρούμε ότι λ_1, $\boldsymbol{x}_1$ είναι τα ιδιοποσά του A και μάλιστα το ιδιοδιάνυσμα το επιλέγουμε να είναι μοναδιαίο, $\|\boldsymbol{x}_1\|=1$. Επιλέγουμε διανύσματα $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ και μαζί με το $\boldsymbol{x}_1$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{x}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_n\}$ του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ και σχηματίζουμε τον πίνακα

$$U_1 = (\boldsymbol{x}_1 \quad \hat{\boldsymbol{x}}_2 \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{x}}_n).$$

Ο πίνακας U_1 είναι ορθομοναδιαίος. Αν διαμερίσουμε τον U_1 έτσι ώστε $U_1 = (\boldsymbol{x}_1 \quad U_2)$, με $U_2 \in M_{n\times(n-1)}(\mathbb{F})$, έχουμε :

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & AU_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* A \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^* A U_2 \\ U_2^* A \boldsymbol{x}_1 & U_2^* A U_2 \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

Είναι φανερό ότι, ο πίνακας $A_1 = U_2^* A U_2$ είναι τύπου $(n-1)\times(n-1)$, και άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας T_1 και ορθομοναδιαίος πίνακας U_3, έτσι ώστε

$$U_3^* A_1 U_3 = U_3^* U_2^* A U_2 U_3 = T_1 \Leftrightarrow A_1 \equiv U_2^* A U_2 = U_3 T_1 U_3^*.$$

[1] Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** όταν ισχύει $UU^* = U^* U = I$, όπου $U^* = \bar{U}^t$. Είναι φανερό ότι ισχύει $U^* = U^{-1}$ (Πρόταση 6.8).

Από τα ιδιοποσά του A ισχύει $\boldsymbol{x}_1^* A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^* \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \left\|\boldsymbol{x}_1\right\|^2 = \lambda_1$. Επιπλέον, από την καθετότητα των διανυσμάτων της ορθοκανονικής βάσης ισχύει $\boldsymbol{x}_1^* U_2 = \mathbf{0}$, οπότε $U_2^* A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 U_2^* \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 (\boldsymbol{x}_1^* U_2)^* = \mathbf{0}$.

Τις παραπάνω ισότητες τις αντικαθιστούμε στον τελευταίο πίνακα της (8.11) και έχουμε

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* A U_2 \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* A U_2 \\ \mathbf{0} & U_3 T_1 U_3^* \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Θέτουμε τον $n \times n$ ορθομοναδιαίο πίνακα

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3 \end{pmatrix}$$

και με αυτόν πολλαπλασιάζουμε την (8.12), οπότε προκύπτει

$$U_4^* U_1^* A U_1 U_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* A U_2 \\ \mathbf{0} & U_3 T_1 U_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* A U_2 U_3 \\ \mathbf{0} & T_1 \end{pmatrix} = T, \tag{8.13}$$

όπου ο T είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Αν θέσουμε

$$U = U_1 U_4, \tag{8.14}$$

η (8.13) γράφεται $U^* A U = T$, δηλαδή, ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα.

Επιπλέον, οι πίνακες A, T είναι όμοιοι, συνεπώς, τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων A, T ταυτίζονται (Πρόταση 7.4), επομένως

$$\chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ διαγώνια στοιχεία του T (Εφαρμογή 7.21 (i)) και $\lambda_i \in \sigma(A)$. ◆◆◆

Παρατήρηση 8.3 i) Το Θεώρημα 8.1, θεώρημα Schur, ισχύει και για κάτω τριγωνικό πίνακα.

ii) Όπως διαπιστώνουμε από την (8.13), ο πίνακας T εξαρτάται από την επιλογή του ορθομοναδιαίου πίνακα U_2, ο οποίος επιλέχθηκε αυθαίρετα, αρκεί τα διανύσματα (που είναι οι στήλες του U_2) μαζί με το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, να αποτελούν ορθοκανονική βάση. Συνεπώς, ο πίνακας T **δεν** είναι μοναδικός. Επομένως, η τριγωνοποίηση ενός πίνακα δεν έχει μοναδική μορφή.

iii) Στην απόδειξη του θεωρήματος Schur παρουσιάζεται η μέθοδος για την τριγωνοποίηση ενός πίνακα, την οποία ακολουθούμε στο επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας ακριβώς τον ίδιο συμβολισμό.

Παράδειγμα 8.3 Για τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, να βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας U ώστε ο πίνακας U^*AU να είναι άνω τριγωνικός. Ο πίνακας A είναι ο πίνακας B του Παραδείγματος 8.2 (ii), όπου είχαμε αποδείξει ότι, ο πίνακας δεν ήταν διαγωνοποιήσιμος, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$ και με μοναδική ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ (τριπλή ρίζα). Από $(A-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, του οποίου η λύση είναι ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_1(1 \quad 2 \quad 0)^t + x_3(0 \quad 0 \quad 1)^t \quad : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$. Ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1=2$ είναι το $\boldsymbol{x}_1=(0 \quad 0 \quad 1)^t$.

Θεωρώ τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2=(1 \quad 0 \quad 0)^t$, $\boldsymbol{x}_3=(1 \quad 1 \quad 0)^t$.

Τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, διότι $\det(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3)=1\neq 0$ (Πόρισμα 4.4). Με τη μέθοδο Gram-Schmidt ορθοκανονικοποιούμε τα στοιχεία της βάσης. Επειδή τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ είναι ορθομοναδιαία, ασχολούμαστε μόνο με το $\boldsymbol{x}_3$, για το οποίο παίρνουμε $\hat{\boldsymbol{x}}_3=(1 \quad 1 \quad 0)^t-(1 \quad 0 \quad 0)^t=(0 \quad 1 \quad 0)^t$. Συνεπώς, ο ορθομοναδιαίος πίνακας U_1 είναι $U_1=(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.

Η ισότητα στην (8.11) γράφεται :

$$U_1^*AU_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^*A\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^*AU_2 \\ U_2^*A\boldsymbol{x}_1 & U_2^*AU_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \vdots & 2 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

Ο πίνακας $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A_1}(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$, οπότε έχει ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ (διπλή ρίζα). Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως προηγούμενα για τον πίνακα A_1 έχουμε ότι, η λύση του συστήματος που προκύπτει από $(A_1-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_1(1 \quad 2)^t \quad : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$ και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα είναι το

$\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t$. Μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ με πρώτο διάνυσμα το $\boldsymbol{y}_1$ είναι $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\}$, όπου $\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}^t$, (ελέγξτε τη γραμμική ανεξαρτησία και την καθετότητα των μοναδιαίων διανυσμάτων).

Θέτουμε $U_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, οπότε $U_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

Ο τριγωνικός πίνακας T προκύπτει από την (8.13) αντικαθιστώντας σε αυτήν την ισότητα της (8.15), και τον πίνακα U_4, δηλαδή,

$$U_4^* U_1^* A U_1 U_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 4/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5}\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = T.$$

Ο ζητούμενος ορθομοναδιαίος (εδώ είναι ορθογώνιος) πίνακας U υπολογίζεται από την (8.14) και είναι

$$U = U_1 U_4 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 8.3 (ii) και διαπιστώνουμε από την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1 και από το Παράδειγμα 8.3, η επιλογή των διανυσμάτων της βάσης επηρεάζει τον ορθομοναδιαίο πίνακα U, καθώς και τον τριγωνικό πίνακα T, στον οποίο παραμένουν αναλλοίωτα μόνο τα διαγώνια στοιχεία, που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Γι΄ αυτό αν δεν αναζητούμε τη μορφή του τριγωνικού πίνακα, αλλά απλά χρειάζεται να αποφανθούμε για την τριγωνοποίηση ή όχι, έχουμε ένα εύχρηστο κριτήριο που στηρίζεται μόνο στις ιδιοτιμές του πίνακα, δηλαδή στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Από το θεώρημα Schur και το θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας είναι φανερό ότι, ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι τριγωνήσιμος στο $\mathbb{C}$, επειδή το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$, υπολογιζομένης της πολλαπλότητάς τους.

Πόρισμα 8.3

i) *Ένας πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *τριγωνοποιείται αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο* $\mathbb{F}$.

ii) *Κάθε πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *τριγωνοποιείται.*

Στο Παράδειγμα 8.3, το $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ του πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μία τριγωνοποίηση του A.

Αξιοποιώντας το θεώρημα Schur μπορούμε να αποδείξουμε μία σημαντική ιδιότητα που σχετίζεται με τις ιδιοτιμές και το ίχνος[1] ενός πίνακα.

Πρόταση 8.5

Σε κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύει*

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{8.16}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ *είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A.

Απόδειξη : Επειδή κάθε πίνακας είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τριγωνικό πίνακα που έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ισότητα στην (8.10), $A = STS^*$. Επιπλέον, από την ιδιότητα, $tr(AB) = tr(BA)$, (Εφαρμογή 1.5 (iii)), και τον ορισμό του ίχνους, προκύπτει

$$trA = tr(STS^*) = tr(TS^*S) = trT = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, .$$

◆◆◆

[1] Βλέπε Ορισμό 1.2, $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, όπου $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Για παράδειγμα, έστω ένας πίνακας $A \in M_4(\mathbb{C})$ με $\lambda_1 = -4+5i$, $\det A = 82$ και $trA = -5$, όπου το $\chi_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές. Για να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του A, χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -4-5i$ είναι ιδιοτιμή του A, διότι το $\chi_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές. Έστω λ_3, λ_4 οι άλλες ιδιοτιμές του A. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 7.1 και την Πρόταση 8.5 έχουμε τις επόμενες ισότητες

$$(-4+5i)(-4-5i)\lambda_3\lambda_4 = \det A = 82, \quad (-4+5i)+(-4-5i)+\lambda_3+\lambda_4 = trA = -5,$$

οι οποίες καταλήγουν στο σύστημα $\lambda_3\lambda_4 = 2$ και $\lambda_3 + \lambda_4 = 3$.

Η λύση του συστήματος είναι $\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 2$ ή $\lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 1$.

8.3 Διαγωνοποίηση πινάκων ειδικής μορφής

Η ειδική μορφή διαγωνοποίησης των Ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών πινάκων είναι ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές. Αφενός, όπως αποδείξαμε στην Πρόταση 7.6, ένας Ερμιτιανός ή ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, οπότε όταν αυτός ο πίνακας διαγωνοποιείται ο διαγώνιος θα είναι πίνακας με πραγματικά στοιχεία, αφετέρου αποδείξαμε ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, πληροφορία η οποία είναι χρήσιμη για την κατασκευή του αντιστρέψιμου πίνακα P.

Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι **ορθομοναδιαία διαγωνοποιήσιμος** αν υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας που τον διαγωνοποιεί. Δηλαδή αν υπάρχει, ορθομοναδιαίος πίνακας U, ο οποίος έχει την ιδιότητα $U^* = U^{-1}$, έτσι ώστε να ισχύει η (8.1) :

$$U^{-1}AU = \Delta \Leftrightarrow U^*AU = \Delta \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = U\Delta U^{-1} \Leftrightarrow A = U\Delta U^* \qquad (8.17)$$

Όταν εξετάζουμε πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες, τότε λέμε ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι **ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος** και συμβολίζουμε τον πραγματικό αντιστρέψιμο πίνακα της διαγωνοποίησης $P \in M_n(\mathbb{R})$. Ο πίνακας P είναι ορθογώνιος[1], οπότε έχει την ιδιότητα $P^t = P^{-1}$, και η ανάλογη σχέση της (8.15) γράφεται

---

[1] Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνιος**, αν ισχύει $UU^t = U^tU = I$, από όπου προκύπτει η ιδιότητα $U^t = U^{-1}$ (Πρόταση 6.8).

$$P^{-1}AP = \Delta \Leftrightarrow P^t AP = \Delta \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow A = P\Delta P^t. \tag{8.18}$$

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 17\lambda^2 + 90\lambda - 144 = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-8)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 8$. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2, 3$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, έχουμε

$$(A - 3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(3) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \ : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = (1 \ \ 1 \ \ 1)^t$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$, από $(A - 6I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(6) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2 = (1 \ \ 1 \ \ -2)^t$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 8$, από $(A - 8I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(8) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ και επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3 = (-1 \ \ 1 \ \ 0)^t$.

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους (Πρόταση 7.6), οπότε αν διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του και τα τοποθετήσουμε ως στήλες στον πίνακα P, τότε ο πίνακας είναι ορθογώνιος.
Έτσι δημιουργούμε τα διανύσματα-στήλες

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t, \ \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t, \ \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

και κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι ορθογώνιος, οπότε $P^{-1}=P^t$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται και εύκολα επαληθεύουμε κάνοντας από πράξεις ότι ισχύει η (8.18), δηλαδή

$$P^tAP=\Delta=diag(3,6,8).$$

Συνεπώς, επιτυγχάνεται μία διαγωνοποίηση του συμμετρικού πίνακα A με χρήση ενός πίνακα P, που δεν είναι μόνο αντιστρέψιμος, όπως απαιτεί η διαγωνοποίηση ενός τυχαίου πίνακα, αλλά είναι και ορθογώνιος.

Το ερώτημα που μας απασχολεί εδώ είναι αν αυτή η παρατήρηση γενικεύεται, αν δηλαδή οι Ερμιτιανοί ή πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται πάντοτε, και μάλιστα με χρήση ενός πίνακα ειδικής μορφής (ορθομοναδιαίου ή ορθογωνίου). Η απάντηση βρίσκεται στο **Φασματικό θεώρημα** που ακολουθεί.

Θεώρημα 8.2

Κάθε πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός[1] (πραγματικός συμμετρικός) πίνακας αν και μόνο αν είναι ορθομοναδιαία (ορθογώνια) όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα.

Ισοδύναμα, κάθε πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός (πραγματικός συμμετρικός) πίνακας αν και μόνο αν υπάρχει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας U (P), τέτοιος ώστε ο πίνακας U^*AU (P^tAP) να είναι πραγματικός διαγώνιος.

Απόδειξη : Έστω ότι ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1 (Schur) υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U, τέτοιος ώστε να ισχύει η (8.17), δηλαδή,

$$A=UTU^*, \tag{8.19}$$

όπου T άνω τριγωνικός πίνακας με τα στοιχεία της διαγωνίου του T ίσα με τις ιδιοτιμές του A, οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί (Πρόταση 7.6).

Επειδή ισχύει $A^*=A$, χρησιμοποιώντας την (8.19) καταλήγουμε στη σχέση

---

[1] Ο $H\in M_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται **Ερμιτιανός**, όταν ισχύει $H^*=H$, (Ορισμός 1.2).

Ο $H\in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **πραγματικός συμμετρικός**, όταν ισχύει $H^t=H$, (Ορισμός 1.2).

$$UT^*U^* = \left(UTU^*\right)^* = A^* = A = UTU^* \Rightarrow T^* = T .$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο αν ο τριγωνικός πίνακας T είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U, τέτοιος ώστε $A = Udiag\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)U^*$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$A^* = \left(U\, diag\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)U^*\right)^* = U\, diag\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)U^* = A ,$$

επομένως, ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός.

Στην περίπτωση των πραγματικών συμμετρικών πινάκων η απόδειξη είναι ίδια, μόνο που αντικαθίσταται η αναστροφοσυζυγία με αναστροφή. ◆◆◆

Παρατήρηση 8.4 i) Σύμφωνα με το θεώρημα 8.2, στην περίπτωση ενός Ερμιτιανού (ή πραγματικού συμμετρικού) πίνακα A, μπορούμε να επιλέξουμε τον U (αντίστοιχα τον P) να είναι ορθομοναδιαίος (αντίστοιχα ορθογώνιος) πίνακας. Στην πράξη συνήθως κατασκευάζουμε έναν τέτοιο πίνακα U (ή P) με τη μέθοδο Gram-Schmidt. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, είναι ανά δύο κάθετα (Πρόταση 7.6), εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο ανάμεσα στα ιδιοδανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή.

ii) Το Φασματικό θεώρημα αποδεικνύεται γενικότερα για έναν κανονικό πίνακα $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$, (Εφαρμογή 8.10).

Παράδειγμα 8.4 Ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται σύμφωνα με το Θεώρημα 8.2. Ο ορθογώνιος πίνακας P δημιουργείται από τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία πρέπει να είναι κάθετα μεταξύ τους και μοναδιαία. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A\left(\lambda\right) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = \left(\lambda + 2\right)\left(\lambda - 7\right)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 7$ (διπλή ρίζα).

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$, από $(A + 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V\left(-2\right) = \left\{x_2\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$, από όπου επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα, αντίστοιχο της $\lambda_1 = -2$, το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (2 \quad 1 \quad -2)^t$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 7$, από $(A - 7I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(7) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Επομένως, για $\lambda_2 = 7$, επιλέγουμε τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -2 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = (0 \quad 2 \quad 1)^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι $\det(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3) = -9 \neq 0$ (Πόρισμα 4.4), άρα σχηματίζουμε τον πίνακα με στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα και έτσι διαγωνοποιούμε τον πίνακα A.

Θεωρούμε τον πίνακα

$$P_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

από όπου υπολογίζουμε τον $P_1^{-1} = \dfrac{-1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, οπότε κάνοντας τις πράξεις επαληθεύουμε την ισότητα (i) της (8.1). Επομένως, υπάρχει μία διαγωνοποίηση του A που είναι

$$P_1^{-1} A P_1 = diag\left(-2, 7, 7\right).$$

Όμως, βρίσκοντας το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων, εύκολα επαληθεύουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ και $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ είναι κάθετα. Από την Παρατήρηση 8.4 (i), υπάρχει και άλλος πίνακας P, ο οποίος είναι ορθογώνιος, με τον οποίο επιτυγχάνεται η διαγωνοποίηση του A. Για να κατασκευάσουμε αυτόν τον ορθογώνιο πίνακα P χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο στα $\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$. Γι΄αυτό υπολογίζουμε $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{\left\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \right\rangle}{\left\| \boldsymbol{x}_2 \right\|^2} \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}^t$, οπότε μετατρέποντας σε μοναδιαία τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$ καταλήγουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_2\|}\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{5}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix},$$

και η ορθογώνια διαγωνοποίηση του A είναι

$$P^t AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Περισσότερα παραδείγματα με ορθογώνια διαγωνοποίηση παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 9, που αφορά τις τετραγωνικές μορφές.

8.4 Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Σε αρκετά παραδείγματα της πρώτης ενότητας συμπεράναμε ότι υπάρχουν πίνακες $A \in M_n(\mathbb{F})$ που δε διαγωνοποιούνται, και όπως διαπιστώνουμε, από την εφαρμογή του Αλγορίθμου 8.1, ένας πίνακας είναι μη διαγωνοποιήσιμος όταν τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματά του δεν είναι αρκετά, ώστε να κατασκευαστεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P, μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η διαγώνια μορφή. Βέβαια αυτό μπορεί να συμβεί μόνο σε περιπτώσεις όπου κάποια ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας (διαφορετικά εφαρμόζεται η Πρόταση 8.2) και η γεωμετρική πολλαπλότητα[1] είναι μικρότερη της αλγεβρικής πολλαπλότητάς της. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται να επεκτείνουμε το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του αντίστοιχου ιδιοχώρου σε μία βάση, η οποία πρέπει να έχει διάσταση ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Η επέκταση κατορθώνεται με τα λεγόμενα «γενικευμένα ιδιοδιανύσματα».

---

[1] Η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ_i είναι ο αριθμός που δείχνει τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$.

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία που αφορά την ύπαρξη και την κατασκευή ενός πίνακα, που είναι αντίστοιχος του πίνακα P της διαγωνοποίησης του A. Η νέα μορφή παραγοντοποίησης του πίνακα A δεν είναι διαγώνια, αλλά «πολύ κοντά» στη διαγώνια μορφή, είναι μία μορφή απλή και εξίσου χρήσιμη και ονομάζεται κανονική μορφή Jordan.

Όπως έχουμε αναφέρει στην Εφαρμογή 7.3 (iii) ένας πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbb{O} & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{F}) \tag{8.20}$$

ονομάζεται **στοιχειώδης πίνακας Jordan** αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ_i και στο εξής θα συμβολίζεται με $J_{i,k}$. Ο πρώτος δείκτης ταυτίζεται με το δείκτη της αντίστοιχης ιδιοτιμής και ο δεύτερος προσδιορίζει τον τύπο (μέγεθος) του στοιχειώδη πίνακα Jordan. Στην ίδια εφαρμογή έχουμε αποδείξει ότι ο ιδιόχωρος της λ_i, που είναι μοναδικός, έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Επομένως, όταν $k \neq 1$, αυτοί οι πίνακες ποτέ δε διαγωνοποιούνται.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της Παρατήρησης 8.2, διατυπώνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 8.4

*Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ λέγεται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A αν για την ιδιοτιμή $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ισχύει*

$$(A-\lambda_i I)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \tag{8.21}$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Το σύνολο

$$K(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^{n\times 1} : \ (A-\lambda_i I)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad k \in \mathbb{N}^*\} \tag{8.22}$$

*ονομάζεται **γενικευμένος ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ_i.*

Αν k είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα (8.21), τότε το σύνολο

$$\left\{ \left(A-\lambda_i I\right)^{k-1} \boldsymbol{x},\ \left(A-\lambda_i I\right)^{k-2} \boldsymbol{x}, \ldots, \left(A-\lambda_i I\right) \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \right\} \tag{8.23}$$

ονομάζεται ***αλυσίδα*** *από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα και ο αριθμός k ονομάζεται* ***μήκος*** *της αλυσίδας.*

Παρατήρηση 8.5 i) Από την (8.21) συμπεραίνουμε ότι, κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμά του. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα δεν είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (Παράδειγμα 8.1 (ii)), έχει μοναδική ιδιοτιμή την $\lambda_1 = 1$ (διπλή ρίζα), κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $\left(B-I\right)^2 = \mathbb{O}$. Συνεπώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2)^t$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του B, αφού επαληθεύεται η (8.21) τετριμμένα. Από όλα τα $\boldsymbol{x}$ μόνο τα $\left(x_1 \quad 0\right)^t$ είναι ιδιοδιανύσματα του B, (τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B υπολογίζονται στην Εφαρμογή 8.8 (iv)).

ii) Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i **δεν** αντιστοιχεί μία μόνο αλυσίδα, επειδή είναι δυνατόν στη λ_i να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (εξαρτάται από τη γεωμετρική πολλαπλότητα), το καθένα από τα οποία μπορεί να παράγει μία αλυσίδα διαφορετικού μήκους. Το πλήθος των αλυσίδων, που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή, είναι ακριβώς ο αριθμός της γεωμετρικής πολλαπλότητάς της.

iii) Στην (8.23), κάθε διάνυσμα της αλυσίδας του A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, το συμβολίζουμε με ένα άλλο διάνυσμα $\boldsymbol{x}_j$, $j=1,2,\ldots,k$, οπότε τα διανύσματα της αλυσίδας είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &\equiv \left(A-\lambda_i I\right)^{k-1} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_2 &\equiv \left(A-\lambda_i I\right)^{k-2} \boldsymbol{x} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}_{k-2} &\equiv \left(A-\lambda_i I\right)^{2} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{k-1} &\equiv \left(A-\lambda_i I\right) \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_k &\equiv \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{8.24}$$

όπου $\boldsymbol{x}$ είναι ένα γενικευμένο διάνυσμα.

Αν την πρώτη ισότητα της (8.24) την πολλαπλασιάσουμε αριστερά επί $A-\lambda_i I$ και αντικαταστήσουμε με την (8.21) προκύπτει

$$(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_1 = (A-\lambda_i I)^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{8.25}$$

ενώ αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις άλλες ισότητες της (8.24) επί $A-\lambda_i I$ και αντικαταστήσουμε με τα αντίστοιχα διανύσματα της (8.24) καταλήγουμε :

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_2 &= (A-\lambda_i I)^{k-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \\
(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_3 &= (A-\lambda_i I)^{k-2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 \\
&\vdots \\
(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_{k-2} &= (A-\lambda_i I)^{3}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k-3} \\
(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_{k-1} &= (A-\lambda_i I)^{2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k-2} \\
(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_{k} &= (A-\lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k-1}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Από την (8.25) καταλαβαίνουμε ότι το $\boldsymbol{x}_1$ είναι κάποιο από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, επειδή επαληθεύεται ο Ορισμός 7.1, το οποίο είναι το μοναδικό που συμμετέχει στη συγκεκριμένη αλυσίδα (Παρατήρηση 8.5 (i)). Συνεπώς, ξεκινώντας την αναζήτηση των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μπορούμε να ξεκινούμε με το $\boldsymbol{x}_1$, ως ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της λ_i, τα δε υπόλοιπα $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_{k-1}$ είναι διατεταγμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, που συμπληρώνουν την αλυσίδα και υπολογίζονται αναδρομικά από το $\boldsymbol{x}_1$, σύμφωνα με τις ισότητες στην (8.26). Επειδή οι αλυσίδες κάθε ιδιοτιμής μπορεί να είναι περισσότερες από μία, σε κάθε διάνυσμα της αλυσίδας σημειώνεται ακόμη ένας δείκτης σ, ο οποίος έχει την ίδια αρίθμηση με αυτήν του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος, που χρησιμοποιείται ως αρχικό για την παραγωγή των υπολοίπων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Έτσι στα επόμενα, ένα διάνυσμα συμβολίζεται $\boldsymbol{x}_{\sigma j}$, και μία αλυσίδα αποτελείται από τα διατεταγμένα διανύσματα

$$\boldsymbol{x}_{\sigma 1}, \boldsymbol{x}_{\sigma 2}, \boldsymbol{x}_{\sigma 3}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(k-1)}. \tag{8.27}$$

Παράδειγμα 8.5 Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$, και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ (τριπλή ρίζα), $\lambda_2 = -1$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(1) = \left\{ x_4 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \ : x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = (-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t$. Στην ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχεί μία αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 3 με πρώτο διάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_{11}$, τα υπόλοιπα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ υπολογίζονται από την (8.26) και σημειώνονται όπως στην (8.27).

  - Έτσι, λύνοντας την εξίσωση $(A-I)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ και εφαρμόζοντας τις γραμμοπράξεις, $r_2 \to r_2 + r_1$, $r_3 \to r_3 + r_1$, $r_4 \to r_4 + r_1$, στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος καταλήγουμε :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει είναι $\boldsymbol{x}_2 = (-x_4 \quad 1+x_4 \quad x_4 \quad x_4)^t$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Από όλα αυτά τα διανύσματα επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (π.χ. βάζοντας $x_4 = 0$), οπότε το δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας είναι $\boldsymbol{x}_{12} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$.

  - Συνεχίζοντας με την εξίσωση $(A-I)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2$, βάζοντας $x_4 = 0$ και κάνοντας τις γραμμοπράξεις $r_2 \to r_2 + r_1$, $r_3 \to r_3 + r_1$, $r_4 \to r_4 + r_1$, στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, που δημιουργείται, βρίσκουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Η λύση του συστήματος είναι $\boldsymbol{x}_3 = (1-x_4 \quad x_4-2 \quad x_4 \quad x_4)^t$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Από τα διανύσματα αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (για $x_4 = 0$), οπότε το τρίτο διάνυσμα της αλυσίδας είναι $\boldsymbol{x}_{13} = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^t$.

Επομένως, ο γενικευμένος ιδιόχωρος $K(1)$ παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_{13}$.

- Για την άλλη ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(-1) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}^t \;\boldsymbol{:}\; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_4 = (-3 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -9)^t$. ◆◆◆

Παρατήρηση 8.6 i) Επειδή $\det(\boldsymbol{x}_{11} \;\; \boldsymbol{x}_{13} \;\; \boldsymbol{x}_{12} \;\; \boldsymbol{x}_4) = 8 \neq 0$, τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_{13}, \boldsymbol{x}_4 \in \mathbb{R}^4$ του Παραδείγματος 8.5 αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^4$ (Πόρισμα 4.4), άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_{13}, \boldsymbol{x}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ορισμός 4.14(a)).

ii) Έστω ο πίνακας $M = (\boldsymbol{x}_{11} \;\; \boldsymbol{x}_{12} \;\; \boldsymbol{x}_{13} \;\; \boldsymbol{x}_4)$ με στήλες τα παραπάνω διανύσματα. Εξαιτίας του (i) ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Αφού υπολογίσουμε τον πίνακα M^{-1} έχουμε στη συνέχεια ότι

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{2,1} \end{pmatrix} = J .$$

Ο πίνακας J ονομάζεται **πίνακας κανονικής μορφής Jordan** του πίνακα A, είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας. Εδώ αποτελείται από τους στοιχειώδεις πίνακες Jordan $J_{1,3}$, $J_{2,1}$ που είναι αντίστοιχοι των ιδιοτιμών $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$.

Τα προηγούμενα σχόλια (i) και (ii) της Παρατήρησης 8.6 δεν είναι τυχαία. Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται η κανονική μορφή Jordan ενός πίνακα καθώς και περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής μίας βάσης από ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, ώστε μέσω της βάσης αυτής να οδηγηθούμε στην απλή κανονική μορφή του πίνακα.

Πρόταση 8.6

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο*

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s}, \quad m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

αντίστοιχα. Τότε υπάρχει ένας σύνθετος διαγώνιος πίνακας, ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan [1]*,*

$$J = diag(J_1, J_2, \ldots, J_s) \in M_n(\mathbb{F}), \tag{8.28}$$

με υποπίνακες τα σύνθετα (block) Jordan[1]

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,\tilde{k}_{i,1}} & & & \\ & J_{i,\tilde{k}_{i,2}} & & \mathbb{O} \\ & \mathbb{O} & \ddots & \\ & & & J_{i,\tilde{k}_{i,\tau}} \end{pmatrix} \in M_{\nu_i}(\mathbb{F})$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, s$*. Το κάθε σύνθετο (block) Jordan* J_i *είναι σύνθετος πίνακας στοιχειωδών πινάκων Jordan της ίδιας ιδιοτιμής* λ_i, $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$, *όπου* $j = 1, 2, \ldots, \tau$, $\tilde{k}_{i,j}$ *είναι το μήκος κάθε αλυσίδας που προκύπτει από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της* λ_i *ιδιοτιμής, και* $\tau = \dim V(\lambda_i)$ *η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής . Ισχύουν*

i) *ο αριθμός* τ *δείχνει το πλήθος όλων των* $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$ *στον* J_i *και ταυτίζεται με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της ιδιοτιμής.*

ii) $k_i \equiv \tilde{k}_{i,1} \geq \tilde{k}_{i,2} \geq \cdots \geq \tilde{k}_{i,\tau}$, k_i *η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής* λ_i *στο ελάχιστο πολυώνυμο και*

iii) $\tilde{k}_{i,1} + \tilde{k}_{i,2} + \ldots + \tilde{k}_{i,\tau} = \nu_i$, ν_i *η αλγεβρική πολλαπλότητα της* λ_i.

Επιπλέον, υπάρχει μια βάση από n γενικευμένα ιδιοδιανύσματα όλων των αλυσίδων, όπως διατάσσονται στην (8.26) *και για όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές και ένας πίνακας* M *με στήλες όλα τα διανύσματα της βάσης, έτσι ώστε*

$$A = MJM^{-1} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad J = M^{-1}AM, \tag{8.29}$$

όπου J *είναι ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan* (8.28).

[1] Ο J ονομάζεται **πίνακας κανονικής μορφής Jordan**, είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο τους υποπίνακες J_i, που ονομάζονται **σύνθετοι** (**block**) **Jordan**. Ένας σύνθετος (block) Jordan πίνακας είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας, έχει για στοιχεία στη διαγώνιο τους υποπίνακες που ονομάζονται **στοιχειώδεις πίνακες Jordan**, $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$, όπως αυτοί ορίζονται στην (8.20). Οι στοιχειώδεις πίνακες Jordan έχουν σε όλα τα στοιχεία της διαγωνίου την αντίστοιχη ιδιοτιμή του block.

Παρατήρηση 8.7 i) Χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι, οι υποπίνακες J_i (συχνά ονομάζονται **σύνθετα (block) Jordan**), για να ξεχωρίζουν από τους στοιχειώδεις πίνακες και από τον πίνακα της κανονικής μορφής), είναι σύνθετοι διαγώνιοι πίνακες στοιχειωδών πινάκων Jordan $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$, και όλοι έχουν ως διαγώνια στοιχεία την ίδια ιδιοτιμή λ_i. Διαφοροποιούνται μόνο στο στοιχείο που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο, το οποίο στον J_i είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbb{O}$, ενώ στο στοιχιώδη πίνακα $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$ υπάρχει άλλοτε το 0 και άλλοτε το 1. Αυτό εξαρτάται από τον αριθμό $\tilde{k}_{i,j}$, δηλαδή αν $\tilde{k}_{i,j} > 1$ τότε υπάρχει το 1, αν $\tilde{k}_{i,j} = 1$ τότε υπάρχει το 0.

ii) Από το (ii) της Πρότασης 8.6 είναι φανερό ότι τα μήκη $\tilde{k}_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, \tau$, των αλυσίδων, που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή λ_i, είναι διατεταγμένα και μάλιστα είναι τοποθετημένα κατά φθίνουσα σειρά. Αν τοποθετήσουμε τα στοιχεία κάθε αλυσίδας, που υπολογίσθηκαν από την (8.26), σε μία στήλη και κάθε στοιχείο της αλυσίδας το αντιστοιχίσουμε με ένα ★, τότε θα έχουμε την επόμενη εικόνα:

1η στήλη	2η στήλη	3η στήλη …
★ $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_1$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_1$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)^2 \boldsymbol{x}_1$ $\vdots$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)^{\tilde{k}_{i,1}-1} \boldsymbol{x}_1$	★ $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_2$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_2$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)^2 \boldsymbol{x}_2$ $\vdots$ ★ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda_i I)^{\tilde{k}_{i,2}-1} \boldsymbol{x}_2$	…
Το άθροισμα των ★ είναι $\tilde{k}_{i,1}$, άρα γνωρίζουμε τον τύπο, του πρώτου στοιχειώδη πίνακα στο σύνθετο (block) Jordan J_i, ότι είναι $\tilde{k}_{i,1} \times \tilde{k}_{i,1}$.	Το άθροισμα των ★ είναι $\tilde{k}_{i,2}$, άρα γνωρίζουμε τον τύπο, του δεύτερου στοιχειώδη πίνακα στον J_i, ότι είναι $\tilde{k}_{i,2} \times \tilde{k}_{i,2}$.	

Επομένως, μπορούμε να κάνουμε το παραπάνω διάγραμμα των ★ για κάθε αλυσίδα (κάθε ιδιοτιμής λ_i) και να προσθέσουμε τα ★ κατά στήλη, υπολογίζοντας έτσι τα $\tilde{k}_{i,1}, \tilde{k}_{i,2}, \cdots, \tilde{k}_{i,\tau}$. Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται επακριβώς ο τύπος των στοιχειωδών πινάκων Jordan, $J_{i,\tilde{k}_{i,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, \tau$, σε κάθε σύνθετο (block) Jordan.

Αν στο πρόβλημα δεν απαιτείται ο υπολογισμός των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων (άρα δεν είναι απαραίτητος ο πίνακας M), το παραπάνω διάγραμμα των ★ κατασκευάζεται με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 8.7

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, λ_i ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας ν_i και ℓ_w ο αριθμός των ★ στην $w-$γραμμή του διαγράμματος, όπου $w = 2,\dots,\nu_i$. Τότε

$$\ell_1 = n - r(A-\lambda_i I) = \tau = \dim V(\lambda_i) \tag{8.30}$$

$$\ell_w = r\left((A-\lambda_i I)^{w-1}\right) - r\left((A-\lambda_i I)^{w}\right), \tag{8.31}$$

όπου $r(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα A.

Παρατήρηση 8.8 Για την εφαρμογή της Πρότασης 8.7 χρειάζονται όλοι οι βαθμοί των πινάκων $(A-\lambda_i I)^w$, $w = 1,2,\dots,\nu_i$, όπου ν_i η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ_i. Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι, το πλήθος των ★ στην 1η γραμμή, (υπολογίζεται από την (8.30) και είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i), πληροφορεί για το πλήθος των στοιχειωδών Jordan υποπινάκων, που υπάρχουν στο σύνθετο (block) Jordan της ιδιοτιμής. Στην περίπτωση όπου $\nu_i = 1$, προφανώς στο διάγραμμα των ★ για την ιδιοτιμή λ_i υπάρχει μόνο ένα σύνθετο (block) Jordan $J_i = (\lambda_i)$, τύπου 1×1.

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)^3(\lambda-3)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_1 = 3$, και $\lambda_2 = 3$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_2 = 2$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$, επειδή $r(A+2I) = 4$, $r\left((A+2I)^2\right) = 3$, $r\left((A+2I)^3\right) = 2$, από την (8.30) η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι

$$\ell_1 \equiv \tau \equiv \dim V(-2) = 5 - r(A+2I) = 1$$

και από την (8.31) υπολογίζονται

$$\ell_2 = r(A+2I) - r\left((A+2I)^2\right) = 1, \quad \ell_3 = r\left((A+2I)^2\right) - r\left((A+2I)^3\right) = 1.$$

Άρα, το διάγραμμα των ★ για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ είναι $\begin{matrix}\bigstar\\ \bigstar\\ \bigstar\end{matrix}$. Επομένως, το αντίστοιχο σύνθετο (block) Jordan είναι τύπου 3×3, -όση και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής-, και έχει μόνο ένα στοιχειώδη πίνακα Jordan, -επειδή το άθροισμα των ★ της στήλης ταυτίζεται με τον τύπο του πίνακα. Δηλαδή ο στοιχειώδης πίνακας είναι $J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

• Για την άλλη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, επειδή $r(A-3I) = r\left((A-3I)^2\right) = 3$, από την (8.30) έχουμε $\ell_1 \equiv \tau \equiv \dim V(3) = 5 - r(A-3I) = 2$ και από την (8.31) $\ell_2 = r(A-3I) - r\left((A-3I)^2\right) = 0$.

Συνεπώς, το διάγραμμα των ★ για την $\lambda_2 = 3$ είναι ★ ★. Επομένως υπάρχουν δύο στοιχειώδεις υποπίνακες Jordan, τύπου 1×1 ο καθένας, της μορφής $J_{2,1} = (3)$. Άρα, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, το σύνθετο (block) Jordan είναι $J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Από την (8.28), ο σύνθετος πίνακας Jordan του πίνακα A είναι

$$J = diag(J_1, J_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Στον επόμενο αλγόριθμο είναι συγκεντρωμένα τα βασικότερα σημεία που αναφέρονται στις Προτάσεις 8.6, 8.7, καθώς και τα σχόλια της Παρατήρησης 8.7. Ο Αλγόριθμος 8.2 εφαρμόζεται έως και το 4ο βήμα, όταν χρειάζεται να υπολογισθεί η κανονική μορφή Jordan ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και εφαρμόζεται ολόκληρος ο αλγόριθμος όταν απαιτείται η κατασκευή μίας βάσης Jordan.

Αλγόριθμος 8.2

Κανονική μορφή και βάση Jordan ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$

Βήμα 1 Υπολογισμός χαρακτηριστικού και ελαχίστου πολυωνύμου, καθώς και ιδιοτιμές του πίνακα A

Βήμα 2 Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, υπολογισμός των βαθμών των πινάκων $(A - \lambda_i I)^m$ $m = 1, 2, \ldots, \nu_i$, όπου ν_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Βήμα 3 Κατασκευή του διαγράμματος των ★ για κάθε ιδιοτιμή λ_i, κάνοντας αντικατάσταση στις (8.30) και (8.31) με τους βαθμούς των πινάκων που υπολογίσθηκαν στο βήμα 2. Από αυτό το διάγραμμα

- σχηματίζουμε το σύνθετο (block) Jordan της ιδιοτιμής (αποτελείται από ℓ_1 το πλήθος στοιχειώδεις πίνακες Jordan) και είναι τύπου $\nu_i \times \nu_i$
- καταγράφουμε τους τύπους των στοιχειωδών πινάκων Jordan, όπως δείχνουν τα μήκη των αντίστοιχων αλυσίδων $\tilde{k}_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, \tau$. Το μήκος κάθε αλυσίδας ισούται με το άθροισμα των ★ του διαγράμματος.

Βήμα 4 Η κανονική μορφή Jordan είναι ο σύνθετος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα σύνθετα (block) Jordan όλων των ιδιοτιμών.

Βήμα 5 Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, από την εξίσωση $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, υπολογίζονται τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $\mathbf{x}_p$, $1 \le p \le \tau \equiv \dim V(\lambda_i)$.

Βήμα 6 Για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_p$, του βήματος 5, συμπληρώνονται τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα κάθε αλυσίδας από τη σχέση (8.26) και γράφονται με διάταξη $\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}, \mathbf{x}_{p3}, \ldots, \mathbf{x}_{p(\tilde{k}_{i,j}-1)}$, $\tilde{k}_{i,j}$ είναι το μήκος της αλυσίδας, όπως αυτό υπολογίσθηκε στο διάγραμμα των ★.

Βήμα 7 Κατασκευή του πίνακα M με στήλες τα διανύσματα όλων των αλυσίδων κάθε ιδιοτιμής και για όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, οπότε ισχύει

$$M^{-1}AM = diag(J_1, J_2, \ldots, J_s),$$

όπου J_i είναι τα σύνθετα (block) Jordan που βρέθηκαν στο βήμα 3, όλων των διακεκριμένων ιδιοτιμών λ_i, $1 \le i \le s$.

Παράδειγμα 8.6 Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J του πίνακα A και ένας αντιστρέψιμος πίνακας M έτσι ώστε $J = M^{-1}AM$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 8.2 για τον υπολογισμό της κανονικής μορφής. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^3$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας $\nu_1 = 2$, και $\lambda_2 = 1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας $\nu_2 = 3$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, επειδή $r(A+I) = 4$, $r(A+I)^2 = 3$, από τις (8.30)-(8.31) έχουμε $\ell_1 = 5-4 = 1$, $\ell_2 = 4-3 = 1$, επομένως το διάγραμμα είναι $\begin{array}{c} \star \\ \star \end{array}$. Από την 1η γραμμή του διαγράμματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας στοιχειώδης Jordan πίνακας στο σύνθετο (block) Jordan, που είναι 2×2 -λόγω αλγεβρικής πολλαπλότητας- και το μήκος της αλυσίδας είναι $\tilde{k}_{1,1} = 2$, -όσο και το άθροισμα των ★ της στήλης-, δηλαδή,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$, επειδή $r(A-I) = 3$, $r(A-I)^2 = r(A-I)^3 = 2$, από τις (8.30)-(8.31) έχουμε $\ell_1 = 5-3 = 2$, $\ell_2 = 3-2 = 1$, επομένως το διάγραμμα είναι $\begin{array}{cc} \star & \star \\ \star & \end{array}$. Από την 1η γραμμή του διαγράμματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο στοιχειώδεις πίνακες Jordan στο σύνθετο (block) Jordan, το οποίο είναι 3×3, -λόγω αλγεβρικής πολλαπλότητας της ιδιοτιμής-, και το μήκος της αλυσίδας που αντιστοιχεί στον πρώτο στοιχειώδη πίνακα Jordan είναι $\tilde{k}_{2,1} = 2$, οπότε $J_{2,\tilde{k}_{2,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και το μήκος της δεύτερης αλυσίδας είναι $\tilde{k}_{2,2} = 1$ άρα $J_{2,\tilde{k}_{2,2}} = (1)$. Το αντίστοιχο σύνθετο (block) Jordan είναι

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την (8.28), ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan είναι

$$J = diag\left(J_1, J_2\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

● Στην $\lambda_1 = -1$, αντιστοιχεί μία αλυσίδα (επειδή η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ένα, υπάρχει ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα) μήκους $\tilde{k}_{1,1} = 2$. Από την εξίσωση $(A+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V\left(-1\right) = \left\{x_1\left(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\right)^t \ \boldsymbol{:} \ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_{11} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t$.

Από την εξίσωση $(A+I)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ υπολογίζονται ως λύση της τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = (1+x_5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x_5)^t$, $x_5 \in \mathbb{R}$. Από αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (για $x_5 = 0$) και το τοποθετούμε ως δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της αλυσίδας, $\boldsymbol{x}_{12} = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$.

Επομένως, τα στοιχεία της αλυσίδας, που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = -1$, είναι $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}$.

● Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ αντιστοιχούν δύο αλυσίδες, επειδή η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 2, (υπάρχουν δύο ★ στην 1η γραμμή του διαγράμματος των ★). Άρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, μήκους $\tilde{k}_{2,1} = 2$ και $\tilde{k}_{2,2} = 1$ αντίστοιχα. Από την εξίσωση $(A-I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V\left(1\right) = \left\{x_5\left(5 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1\right)^t + x_4\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\right)^t \ : \ x_4, x_5 \in \mathbb{R}\right\}$.

Επιλέγουμε ως ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{x}_3 = (5 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^t$ και $\boldsymbol{x}_5 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^t$. Θεωρώντας ότι το πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας μήκους 2 είναι το $\boldsymbol{x}_3 \equiv \boldsymbol{x}_{31}$, από την (8.26) υπολογίζεται το δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας. Δηλαδή από την εξίσωση $(A-I)\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_3$, βρίσκουμε ως λύση της τα διανύσματα

$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+5x_5 & \frac{1}{2}+2x_5 & 2x_5 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^t$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. Από αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα και το τοποθετούμε ως δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της αλυσίδας (θέτοντας $x_4 = x_5 = 0$), $\boldsymbol{x}_{32} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$. Επομένως, η αλυσίδα μήκους 2, που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = 1$, είναι $\boldsymbol{x}_{31}, \boldsymbol{x}_{32}$.

Τελικά, τα διανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ είναι $\boldsymbol{x}_{31}, \boldsymbol{x}_{32}, \boldsymbol{x}_5$.

Η βάση Jordan αποτελείται από τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_{31}, \boldsymbol{x}_{32}, \boldsymbol{x}_5$.

Ο αντιστρέψιμος πίνακας M έχει στήλες όλα τα διανύσματα της βάσης,

$$M = (\boldsymbol{x}_{11} \quad \boldsymbol{x}_{12} \quad \boldsymbol{x}_{31} \quad \boldsymbol{x}_{32} \quad \boldsymbol{x}_5)$$

και υπολογίζεται ότι ο αντίστροφός του είναι :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 5/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως, από την ισότητα στην (8.29) η κανονική μορφή Jordan είναι

$$M^{-1}AM = J.$$

◆◆◆

Παρατήρηση 8.9 Εδώ χρειάζεται να τονίσουμε ότι η επιλογή του ιδιοδιανύσματος που θα είναι πρώτο στην αλυσίδα, για να υπολογισθούν τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα από την (8.26), εξαρτάται από το αν το σύστημα, που προκύπτει από την πρώτη ισότητα της (8.26), έχει λύση.

Στο Παράδειγμα 8.6, αν επιλέξουμε ως πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}_5$, αναζητώντας στη συνέχεια το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}$ (ως δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας), θα διαπιστώσουμε ότι το σύστημα $(A-I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_5$ είναι αδύνατο.

8.5 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 8.7 Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους πίνακες διαγωνοποιούνται και εκτελέσετε τη διαγωνοποίηση, όποτε αυτό είναι δυνατόν:

$$\text{i)}\;\; A=\begin{pmatrix}4&0&0\\5&3&2\\-2&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{ii)}\;\; B=\begin{pmatrix}0&-4&-6\\-1&0&-3\\1&2&5\end{pmatrix}\qquad \text{iii)}\;\; \Gamma=\begin{pmatrix}2&4&3\\-4&-6&-3\\3&3&1\end{pmatrix}$$

$$\text{iv)}\;\; E=\begin{pmatrix}5&0&-1\\0&5&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

Απόδειξη : i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-4&0&0\\-5&\lambda-3&-2\\2&0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4),$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ και $\lambda_3=4$. Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.2).

Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, από την εξίσωση $(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $i=1,2,3$, λύνουμε το σύστημα που προκύπτει, και επιλέγουμε από τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος κάποιο ιδιοδιάνυσμα, το οποίο τοποθετούμε ως στήλη στον πίνακα P.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$, έχουμε

$$(A-2I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\;\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}2&0&0\\5&1&2\\-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0\\5x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=-2x_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\;\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\; x_3\in\mathbb{R},$$

οπότε ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(2)=\left\{x_3\begin{pmatrix}0&-2&1\end{pmatrix}^t\;:x_3\in\mathbb{R}\right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=(0\;\;-2\;\;1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1=2$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=3$, έχουμε

$$(A-3I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου η λύση του ομογενούς συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(3)=\left\{x_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2=(0 \quad 1 \quad 0)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2=3$.

- Τέλος, για $\lambda_3=4$ έχουμε $(A-4I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(4)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}^t \ : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3=(1 \quad 3 \quad -1)^t$, ως ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_3=4$.

Τα $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 7.5), τα τοποθετούμε στήλες στον πίνακα

$$P=(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Από την (i) της (8.1) μία διαγωνοποίηση του A είναι

$$P^{-1}AP=\varDelta=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ii) Ο πίνακας B έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_B(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$ (διπλή ρίζα). Επειδή, μία ιδιοτιμή είναι πολλαπλή, εξετάζουμε αν η ισότητα στην (8.8) επαληθεύεται (Παρατήρηση 8.1 (ii)) και έχουμε

$$(B-I)(B-2I)=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\mathbb{O}.$$

Συνεπώς, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, το οποίο αποτελείται από διακεκριμένους πρωτοβάθμιους παράγοντες, οπότε ο πίνακας B διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.4). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα P χρειάζεται να βρούμε και τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος που προκύπτει από την εξίσωση $(B - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, για κάθε $i = 1, 2$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, έχουμε

$$(B - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(1) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \; : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (-2 \quad -1 \quad 1)^t$, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3 = 4$.

- Για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, έχουμε

$$(B - 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(2) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t + x_3 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \; : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = (-2 \quad 1 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = (-3 \quad 0 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$.

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1 κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

και επειδή $\det P = -1 \neq 0$, ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Από την (i) της (8.1) μία διαγωνοποίηση του B είναι

$$P^{-1}BP = \varDelta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ είναι $\chi_{\Gamma}(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda+2)^2(\lambda-1)$. Επειδή μία ιδιοτιμή είναι πολλαπλή, σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.1 (ii), βρίσκουμε ότι δεν επαληθεύεται η (8.8), διότι

$$(\Gamma + 2I)(\Gamma - I) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}.$$

Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_{\Gamma}(\lambda) = \chi_{\Gamma}(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-1)$, το οποίο δεν αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες. Συνεπώς δεν ισχύει η Πρόταση 8.4, και άρα ο πίνακας Γ **δε** διαγωνοποιείται.

Παρατήρηση : Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και τον Αλγόριθμο 8.1. Πράγματι, υπολογίζοντας τα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν για κάθε ιδιοτιμή έχουμε

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$, από την εξίσωση $(\Gamma + 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα. Η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-2) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:} \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad -1 \quad 0)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$, από $(\Gamma - I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα. Η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(1) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:} \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, από όπου επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -1 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = 1$.

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα, που βρίσκουμε είναι λιγότερα από το μέγεθος του πίνακα Γ , δεν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας P . Επομένως ο πίνακας Γ **δε** διαγωνοποιείται.

iv) Ο πίνακας E έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_E(\lambda) = (\lambda-5)^3$. Επειδή τα ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (Πρόταση 7.10 (iii)), πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα είναι :

$$m_1(\lambda) = \lambda - 5, \quad m_2(\lambda) = (\lambda-5)^2 \quad \text{και} \quad m_3(\lambda) = \chi_E(\lambda) = (\lambda-5)^3$$

Κάνοντας πράξεις έχουμε

$$E-5I=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\neq \mathbb{O}\,,\ \left(E-5I\right)^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq \mathbb{O}\ \text{και μόνο}\ \left(E-5I\right)^3=\mathbb{O}\,,$$

οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_E\left(\lambda\right)=\chi_E\left(\lambda\right)=\left(\lambda-5\right)^3$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διακεκριμένων παραγόντων, ο πίνακας E **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.4).

Παρατήρηση : Χωρίς να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο, μπορούμε να ελέγξουμε αν επαληθεύεται η (8.8). Επειδή ισχύει $E-5I\neq\mathbb{O}$, είναι φανερό ότι ο πίνακας E **δε** διαγωνοποιείται. ◆◆◆

Παράδειγμα 8.8 Να εξετάσετε αν οι επόμενες γραμμικές απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ είναι διαγωνοποιήσιμες :

i) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(4x+2y+z-w,\ 3x+5y-z+4w,\ 2z+5w,\ 2w\right)$

ii) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(-6x+4y+9w,\ -3x+z+6w,\ -x-2y+z,\ -4x+4y+7w\right)$

Απόδειξη : Επειδή η διαγωνοποίηση μιας γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από τη διαγωνοποίηση του αντίστοιχου πίνακα αναπαράστασής της (Ορισμός 8.2), για κάθε γραμμική απεικόνιση αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστοιχο πίνακα αναπαράστασής της και στη συνέχεια να εξετάσουμε τη διαγωνοποίηση του.

i) Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 5 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

. Επειδή ο πίνακας είναι της μορφής $\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ \mathbb{O} & A_2\end{pmatrix}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A\left(\lambda\right)=\chi_{A_1}\left(\lambda\right)\chi_{A_2}\left(\lambda\right)$ (Εφαρμογή 7.4 (i)).

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_1 είναι

$$\chi_{A_1}\left(\lambda\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-4 & -2\\ -3 & \lambda-5\end{pmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14=\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-7\right)$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_2 είναι

$$\chi_{A_2}\left(\lambda\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -5\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}=\left(\lambda-2\right)^2,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $\chi_A(\lambda)=\chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)=(\lambda-7)(\lambda-2)^3$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=7$ και $\lambda_2=2$ (τριπλή ρίζα). Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές για να υπολογίσουμε την (8.8) έχουμε

$$(A-7I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&-5&16\\0&0&5&-16\\0&0&0&-25\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}.$$

Συνεπώς, ο A **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άλλωστε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda)\equiv\chi_A(\lambda)=(\lambda-7)(\lambda-2)^3$, διότι ισχύουν

$$(A-7I)(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&-25\\0&0&0&25\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O},\quad \text{και}\quad (A-7I)(A-2I)^3=\mathbb{O}.$$

Η απεικόνιση f έχει το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο με τον πίνακα A,κατά συνέπεια η f **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμη, διότι το ελάχιστο πολυώνυμό της δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων (Πόρισμα 8.2).

ii) Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι

$B=\begin{pmatrix}-6&4&0&9\\-3&0&1&6\\-1&-2&1&0\\-4&4&0&7\end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\chi_B(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda+6&-4&0&-9\\3&\lambda&-1&-6\\1&2&\lambda-1&0\\4&-4&0&\lambda-7\end{pmatrix}$$

και κάνοντας την γραμμοπράξη $r_3\to(\lambda-1)r_2+r_3$ έχουμε

$$\chi_B(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda+6&-4&0&-9\\3&\lambda&-1&-6\\3\lambda-2&\lambda(\lambda-1)+2&0&-6\lambda+6\\4&-4&0&\lambda-7\end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια αναπτύσσοντας ως προς την Τρίτη στήλη την τελευταία ορίζουσα προκύπτει

$$\chi_B(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda+6 & -4 & -9\\ 3\lambda-2 & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6\\ 4 & -4 & \lambda-7\end{pmatrix}.$$

Στην τελευταία ορίζουσα προσθέτουμε τη δεύτερη στήλη στην πρώτη και με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται στην πρώτη στήλη κοινός παράγοντας $(\lambda+2)$, οπότε

$$\chi_B(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda+2 & -4 & -9\\ \lambda(\lambda+2) & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6\\ 0 & -4 & \lambda-7\end{pmatrix}=(\lambda+2)\det\begin{pmatrix}1 & -4 & -9\\ \lambda & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6\\ 0 & -4 & \lambda-7\end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του τελευταίου πίνακα ως προς την πρώτη στήλη παίρνουμε $\chi_B(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda^3-4\lambda^2-7\lambda+10)=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$ και $\lambda_3=-2$ (διπλή ρίζα). Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές, για να επαληθεύσουμε την ισότητα στην (8.8) έχουμε

$$(B-I)(B-5I)(B+2I)=\mathbb{O}. \tag{8.32}$$

Συνεπώς ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος, διότι από την (8.32) συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$$m_B(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2),$$

το οποίο ταυτίζεται με αυτό της απεικόνισης f και αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες. Άρα η απεικόνιση f είναι διαγωνοποιήσιμη (Πόρισμα 8.2). ◆◆◆

Εφαρμογή 8.1 i) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $qA+rI$, $q,r\in\mathbb{F}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, όταν $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος.*

ii) *Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας* $B=\begin{pmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ b & \cdots & b & a & b\\ b & \cdots & b & b & a\end{pmatrix}$, *με $a,b\in\mathbb{F}$, και αν η απάντηση είναι θετική, να γράψετε τη διαγώνια μορφή του.*

Απόδειξη : i) Επειδή ο πίνακας A διαγωνοποιείται στο $\mathbb{F}$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας $\Delta=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in M_n(\mathbb{F})$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα (ii) της σχέσης (8.1), δηλαδή,

$$A = P\Delta P^{-1}. \tag{8.33}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τον πίνακα A από την (8.33), ο πίνακας $qA + rI$ γράφεται

$$\begin{aligned} qA + rI &= qP\Delta P^{-1} + rPP^{-1} = P\left(q\Delta + rI\right)P^{-1} \\ &= Pdiag\left(q\lambda_1 + r, q\lambda_2 + r, \ldots, q\lambda_n + r\right)P^{-1} \end{aligned}. \tag{8.34}$$

Από την (8.34) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ο ίδιος αντιστρέψιμος πίνακας ομοιότητας P, ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα $qA + rI$.

ii) Ο πίνακας B γράφεται $B = bA + (a-b)I$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ και $a, b \in \mathbb{F}$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.3 (iv), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ (αλγεβρικής πολλαπλότητας $n-1$) και $\lambda_2 = n$ και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$. Οπότε, το $m_A(\lambda)$ έχει διακεκριμένους πρωτοβάθμιους παράγοντες στο $m_A(\lambda)$, άρα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, (Πρόταση 8.4). Έστω ότι υπάρχει P τέτοιος ώστε $A = Pdiag(0, 0, \ldots, 0, n)P^{-1}$. Από το προηγούμενο ερώτημα και τη γραφή του πίνακα B προκύπτει ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και μάλιστα από την (8.34) μπορούμε να γράψουμε

$$B = bA + (a-b)I = Pdiag\left((a-b), (a-b), \ldots, (a-b),\ nb + a - b\right)P^{-1}.$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 8.2 *Δίνεται ο πραγματικός πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2-a & a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

i) *Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.*

ii) *Για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ που ο πίνακας A δε διαγωνοποιείται, να βρείτε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα.*

Απόδειξη : i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 4 & -1\\ 0 & \lambda-(2-a) & -(a-1) & -(a+1)\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$
$$=(\lambda-2)\det\begin{pmatrix}\lambda-(2-a) & -(a-1) & -(a+1)\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-1)\left(\lambda^2-(4-a)\lambda+3-3a\right)$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1+a)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ και $\lambda_4=1-a$.

• Στην περίπτωση όπου, $a\neq 0$, $a\neq -1$ και $a\neq -2$, οι ιδιοτιμές είναι όλες διακεκριμένες, και επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.2).

• Για $a=0$, ο πίνακας A γράφεται $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)$. Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές για να επαληθεύσουμε την (8.8) παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(A-I)(A-2I)(A-3I)=\mathbb{O}.$$

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, από όπου συμπεραίνουμε ότι, για $a=0$, ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.4).

ii) • Εξετάζοντας την περίπτωση όπου $a=-1$, ο πίνακας A γράφεται

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-3)$ και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_2=2$, και $\lambda_3=3$.

Επειδή $(A-I)(A-2I)(A-3I)\neq\mathbb{O}$, δεν ισχύει η (8.8), άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)$. Συνεπώς δεν επαληθεύεται η Πρόταση 8.4, και άρα ο πίνακας A **δε** διαγωνοποιείται. Για να υπολογίσουμε την κανονική μορφή Jordan χρειάζεται να βρούμε από το διάγραμμα των ★ τα σύνθετα (block) Jordan του A.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.7, υπολογίζουμε τους βαθμούς των πινάκων $r(A-2I)=3$, $r\left((A-2I)^2\right)=2$ και από τις σχέσεις στις (8.30), (8.31) έχουμε $\ell_1 = 4-3=1$ και $\ell_2 = 3-2=1$. Οπότε, το διάγραμμα ★ είναι της μορφής $\begin{matrix}\bigstar\\\bigstar\end{matrix}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ αντιστοιχεί ένα σύνθετο (block) Jordan, τύπου 2×2, που είναι της μορφής $J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Σύμφωνα με τα σχόλια της Παρατήρησης 8.8, επειδή οι άλλες ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες (έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1) δημιουργούν σύνθετο (block) Jordan, τύπου 1×1, οπότε είναι $J_2 = (1)$, $J_3 = (3)$. Τελικά, για $a=-1$, εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.6, η κανονική μορφή Jordan είναι

$$J = diag(J_1, J_2, J_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Για $a=-2$, ο πίνακας A γράφεται

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-1)(\lambda-2)$ και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Επειδή $(A-I)(A-2I)(A-3I) \neq \mathbb{O}$, δεν ισχύει η (8.8), άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$. Συνεπώς δεν επαληθεύεται η Πρόταση 8.4, επομένως ο πίνακας A **δε** διαγωνοποιείται. Για να υπολογίσουμε την κανονική μορφή Jordan χρειάζεται να βρούμε από το διάγραμμα των ★ τα σύνθετα (block) Jordan του A. Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ έχει πολλαπλότητα, για την εφαρμογή της Πρότασης 8.7 απαιτείται ο υπολογισμός των βαθμών των αντίστοιχων πινάκων, που είναι $r(A-3I)=3$, $r\left((A-3I)^2\right)=2$. Από τις σχέσεις στις (8.30), (8.31) έχουμε $\ell_1 = 4-3=1$ και $\ell_2 = 3-2=1$. Οπότε το διάγραμμα ★ είναι της μορφής $\begin{matrix}\bigstar\\\bigstar\end{matrix}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ αντιστοιχεί ένα σύνθετο (block) Jordan, τύπου 2×2, που είναι της μορφής $J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Για τις άλλες ιδιοτιμές λ_2, λ_3 με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_2 = \nu_3 = 1$ δημιουργούνται τα σύνθετα (block) Jordan τύπου 1×1, $J_2 = (1)$, $J_3 = (2)$. Οπότε, για $a = -2$, η κανονική μορφή Jordan είναι

$$J = diag(J_1, J_2, J_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 8.3 *Έστω ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} -5 & b & a \\ -4 & 2 & a \\ -4 & b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

i) *Αν είναι γνωστό ότι* $\lambda_1 = -1$ *είναι ιδιοτιμή του* A, *με αλγεβρική πολλαπλότητα* $\nu_1 = 3$, *να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων* $a, b \in \mathbb{R}$.

Για τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ *που υπολογίσθηκαν στο* i)

ii) *να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του* A

iii) *να αποδείξετε ότι ισχύουν* $A^3 = 3A + 2I$ *και* $A^4 = -4A - 3I$,

iv) *να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα* M, *έτσι ώστε* $M^{-1}AM = J$, *όπου* J *η κανονική μορφή Jordan του πίνακα* A.

Απόδειξη : i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+5 & -b & -a \\ 4 & \lambda-2 & -a \\ 4 & -b & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (4a + 4b - ab - 10)\lambda + 3ab - 8a.$$

Επειδή $\lambda_1 = -1$ είναι ρίζα του $\chi_A(\lambda)$ ως ιδιοτιμή του A ισχύει

$$\chi_A(-1) = 0 \Leftrightarrow 12 - 12a - 4b + 4ab = 0 \Leftrightarrow (3-b)(1-a) = 0. \qquad (8.35)$$

Επιπλέον η ρίζα του $\chi_A(\lambda)$ είναι τριπλή, άρα μηδενίζει και τις παραγώγους του $\chi_A(\lambda)$, δηλαδή

$$\chi'_A(\lambda_1) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda_1^2 + 6\lambda_1 + 4a + 4b - ab - 10 = 0 \Leftrightarrow 4a + 4b - ab - 13 = 0. \qquad (8.36)$$

Από τη λύση του συστήματος των (8.35) και (8.36) προκύπτει, $a = 1$ και $b = 3$.

ii) Αντικαθιστώντας τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ από (i) ο πίνακας γράφεται

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ -4 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)^3$, ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας $\nu_1=3$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και είναι το πολυώνυμο μικροτέρου βαθμού που επαληθεύει ο πίνακας A. Επομένως αναζητούμε το ελάχιστο πολυώνυμο ανάμεσα στα πολυώνυμα :

$$m_1(\lambda)=\lambda+1,\quad m_2(\lambda)=(\lambda+1)^2 \quad \text{και} \quad \chi_A(\lambda).$$

Επειδή ισχύουν $A+I=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ -4 & 3 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}$ και $(A+I)^2=\mathbb{O}$, συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda)=(\lambda+1)^2$.

iii) Σύμφωνα με τη (b) ιδιότητα στον Ορισμό 7.4 ισχύει

$$m_A(A)=\mathbb{O} \Leftrightarrow (A+I)^2=\mathbb{O} \Leftrightarrow A^2+2A+I=\mathbb{O},$$

από όπου παίρνουμε

$$A^2=-2A-I. \tag{8.37}$$

Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1 (Cayley-Hamilton) ισχύει $\chi_A(A)=\mathbb{O}$, οπότε κάνοντας πράξεις και αντικατάσταση από την (8.37) έχουμε

$$(A+I)^3=\mathbb{O} \Leftrightarrow A^3+3A^2+3A+I=\mathbb{O} \Leftrightarrow A^3=-3(-2A-I)-3A-I=3A+2I.$$

Ακόμη από την (8.37) προκύπτει

$$A^4=(A^2)^2=(-2A-I)^2=4A^2+4A+I = 4(-2A-I)+4A+I=-4A-3I.$$

iv) Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο δεν αποτελείται από διακεκριμένους παράγοντες, ο πίνακας A **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.4). Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα A. Επίσης, επειδή υπάρχει μόνο μία ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε αυτήν ένα σύνθετο (block) Jordan. Από το διάγραμμα των ★ υπολογίζουμε τους στοιχειώδεις Jordan πίνακες του σύνθετου (block) Jordan του A. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.7, υπολογίζουμε τους βαθμούς των πινάκων $r(A+I)=1$, $r\left((A+I)^2\right)=0$ και από τις σχέσεις στις (8.30),(8.31) έχουμε $\ell_1 = 3-1 = 2$ και $\ell_2 = 1-0 = 1$. Οπότε, το διάγραμμα των ★ είναι της μορφής $\begin{matrix} \bigstar & \bigstar \\ \bigstar & \end{matrix}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Ο πρώτος είναι τύπου 2×2 και αντιστοιχεί σε αυτόν μια αλυσίδα μήκους $\tilde{k}_{1,1} = 2$, οπότε ο στοιχειώδης πίνακας Jordan έχει τη μορφή $J_{1,\tilde{k}_{1,1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και ο δεύτερος στοιχειώδης πίνακας Jordan είναι τύπου 1×1, αφού σε αυτόν αντιστοιχεί αλυσίδα μήκους $\tilde{k}_{1,2} = 1$, και ο στοιχειώδης πίνακας είναι $J_{1,\tilde{k}_{1,2}} = (-1)$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.6, η κανονική μορφή Jordan είναι

$$J = diag\left(J_{1,\tilde{k}_{1,1}}, J_{1,\tilde{k}_{1,2}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό της βάσης Jordan ακολουθούμε τον Αλγόριθμο 8.2 (βήμα 5 – 7). Από την εξίσωση $(A+I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, του οποίου η λύση είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 4x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Θεωρώντας ότι το πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας μήκους 2 είναι το $\hat{\boldsymbol{x}}_1 = (x_1 \quad x_2 \quad 4x_1 - 3x_2)^t$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ από την (8.26) υπολογίζουμε το δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Από $(A+I)\boldsymbol{x}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}_1$ προκύπτει σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & 1 & x_1 \\ -4 & 3 & 1 & x_2 \\ -4 & 3 & 1 & 4x_1 - 3x_2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3(x_1 - x_2) \end{array}\right) = \left(B \mid \tilde{\boldsymbol{x}}_1\right),$$

από όπου είναι φανερό ότι το σύστημα $(A+I)\boldsymbol{x}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}_1$ έχει λύση μόνο όταν $x_1 = x_2$. Έτσι οδηγούμαστε στο $\hat{\boldsymbol{x}}_1 = (x_1 \quad x_1 \quad 4x_1 - 3x_1)^t = x_1(1 \quad 1 \quad 1)^t$, $x_1 \in \mathbb{R}$ από όπου επιλέγουμε το πρώτο διάνυσμα για την αλυσίδα μήκους $\tilde{k}_{1,1} = 2$ να είναι το $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_{11} = (1 \quad 1 \quad 1)^t$, που βρίσκεται για $x_1 = 1$. Τότε, ο επαυξημένος πίνακας $\left(B \mid \tilde{\boldsymbol{x}}_1\right)$ γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, από όπου προκύπτει ότι η λύση του $(A+I)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ είναι τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2 = (x_1 \quad x_2 \quad 1 + 4x_1 - 3x_2)^t$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε ως δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της αλυσίδας $\boldsymbol{x}_{12} = (0 \quad 0 \quad 1)^t$ (το βρίσκουμε για $x_1 = x_2 = 0$).

Επομένως, η αλυσίδα μήκους 2 που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = -1$ είναι $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}$.

Για το τρίτο διάνυσμα που χρειάζεται στη βάση και αντιστοιχεί στη δεύτερη αλυσίδα μήκους $\tilde{k}_{1,2} = 1$, επειδή κανένα από τα διανύσματα που παράγουν τον ιδιόχωρο δεν χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη αλυσίδα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από αυτά. Επειδή, τα στοιχεία του ιδιοχώρου σημειώνονται

$$V(-1) = \left\{ \left(x_1 \quad x_2 \quad 4x_1 - 3x_2 \right)^t = x_1 \left(1 \quad 0 \quad 4\right)^t + x_2 \left(0 \quad 1 \quad -3\right)^t \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

επιλέγουμε για τη βάση το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (1 \quad 0 \quad 4)^t$ ή το $\boldsymbol{x}_4 = (0 \quad 1 \quad -3)^t$.

- Αν η βάση Jordan αποτελείται από τα διανύσματα $\{\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_3\}$, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.2, ο αντιστρέψιμος πίνακας M_1 έχει στήλες τα διανύσματα της βάσης, και επομένως

$$M_1 = (\boldsymbol{x}_{11} \quad \boldsymbol{x}_{12} \quad \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{με} \quad M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, από την (8.29) η κανονική μορφή Jordan είναι $M_1^{-1} A M_1 = J$ (Πρόταση 8.6).

- Αν η βάση Jordan αποτελείται από τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{x}_4$, ο αντιστρέψιμος πίνακας M_2 είναι

$$M_2 = (\boldsymbol{x}_{11} \quad \boldsymbol{x}_{12} \quad \boldsymbol{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{με} \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και η κανονική μορφή Jordan είναι $M_2^{-1} A M_2 = J$. ♦♦♦

Εφαρμογή 8.4 (γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων)

i) *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας και το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που περιγράφεται από την εξίσωση*

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t),$$

όπου $\mathbf{x}(t)=\left(x_1(t)\quad x_2(t)\quad \ldots \quad x_n(t)\right)^t$, *με* $t\in\mathbb{R}$ *και* $x_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις* $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, *που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.*

ii) *Να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων*

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)+2x_2(t)+2x_3(t)+3x_4(t)\\ x_2'(t) &= 2x_2(t)+4x_3(t)+x_4(t)\\ x_3'(t) &= -3x_3(t)+x_4(t)\\ x_4'(t) &= -6x_3(t)+2x_4(t) \end{aligned}$$

όπου $t\in\mathbb{R}$, $x_i(t)$ *είναι πραγματικές συναρτήσεις για κάθε* $i=1,2,3,4$.

iii) *Έστω ότι μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης με σταθερούς συντελεστές,* a_i, $i=0,1,\ldots,n$ *είναι της μορφής :*

$$a_n\frac{d^n z(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}z(t)}{dt^{n-2}}+\cdots+a_1\frac{dz(t)}{dt}+a_0 z(t)=0$$

όπου $a_n\neq 0$, $z(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *η άγνωστη παραγωγίσιμη συνάρτηση,* $t\in\mathbb{R}$ *και* $\dfrac{d^k z(t)}{dt^k}$ *η k-τάξης παράγωγος της* $z(t)$. *Να μετατραπεί η ομογενής διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.*

Απόδειξη : i) Για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης $x_i'(t)=\lambda_i x_i(t)$ με $\lambda_i\in\mathbb{R}$ και $i\in\mathbb{N}$, είναι γνωστό ότι η γενική λύση τους είναι της μορφής

$$x_i(t)=ce^{\lambda_i t},\quad c\in\mathbb{R}. \tag{8.38}$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, που δόθηκε, γράφεται με τη μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix},$$

όπου $A=\left(a_{ij}\right)$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Επειδή, ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, έτσι ώστε $A=P\Delta P^{-1}$, με $\Delta=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$, όπου $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A (Ορισμός 8.1β). Οπότε το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = P\Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}. \qquad (8.39)$$

Θέτουμε

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad (8.40)$$

οπότε με αντικατάσταση της (8.40) στην (8.39) καταλήγουμε :

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία ισότητα των πινάκων έχουμε $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, οπότε από την (8.38) βρίσκουμε τις λύσεις των y_i , οι οποίες είναι $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$, όπου c_i είναι πραγματικές σταθερές.

Πολλαπλασιάζοντας την (8.40) αριστερά επί P και αντικαθιστώντας τις λύσεις y_i , προκύπτει η γενική λύση του διαφορικού συστήματος που είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \qquad (8.41)$$

Η γενική λύση του συστήματος, σύμφωνα με την (8.41), εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα A και τον πίνακα διαγωνοποίησης του.

ii) Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι σύνθετος της μορφής $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4 (i), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)$, όπου

$$\chi_{A_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2), \quad \chi_{A_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 \\ 6 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1).$$

Συνεπώς, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ και $\lambda_4 = 2$, όλες είναι διακεκριμένες, επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.2). Για να υπολογίσουμε τις πραγματικές συναρτήσεις $x_i(t)$, $i = 1,2,3,4$, με $t \in \mathbb{R}$, από την (8.41) είναι φανερό ότι χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα P, άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παραπάνω ιδιοτιμών.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$, από $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του δίνεται από τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(0) = \left\{x_3\begin{pmatrix}-8 & -7 & 2 & 6\end{pmatrix}^t \,:\, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (-8 \quad -7 \quad 2 \quad 6)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, από το σύστημα $(A+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του δίνεται από τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-1) = \left\{x_3\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}^t \,:\, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (-2 \quad -2 \quad 1 \quad 2)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = -1$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$, από $(A-I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές που η λύση του δίνεται από τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(1) = \left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \,:\, x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_3 = 1$.
- Και τέλος, για την ιδιοτιμή $\lambda_4 = 2$, από $(A-2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, που η λύση του δίνεται από τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(2) = \left\{x_2\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \,:\, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_4 = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_4 = 2$.

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, ο πίνακας P είναι

$$P=(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3 \quad \boldsymbol{x}_4)=\begin{pmatrix}-8 & -2 & 1 & 2\\ -7 & -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

και από την (8.41) οι συναρτήσεις $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$, είναι

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2 & 1 & 2\\ -7 & -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^0\\ c_2e^{-t}\\ c_3e^t\\ c_4e^{2t}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1(t)=-8c_1-2c_2e^{-t}+c_3e^t+2c_4e^{2t}\\ x_2(t)=-7c_1-2c_2e^{-t}+c_4e^{2t}\\ x_3(t)=2c_1+c_2e^{-t}\\ x_4(t)=6c_1+2c_2e^{-t}\end{matrix}\quad, \ c_i\in\mathbb{R}\ .$$

Ο υπολογισμός των σταθερών $c_i \in \mathbb{R}$ γίνεται εφόσον δοθούν αρχικές συνθήκες στο πρόβλημα.

iii) Λύνουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση ως προς την παράγωγο n–τάξης (εφόσον $a_n \neq 0$) και έχουμε :

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{d^{n-2}z(t)}{dt^{n-2}}-\cdots-\frac{a_1}{a_n}\frac{dz(t)}{dt}-\frac{a_0}{a_n}z(t)$$

Θέτουμε n το πλήθος νέες πραγματικές συναρτήσεις ως εξής:

$$x_1(t)=z(t),\quad x_2(t)=\frac{dz(t)}{dt},\quad x_3(t)=\frac{d^2z(t)}{dt^2},\ldots,\ x_{n-1}(t)=\frac{d^{n-2}z(t)}{dt^{n-2}} \text{ και } x_n(t)=\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}$$

Θεωρώντας την πρώτη παράγωγο σε κάθε μία από τις νέες συναρτήσεις και αντικαθιστώντας με τις παραγώγους ανάλογης τάξης της $z(t)$ καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$\begin{aligned}
x_1'(t)&=\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{dz(t)}{dt}=x_2(t)\\
x_2'(t)&=\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{d^2z(t)}{dt^2}=x_3(t)\\
x_3'(t)&=\frac{dx_3(t)}{dt}=\frac{d^3z(t)}{dt^3}=x_4(t)\\
&\vdots\\
x_{n-1}'(t)&=\frac{dx_{n-1}(t)}{dt}=\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}=x_n(t)\\
x_n'(t)&=\frac{dx_n(t)}{dt}=\frac{d^nz(t)}{dt^n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{d^{n-2}z(t)}{dt^{n-2}}-\cdots-\frac{a_1}{a_n}\frac{dz(t)}{dt}-\frac{a_0}{a_n}z(t)\\
&=-\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t)-\frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1}(t)-\cdots-\frac{a_1}{a_n}x_2(t)-\frac{a_0}{a_n}x_1(t)
\end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα των εξισώσεων πρώτης τάξης είναι :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_4(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1}(t) - \cdots - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t) \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα με μορφή πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση : Ο πίνακας C του παραπάνω συστήματος είναι συνοδός πίνακας, (Εφαρμογή 7.8), συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του C είναι $\chi_C(\lambda) = \lambda^n - \frac{a_{n-1}}{a_n}\lambda^{n-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_n}\lambda - \frac{a_0}{a_n}$.

Στην περίπτωση όπου οι ιδιοτιμές του C είναι *διακεκριμένες*, ο C διαγωνοποιείται με πίνακα ομοιότητας P, ο οποίος έχει πρώτη γραμμή με στοιχεία 1, (Εφαρμογή 7.8 (iii)). Συνδυάζοντας τη μορφή του πίνακα P με τη λύση του παραπάνω συστήματος, η οποία δίνεται μέσω της γενικής λύσης των διαφορικών συστημάτων στην (8.41), συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με σταθερούς συντελεστές δίνεται

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t},$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του συνοδεύοντα πίνακα C. Οι σταθερές $c_i \in \mathbb{R}$ στη γενική λύση υπολογίζονται εφόσον δοθούν αρχικές συνθήκες στη διαφορική εξίσωση ◆◆◆

Εφαρμογή 8.5 (Ρίζες)

i) *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *διαγωνοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί πίνακες* X *οι οποίοι είναι λύση της εξίσωσης* $X^2 = A$[1].

ii) *Να υπολογίσετε έναν πίνακα* X *τέτοιον ώστε* $X^2 = A$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$, *να υπολογίσετε μια πραγματική λύση της εξίσωσης* $X^3 = A$.

Απόδειξη : i) Επειδή ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαγωνοποιείται, υπάρχει αντιστρέψιμος πραγματικός πίνακας P και διαγώνιος πραγματικός πίνακας $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, όπου οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι όλοι μη αρνητικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (ii) στην (8.1), δηλαδή

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

Θέτουμε

$$Y = P^{-1}XP. \tag{8.42}$$

Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα των δυνάμεων των διαγωνοποιήσιμων πινάκων (Πρόταση 8.3), καταλήγουμε στην $Y^2 = P^{-1}X^2P$ και με αντικατάσταση από την υπόθεση, $X^2 = A$, και τη σχέση (8.1) έχουμε

$$Y^2 = P^{-1}AP = P^{-1}(P\Delta P^{-1})P = (P^{-1}P)\Delta(P^{-1}P) = \Delta.$$

Συνεπώς, θέτοντας $Y = diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right)$, από την (8.42) προκύπτει

$$X = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) \cdot P^{-1} \quad . \tag{8.43}$$

Διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες X είναι πραγματικοί και κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$X^2 = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) \cdot (P^{-1}P) \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) P^{-1} = P\Delta P^{-1}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι επαληθεύεται η εξίσωση $X^2 = A$, που σημαίνει ότι κάποιος από τους X της (8.43) αποτελεί μία τετραγωνική ρίζα του A.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (8.43) δίνει κάποιες τετραγωνικές ρίζες του A, όχι αναγκαστικά όλες.

---

[1] Ένας πίνακας $X \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα** του $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει $X^2 = A$.

Παρατήρηση : Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται όχι μόνο για τετραγωνικές ρίζες πινάκων αλλά γενικότερα για εξισώσεις της μορφής $X^m = A$, όπου ο A διαγωνοποιείται (βλέπε κυβικές ρίζες στο (iii) ερώτημα αυτής της εφαρμογής).

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$, επομένως ο A διαγωνοποιείται, επειδή έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές (Πρόταση 8.2) και μάλιστα αυτές είναι θετικοί αριθμοί, συνεπώς εφαρμόζεται το (i) της Εφαρμογής 8.5.

Από την (8.43) επιλέγουμε κάποιον από τους πίνακες

$$X = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}\right) \cdot P^{-1}.$$

Για να υπολογίσουμε ακριβώς τους πίνακες αυτούς χρειάζεται να υπολογίσουμε τον πίνακα P , βρίσκοντας τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών του A.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, από $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα. Η λύση του συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(2) = \left\{x_1 \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t \ :\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad 2)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 2$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, από $(A - 3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα. Η λύση του συστήματος είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(3) = \left\{x_1 \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t \ :\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = 3$.

Ο πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, διότι $\det P = -1 \neq 0$, με $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Επομένως, οι ζητούμενοι πίνακες X είναι της μορφής

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$ είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 8)$. Οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 8$, συνεπώς ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.2), με διαγώνια μορφή

$$A = P\Delta P^{-1},$$

όπου $\Delta = diag(1, 8)$ και P ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, από τη λύση του συστήματος $(A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(1) = \left\{x_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad -2)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 1$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$, από τη λύση του συστήματος $(A - 8I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(8) = \left\{x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad -1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 8$.

Ο πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, διότι $\det P = 1 \neq 0$, με $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Θέτουμε $Y = P^{-1}XP$, όπως στην (8.42). Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα των δυνάμεων των διαγωνοποιήσιμων πινάκων (Πρόταση 8.3) καταλήγουμε στην $Y^3 = P^{-1}X^3P$. Από τη διαγώνια μορφή του A, καθώς και από την υπόθεση έχουμε

$$Y^3 = P^{-1}AP = P^{-1}(P\Delta P^{-1})P = (P^{-1}P)\Delta(P^{-1}P) = \Delta = diag(1, 8).$$

Συνεπώς

$$Y = diag\left(1, \sqrt[3]{8}\right) = diag(1, 2), \tag{8.44}$$

επειδή αναζητούμε πραγματική λύση της εξίσωσης $X^3 = A$. Ισοδύναμα η (8.42) γράφεται $X = PYP^{-1}$ και με αντικατάσταση από την (8.44) έχουμε

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 8.6 (αναδρομικές ακολουθίες)

i) *Έστω οι πίνακες* $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2\\ 0,6 & 0,8\end{pmatrix}$ *και* $\boldsymbol{y}_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ *με* $a_n+b_n=1$*, για κάθε* $n=1,2,\ldots,$ *οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση* $\boldsymbol{y}_n=A\,\boldsymbol{y}_{n-1}$*. Αν* $b_1=0,2$*, να εκφράσετε τους όρους των ακολουθιών* (a_n) *και* (b_n) *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

ii) *Έστω η ακολουθία* (a_n), $n=1,2,\ldots$, *που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο* $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$, $n=3,4,\ldots$, *με* $a_1=1$, $a_2=4$. *Να βρεθεί ο γενικός όρος* a_n *ως συνάρτηση των* a_1,a_2 *και* n.

Απόδειξη : i) Υπολογίζοντας τη μορφή του $\boldsymbol{y}_n$, η δοθείσα ισότητα πινάκων $\boldsymbol{y}_n=A\,\boldsymbol{y}_{n-1}$ γράφεται και

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ισότητα διαδοχικά για τις διάφορες τιμές των n έχουμε

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}a_{n-2}\\ b_{n-2}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_{n-2}\\ b_{n-2}\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}a_{n-3}\\ b_{n-3}\end{pmatrix}=\ldots=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}. \qquad (8.45)$$

Από την (8.45) διαπιστώνουμε ότι είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-1}, προκειμένου να εκφράσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y}_n=(a_n \quad b_n)^t$ ως συνάρτηση των a_1,b_1 και $n\in\mathbb{N}$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-1,2\lambda+0,2=(\lambda-0,2)(\lambda-1)$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=0,2$ και $\lambda_2=1$, ο πίνακας A διαγωνοποιείται, (Πρόταση 8.2). Ο πίνακας A^{n-1} υπολογίζεται από την (8.6) της Πρότασης 8.3. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0,2$, έχουμε

$$(A-0,2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0,2 & 0,2\\ 0,6 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει αποτελεί τον ιδιόχωρο $V(0,2)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t \ : \ x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=(1 \quad -1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1=0,2$.

- Για $\lambda_2=1$, έχουμε

$$(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \iff \begin{pmatrix}-0,6 & 0,2\\ 0,6 & -0,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει αποτελεί τον ιδιόχωρο $V(1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^t \ : \ x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2=(1 \quad 3)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2=1$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, θέτοντας ως στήλες του τα ιδιοδιανύσματα που βρέθηκαν, δηλαδή, $P=(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Από την (8.6) έχουμε

$$A^{n-1}=P\begin{pmatrix}0,2^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\cdot 0,2^{n-1}+1 & 1-0,2^{n-1}\\ 3-3\cdot 0,2^{n-1} & 3+0,2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Μετά από αντικατάσταση του τελευταίου πίνακα στην ισότητα της (8.45) και της ισότητας $a_1+b_1=1$, καταλήγουμε :

$$\boldsymbol{y}_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\left(3\cdot 0,2^{n-1}+1\right)a_1+\left(1-0,2^{n-1}\right)b_1\\ \left(3-3\cdot 0,2^{n-1}\right)a_1+\left(3+0,2^{n-1}\right)b_1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+\left(3a_1-b_1\right)\cdot 0,2^{n-1}\\ 3+\left(-3a_1+b_1\right)\cdot 0,2^{n-1}\end{pmatrix}$$

Από την αρχική τιμή $b_1=0,2$ και $a_1+b_1=1$ υπολογίζεται $a_1=0,8$, οπότε με αντικατάστασή τους στην τελευταία ισότητα πινάκων παίρνουμε τις ακολουθίες :

$$a_n=\frac{1}{4}\left(1+2,2\cdot 0,2^{n-1}\right), \quad b_n=\frac{1}{4}\left(3-2,2\cdot 0,2^{n-1}\right), \quad n\geq 1$$

ii) Από τον αναδρομικό τύπο που δόθηκε μπορούμε να γράψουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}a_n&=2a_{n-1}+3a_{n-2}\\ a_{n-1}&=a_{n-1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix},$$

όπου αν θέσουμε $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, η προηγούμενη ισότητα πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{8.46}$$

Αν εφαρμόσουμε την (8.46) διαδοχικά, για τις διάφορες τιμές των n, έχουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = B^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{pmatrix} = \ldots = B^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}. \tag{8.47}$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον B^{n-2}, προκειμένου να εκφράσουμε τον όρο a_n ως συνάρτηση των a_1, a_2 και n. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι δύο διαφορετικές (διακεκριμένες), $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$, οπότε ο πίνακας B διαγωνοποιείται, (Πρόταση 8.2). Επομένως ο πίνακας B^{n-2} υπολογίζεται από την (8.6) της Πρότασης 8.3. Για κάθε μία από τις παραπάνω ιδιοτιμές προσδιορίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, έχουμε

$$(B+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει αποτελεί τον ιδιόχωρο $V(-1) = \left\{ x_1 (1 \quad -1)^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad -1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -1$.

- Για $\lambda_2 = 3$, έχουμε

$$(B-3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει αποτελεί τον ιδιόχωρο $V(3) = \left\{ x_2 (3 \quad 1)^t \ : \ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (3 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 3$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, θέτοντας

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Από την (8.6) έχουμε

$$B^{n-2} = P\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} & -3(-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} & 3(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{pmatrix},$$

οπότε από την ισότητα πινάκων της (8.47) προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{\left((-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_2 + \left(-3(-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_1\right\}.$$

Για $a_1 = 1$ και $a_2 = 4$ έχουμε $a_n = \frac{1}{4}\left[(-1)^{n-2} + 5\cdot 3^{n-1}\right]$, $n \geq 3$. ♦♦♦

Εφαρμογή 8.7 *Έστω μία μηχανή, η οποία μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις τρεις καταστάσεις* : (1) *κατεστραμμένη προς επισκευή,* (2) *ανάγκη ρυθμίσεων,* (3) *κανονική λειτουργία. Η πιθανότητα να περάσει η μηχανή από τη μία κατάσταση στην άλλη παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα* A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{18} & \frac{8}{18} & \frac{9}{18} \end{pmatrix}$$

Να βρείτε :

i) *Ποια είναι η πιθανότητα, η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση* (i) *μετά από* k *χρονικές περιόδους, όπου* i =1, 2,3.

ii) *Ποια είναι η πιθανότητα, η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση* (i), όταν $k \to \infty$, (δηλαδή, την πιθανότητα της μόνιμης κατάστασης).

Απόδειξη : i) Αν $\boldsymbol{x}_0$ είναι το διάνυσμα της αρχικής κατάστασης, τότε το διάνυσμα κατάστασης μετά από k χρονικές περιόδους είναι

$$\boldsymbol{x}_k = A^k \boldsymbol{x}_0,$$

οπότε, αρκεί να υπολογίσουμε τον πίνακα A^k.

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \frac{41}{36}\lambda - \frac{5}{36} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{6})(\lambda - \frac{5}{6}),$$

οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ και $\lambda_3 = \frac{5}{6}$, άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται, (Πρόταση 8.2). Ο πίνακας A^k υπολογίζεται από την (8.6) της

Πρότασης 8.3. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, από $(A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(1) = \{x_1(1 \quad 1 \quad 1)^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$.
- Για $\lambda_2 = \frac{1}{6}$, από $(A - \frac{1}{6}I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V\left(\frac{1}{6}\right) = \{x_2(0 \quad 3 \quad -4)^t \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_2 = (0 \quad 3 \quad -4)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = \frac{1}{6}$.
- Για $\lambda_3 = \frac{5}{6}$, από $(A - \frac{5}{6}I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ προκύπτει ομογενές σύστημα, η λύση του οποίου είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V\left(\frac{5}{6}\right) = \{x_3(0 \quad 3 \quad 4)^t \ : \ x_3 \in \mathbb{R}\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_3 = (0 \quad 3 \quad 4)^t$ ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_3 = \frac{5}{6}$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, θέτοντας ως στήλες του τα ιδιοδιανύσματα που βρέθηκαν, δηλαδή,

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα $P^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Από την (8.6) έχουμε

$$A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^k & 0 \\ 0 & 0 & (5/6)^k \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\frac{t}{2}-\frac{3m}{8} & \frac{t}{2} & \frac{3m}{8} \\ 1-\frac{t}{2}-\frac{2m}{8} & \frac{2m}{3} & \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \qquad (8.48)$$

όπου $t = \left(\frac{5}{6}\right)^k + \left(\frac{1}{6}\right)^k$ και $m = \left(\frac{5}{6}\right)^k - \left(\frac{1}{6}\right)^k$.

Επομένως για κάθε τιμή του $k \in \mathbb{N}$ τα στοιχεία του πίνακα A^k υπολογίζονται από τον πίνακα στην (8.48).

ii) Όταν $k \to \infty$ τότε υπολογίζουμε $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$, βρίσκοντας το όριο κάθε στοιχείου του πίνακα A^k. Επειδή $\lim\limits_{k\to\infty} t = \lim\limits_{k\to\infty} m = 0$, από τον πίνακα της (8.48) έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία μορφή του πίνακα A^k σημαίνει ότι, όταν το k παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η μηχανή βρίσκεται μόνιμα στην κατάσταση (1). ♦♦♦

Εφαρμογή 8.8 *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις, αν είναι ορθή ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

i) *Αν ένας πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *διαγωνοποιείται, τότε ο ανάστροφός του είναι διαγωνοποιήσιμος.*

ii) *Ο πραγματικός* 2×2 *πίνακας* A *με* $\det A < 0$ *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

iii) *Υπάρχει μη μηδενικός* 2×2 *διαγωνοποιήσιμος πίνακας* A *τέτοιος ώστε* $trA = \det A = 0$.

iv) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, *ο πίνακας* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

v) *Αν ένας πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος, τότε ο ανάστροφός του είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος.*

vi) *Αν ένας πίνακας* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *είναι Ερμιτιανός, τότε* $tr\left(A^*A\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ *, όπου* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\sigma(A)$*, (όχι απαραίτητα διακεκριμένες).*

Απόδειξη : i) Ορθή. Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1β για τον διαγωνοποιήσιμο πίνακα A υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $A=P\Delta P^{-1}$ (βλέπε ισότητα (ii) στην (8.1)). Επιπλέον, αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα $B^tA^t=(AB)^t$ (Πρόταση 1.3) και αν τη συνδυάσουμε με την αντιστρεψιμότητα του P, διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$P^t\left(P^{-1}\right)^t=\left(P^{-1}P\right)^t=I^t=I\;\Rightarrow\;\left(P^{-1}\right)^t=\left(P^t\right)^{-1}. \tag{8.49}$$

Η αναστροφή στην ισότητα (ii) της (8.1) και η (8.49) δίνουν :

$$A^t=\left(P\Delta P^{-1}\right)^t=\left(P^{-1}\right)^t\Delta^tP^t=\left(P^t\right)^{-1}\Delta^tP^t=Q^{-1}\Delta Q\Rightarrow A^t=Q^{-1}\Delta Q=R\Delta R^{-1}$$

Επομένως, ο A^t διαγωνοποιείται από έναν αντιστρέψιμο πίνακα $R=Q^{-1}=(P^t)^{-1}$.

ii) Ορθή. Θεωρούμε έναν πίνακα $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Από την υπόθεση,

$$\det A=ad-cb<0, \tag{8.50}$$

και από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, που είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-cb$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ πρέπει να είναι πραγματικές και διαφορετικές, διότι από την (8.50) είναι φανερό ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι πάντα θετική. Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του A είναι πάντα διακεκριμένες, οπότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.2).

iii) Λάθος. Έστω ότι ο A έχει ιδιοτιμές λ_1,λ_2. Σύμφωνα με τις Προτάσεις 7.1, 8.5 και την υπόθεση, $\det A=trA=0$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}\det A&=\lambda_1\lambda_2=0\\ trA&=\lambda_1+\lambda_2=0\end{aligned},$$

η λύση του οποίου είναι $\lambda_1=\lambda_2=0$. Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει $A=P\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\mathbb{O}$, που σημαίνει ότι ο A πρέπει να είναι ο μηδενικός πίνακας, το οποίο είναι αδύνατο από την υπόθεση.

iv) Λάθος. Επειδή ο πίνακας είναι τριγωνικός έχει ιδιοτιμές τα στοιχεία της διαγωνίου του (Εφαρμογή 7.3 (i)). Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda=a$ (διπλή ρίζα). Από την εξίσωση $(A-a\mathrm{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ προκύπτει $\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow bx_2=0$ και επειδή $b\in\mathbb{R}^*$ έχουμε $x_2=0$, οπότε $\boldsymbol{x}=(x_1\quad 0)^t$. Δηλαδή ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(a)=\{x_1(1\quad 0)^t\ :x_1\in\mathbb{R}\}$, που έχει διάσταση 1. Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 8.1, βήμα 3, ο πίνακας A **δε** διαγωνοποιείται.

v) Ορθή. Για έναν ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμο πίνακα A υπάρχουν ορθομοναδιαίος πίνακας S και άνω τριγωνικός πίνακας T, τέτοιοι ώστε $A=STS^*$, (βλέπε ισότητες στην (8.10) και Θεώρημα 8.1).

Η αναστροφή στην ισότητα της (8.10) δίνει :

$$A^t=\left(STS^*\right)^t=\left(S^*\right)^t T^t S^t=\left(S^t\right)^* T^t S^t=QT^tQ^*\Rightarrow A^t=QT^tQ^*=QT_1Q^*,$$

όπου $S^t=Q^*$ και $T_1=T^t$, δηλαδή ο πίνακας T_1 είναι κάτω τριγωνικός.

Ο πίνακας Q είναι ορθομοναδιαίος, διότι

$$Q^*Q=\left(S^t\right)\left(S^t\right)^*=\left(S^t\right)\left(S^*\right)^t=\left(S^*S\right)^t=I.$$

Συνεπώς, από τη μορφή $A^t=QT_1Q^*$, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A^t είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος και μάλιστα από έναν ορθομοναδιαίο πίνακα $Q\equiv\left(S^t\right)^*=\overline{S}$.

vi) Ορθή. Από το Φασματικό θεώρημα (Θεώρημα 8.2), ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα. Άρα υπάρχει U ορθομοναδιαίος πίνακας ($U^*U=I$) τέτοιος ώστε $A=U\Delta U^*$, όπου Δ πραγματικός διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, δηλαδή $\Delta=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$.

Επειδή Δ είναι πραγματικός διαγώνιος ισχύει $\Delta^*=\Delta=diag\left(\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\ldots,\overline{\lambda_n}\right)$. Από τη διαγωνοποιημένη μορφή του A, $A=U\Delta U^*$, την ιδιότητα (vi) της Πρότασης 1.3, και $\Delta^*=\Delta$, για τον πίνακα A^*A γράφουμε

$$A^*A=\left(U\Delta U^*\right)^*U\Delta U^*=U\Delta^*(U^*U)\Delta U^*=U\Delta^*\Delta U^*=U\Delta^2U^*.$$

Τελικά, από τον ορισμό του ίχνους και την ιδιότητα $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$, (Εφαρμογή 1.5 (iii)) έχουμε

$$tr\left(A^*A\right)=tr\left(U\Delta^2U^*\right)=tr\left(U^*U\Delta^2\right)=tr\left(\Delta^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 8.9 *Έστω* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *όμοιοι*[1] *πίνακες. Να αποδείξετε ότι*

i) $\det A = \det B$, $trA = trB$

ii) *οι πίνακες* A^t *και* B^t *είναι όμοιοι,*

iii) *αν ισχύει* $A^2 = A$, *τότε* $B^2 = B$,

iv) *οι πίνακες* A^k *και* B^k, $k \in \mathbb{N}$ *είναι όμοιοι,*

v) *οι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα,* $\chi_A(\lambda) \equiv \chi_B(\lambda)$,

vi) *οι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια ελάχιστα πολυώνυμα,* $m_A(\lambda) \equiv m_B(\lambda)$,

vii) *δεν ισχύουν αντίστροφα οι ιδιότητες v) και vi). Να δώσετε κατάλληλα παραδείγματα.*

viii) *Να δώσετε παράδειγμα, με το οποίο να παρουσιάζονται δύο πίνακες οι οποίοι έχουν* $\chi_A(\lambda) \equiv \chi_B(\lambda)$ *και* $m_A(\lambda) \equiv m_B(\lambda)$ *και δεν είναι απαραίτητα όμοιοι.*

Απόδειξη : i) Από τον ορισμό των ομοίων πινάκων υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$A = PBP^{-1}. \tag{8.51}$$

Από την αντιστρεψιμότητα του πίνακα ομοιότητας P και την ιδιότητα $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Πρόταση 2.2 (ii)) έχουμε

$$PP^{-1} = I \Leftrightarrow \det\left(PP^{-1}\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow \det P \cdot \det\left(P^{-1}\right) = 1. \tag{8.52}$$

Για την ορίζουσα του πίνακα A, συνδυάζοντας την ιδιότητα στην Πρόταση 2.2. (ii) με τις ισότητες στις (8.51) και (8.52), μπορούμε να γράψουμε :

$$\det A = \det\left(PBP^{-1}\right) = \det P \cdot \det B \cdot \det\left(P^{-1}\right) = \det B.$$

Από την ισότητα στην (8.51) και την ιδιότητα $tr(AB) = tr(BA)$ (Εφαρμογή 1.5 (iii)) καταλήγουμε :

$$trA = tr\left(PBP^{-1}\right) = tr\left(BP^{-1}P\right) = trB$$

ii) Συνδυάζοντας την ισότητα της (8.51) με την ιδιότητα $(AB)^t = B^t A^t$ (Πρόταση 1.3 (vi)), έχουμε

$$A^t = \left(PBP^{-1}\right)^t = \left(P^{-1}\right)^t B^t P^t = QB^tQ^{-1},$$

όπου $Q = (P^{-1})^t$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, διότι ισχύει

[1] Οι $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **όμοιοι** πίνακες, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$.

$Q^{-1}Q = P^t\left(P^t\right)^{-1} = P^t\left(P^{-1}\right)^t = \left(P^{-1}P\right)^t = I$. Συνεπώς, από την ισότητα $A^t = QB^tQ^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι A^t και B^t είναι όμοιοι.

iii) Η ισότητα της (8.51) γράφεται ισοδύναμα $B = P^{-1}AP$. Οπότε, για τον πίνακα B^2, κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας την ισότητα $A^2 = A$ (από την υπόθεση), παίρνουμε

$$B^2 = \left(P^{-1}AP\right)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = B.$$

iv) Εφαρμόζοντας $k-$φορές την (8.51) έχουμε

$$\begin{aligned} A^k = \left(PBP^{-1}\right)^k &= \underbrace{PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}}_{k-\text{φορές}} \\ &= \underbrace{PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1}\cdots PBP^{-1}}_{k-\text{φορές}} = P\underbrace{BB\cdots B}_{k-\text{φορές}}P^{-1} = PB^kP^{-1}, \end{aligned}$$

άρα,

$$A^k = PB^kP^{-1} . \tag{8.53}$$

v) Η απόδειξη του ισχυρισμού βρίσκεται στην απόδειξη της Πρότασης 7.4.

vi) Έστω ότι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων A , B είναι $m_A(\lambda) = \lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, $s \le n$ και $m_B(\lambda) = \lambda^r + b_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$, $r \le n$.

Εφαρμόζοντας την ισότητα στην (8.53) για τις διάφορες τιμές του r και την ιδιότητα (b) του Ορισμού 7.4 για το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα B, έχουμε :

$$\begin{aligned} m_B(A) &= A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_1A + b_0I \\ &= PB^rP^{-1} + b_{r-1}PB^{r-1}P^{-1} + \cdots + b_1PBP^{-1} + b_0I \\ &= P\left(B^r + b_{r-1}B^{r-1} + \cdots + b_1B + b_0I\right)P^{-1} \\ &= Pm_B(B)P^{-1} = P\cdot\mathbb{O}\cdot P^{-1} = \mathbb{O} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$m_B(A) = \mathbb{O} . \tag{8.54}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει

$$m_A(\lambda) = q(\lambda)m_B(\lambda) + \upsilon_1(\lambda) . \tag{8.55}$$

Για τον αντίστοιχο πολυωνυμικό πίνακα, συνδυάζοντας την ισότητα στην (8.54) με την ιδιότητα (b) του Ορισμού 7.4 για το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A, $m_A(A) = \mathbb{O}$, μπορούμε να γράψουμε

$$m_A(A) = q(A)m_B(A) + \upsilon_1(A) \Rightarrow \mathbb{O} = q(A)\cdot\mathbb{O} + \upsilon_1(A) \Rightarrow \upsilon_1(A) = \mathbb{O},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\upsilon_1(\lambda)=0$. Άρα η ισότητα στην (8.55) γράφεται

$$m_A(\lambda)=q(\lambda)m_B(\lambda), \tag{8.56}$$

το οποίο σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_B(\lambda)$ διαιρεί το $m_A(\lambda)$.

Επίσης, η ισότητα στην (8.53) γράφεται ισοδύναμα $B^k=P^{-1}A^kP$, οπότε με ανάλογο τρόπο όπως προηγούμενα, έχουμε

$$\begin{aligned} m_A(B) &= B^s+a_{s-1}B^{s-1}+\cdots+a_1B+a_0I \\ &= P^{-1}A^sP+a_{s-1}P^{-1}A^{s-1}P+\cdots+a_1P^{-1}AP+a_0I \\ &= P^{-1}\left(A^s+a_{s-1}A^{s-1}+\cdots+a_1A+a_0I\right)P=P^{-1}m_A(A)P=\mathbb{O}, \end{aligned}$$

συνεπώς,

$$m_A(B)=\mathbb{O}. \tag{8.57}$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει

$$m_B(\lambda)=g(\lambda)m_A(\lambda)+\upsilon_2(\lambda), \tag{8.58}$$

από τις ισότητες $m_B(B)=\mathbb{O}$ και $m_A(B)=\mathbb{O}$, για τον αντίστοιχο πολυωνυμικό πίνακα στην (8.58) μπορούμε να γράψουμε

$$m_B(B)=g(B)m_A(B)+\upsilon_2(B)\Rightarrow\mathbb{O}=g(B)\cdot\mathbb{O}+\upsilon_2(B)\Rightarrow\upsilon_2(B)=\mathbb{O}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\upsilon_2(\lambda)=0$. Άρα η ισότητα στην (8.58) γράφεται

$$m_B(\lambda)=g(\lambda)m_A(\lambda), \tag{8.59}$$

το οποίο σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ διαιρεί το $m_B(\lambda)$.

Συνεπώς, από τις (8.56) και (8.59) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $m_A(\lambda)\equiv m_B(\lambda)$.

vii) Έστω οι τριγωνικοί πίνακες $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων είναι

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2 \quad \text{και} \quad \chi_B(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων είναι

$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2) \quad \text{και} \quad m_B(\lambda)=\chi_B(\lambda).$$

Οι πίνακες A,B **δεν** είναι όμοιοι, διότι $m_A(\lambda)\neq m_B(\lambda)$.

Ας θεωρήσουμε τους τριγωνικούς πίνακες $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων είναι

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2 \quad \text{και} \quad \chi_C(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων είναι : $m_A(\lambda)\equiv m_C(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$

Οι πίνακες A,C **δεν** είναι όμοιοι, διότι $\chi_A(\lambda)\neq\chi_C(\lambda)$.

viii) Έστω οι πίνακες $K=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

Ισχυριζόμαστε ότι οι πίνακες K,Λ **δεν** είναι όμοιοι, αν και ισχύει

$$\chi_K(\lambda)\equiv\chi_\Lambda(\lambda)=(\lambda-2)^4 \qquad \text{και} \qquad m_K(\lambda)\equiv m_\Lambda(\lambda)=(\lambda-2)^2.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.7, επειδή $r(K-2I)=2$, $r\left((K-2I)^2\right)=0$, από τις σχέσεις στις (8.30), (8.31) έχουμε $\ell_1=4-2=2$ και $\ell_2=2-0=2$. Συνεπώς, το διάγραμμα των ★ είναι της μορφής $\begin{matrix}\star&\star\\\star&\star\end{matrix}$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Ο πρώτος είναι τύπου 2×2 και αντιστοιχεί σε αυτόν μια αλυσίδα μήκους $\tilde{k}_{1,2}=2$, οπότε ο στοιχειώδης πίνακας Jordan έχει τη μορφή $J_{1,\tilde{k}_{1,2}}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ και ο δεύτερος στοιχειώδης πίνακας Jordan είναι του ιδίου τύπου 2×2, και μάλιστα ακριβώς ο ίδιος με τον προηγούμενο. Άρα, ο πίνακας Jordan είναι

$$J=\begin{pmatrix}J_{1,\tilde{k}_{1,2}} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & J_{1,\tilde{k}_{1,2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.6 και την ισότητα στην (8.29), υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M, τέτοιος ώστε $K=MJM^{-1}$. Προφανώς ο J δεν είναι ο Λ, από όπου συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες K,Λ **δεν** είναι όμοιοι.

Άρα, δύο πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, για τους οποίους ισχύει $\chi_A(\lambda) \equiv \chi_B(\lambda)$ και $m_A(\lambda) \equiv m_B(\lambda)$, πρέπει να έχουν και τα ίδια σύνθετα (block) Jordan για να είναι όμοιοι. ◆◆◆

Εφαρμογή 8.10 *Αν για έναν πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *με* $A \neq I$ *ισχύει* $A^2 = A$ [1], *να αποδείξετε ότι :*

i) $\sigma(A) = \{0,1\}$, $\det A = 0$.

ii) *Ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται.*

iii) $trA = r(A) = \nu_2$, *όπου* $r(A)$ *ο βαθμός του πίνακα* A, ν_2 *η αλγεβρική πολλαπλότητα της μονάδας.*

iv) *Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα* $U \in M_n(\mathbb{F})$, *ο πίνακας* $U^* A U$ *είναι ταυτοδύναμος.*

Απόδειξη : i) Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, ισχύει

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 7.3, λ^2 και $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοποσά του A^2, δηλαδή

$$A^2 \boldsymbol{x} = \lambda^2 \boldsymbol{x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δοσμένη ισότητα δεξιά επί $\boldsymbol{x}$ και κάνοντας αντικατάσταση με τις παραπάνω ισότητες, παίρνουμε

$$A^2 = A \;\Rightarrow\; A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \lambda^2 \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \;\Rightarrow \left(\lambda^2 - \lambda\right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{8.60}$$

Επιπλέον, το $\boldsymbol{x}$ ως ιδιοδιάνυσμα είναι μη μηδενικό διάνυσμα, οπότε από την ισότητα στην (8.60) συμπεραίνουμε ότι $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$. Άρα $\sigma(A) = \{\, 0, 1 \,\}$. Από την ισότητα στην (7.6) της Πρότασης 7.1 ισχύει $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 0$, συνεπώς, ένας ταυτοδύναμος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

ii) Από το ερώτημα (i) είναι φανερό ότι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^{\nu_1} (\lambda - 1)^{\nu_2}$, όπου $\nu_1 + \nu_2 = n$. Συνεπώς, το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να αναζητηθεί ανάμεσα στα πολυώνυμα $m_i(\lambda) = \lambda^{k_1} (\lambda - 1)^{k_2}$ με $k_i \leq \nu_i$. Αν θέσουμε

[1] Ο τετραγωνικός πίνακας με την ιδιότητα $A^2 = A$ ονομάζεται **ταυτοδύναμος** πίνακας (idempotent matrix).

$k_1 = k_2 = 1$ και εφαρμόσουμε την ισότητα της υπόθεσης, $A^2 = A$, διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται η (8.8), διότι ισχύει,

$$m_1(A) = A(A-I) = A^2 - A = \mathbb{O}.$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$, άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.4).

iii) Από το ερώτημα (ii) υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = \Delta = diag\left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\nu_2},\underbrace{0,\ldots,0}_{\nu_1}\right) = diag\left(I_{\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu_1}\right),$$

όπου ν_1, ν_2 είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών, όπως αυτές περιγράφονται στο $\chi_A(\lambda)$. Από τον ορισμό ίχνους και από την ιδιότητα $tr(AB) = tr(BA)$ (Εφαρμογή 1.5 (iii)) ισχύει

$$\nu_2 = tr\left(I_{\nu_2}\right) = tr\Delta = tr\left(P^{-1}AP\right) = tr\left(A(PP^{-1})\right) = trA.$$

Επειδή η διαγώνια μορφή του A είναι ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, από τον Ορισμό 3.5 για τον βαθμό του πίνακα έχουμε

$$\nu_2 = r\left(diag\left(I_{\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu_1}\right)\right) = r(\Delta) = r\left(P^{-1}AP\right) = r(A).$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $trA = r(A) = \nu_2$.

iv) Έστω $U \in M_n(\mathbb{F})$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας. Κάνοντας πράξεις και αντικατάσταση από την υπόθεση, $A^2 = A$, έχουμε

$$\left(U^*AU\right)^2 = U^*A(UU^*)AU = U^*A^2U = U^*AU. \qquad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Εφαρμογή 8.11 i) *Αν $T \in M_n(\mathbb{F})$ είναι άνω τριγωνικός και κανονικός*[1] *πίνακας, τότε $T \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγώνιος.*

ii) *Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι κανονικός αν και μόνο αν είναι ορθομοναδιαία όμοιος με διαγώνιο πίνακα.*

---

[1] Ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **κανονικός** πίνακας (normal matrix), αν ισχύει $AA^* = A^*A$.

Απόδειξη : i) Έστω $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας με $t_{ij}\in\mathbb{F}$, $t_{ij}=0$ για κάθε $i>j$. Από τον ορισμό του κανονικού πίνακα $TT^*=T^*T$, έχουμε :

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{t}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t}_{12} & \overline{t}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t}_{13} & \overline{t}_{23} & \overline{t}_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \overline{t}_{1n} & \overline{t}_{2n} & \overline{t}_{3n} & \dots & \overline{t}_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{t}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t}_{12} & \overline{t}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t}_{13} & \overline{t}_{23} & \overline{t}_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \overline{t}_{1n} & \overline{t}_{2n} & \overline{t}_{3n} & \dots & \overline{t}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Μετά από τις πράξεις και εξισώνοντας τα στοιχεία των πινάκων στις αντίστοιχες θέσεις, καταλήγουμε στις επόμενες ισότητες

από το στοιχείο στην $(1,1)$ θέση

$$|t_{11}|^2+|t_{12}|^2+|t_{13}|^2+\dots+|t_{1n}|^2=|t_{11}|^2 \Leftrightarrow t_{12}=t_{13}=\dots=t_{1n}=0$$

από το στοιχείο στη $(2,2)$ θέση

$$|t_{22}|^2+|t_{23}|^2+\dots+|t_{2n}|^2=|t_{22}|^2 \Leftrightarrow t_{23}=t_{24}=\dots=t_{2n}=0,$$

από το στοιχείο στην $(3,3)$ θέση

$$|t_{33}|^2+|t_{34}|^2+\dots+|t_{3n}|^2=|t_{33}|^2 \Leftrightarrow t_{34}=\dots=t_{3n}=0,$$

και από το στοιχείο στη $((n-1),(n-1))$ θέση

$$\left|t_{(n-1)(n-1)}\right|^2+\left|t_{(n-1)n}\right|^2=\left|t_{(n-1)(n-1)}\right|^2 \Leftrightarrow t_{(n-1)n}=0.$$

Από όλες τις παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτει ότι $t_{ij}=0$, για κάθε $i\neq j$, $i<j$, με $i=1,2,\dots,n-1$. Επομένως, ο T είναι διαγώνιος πίνακας, $T=diag\left(t_{11},t_{22},\dots,t_{nn}\right)$.

ii) Έστω A ένας κανονικός πίνακας, σύμφωνα με το θεώρημα Schur (Θεώρημα 8.1) υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε να ισχύει

$$A=UTU^*, \tag{8.61}$$

όπου $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ άνω τριγωνικός πίνακας με τις ιδιοτιμές του A ως διαγώνια στοιχεία. Με αντικατάσταση του πίνακα A από την (8.61) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας U είναι ορθομοναδιαίος, $UU^* = U^*U = I$, έχουμε

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow UT(U^*U)T^*U^* = UT^*(U^*U)TU^*$$
$$\Leftrightarrow\ UTT^*U^* = UT^*TU^* \ \Leftrightarrow\ TT^* = T^*T.$$

Δηλαδή, ο T τριγωνικός πίνακας είναι κανονικός, οπότε από το ερώτημα (i) συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας T είναι διαγώνιος πίνακας, $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, όπου λ_i είναι όλες οι ιδιοτιμές του A.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε $A = U\Delta U^*$, $\Delta = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$, όπου $a_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Τότε, μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες ισότητες

$$AA^* = U\Delta U^*\left(U\,\Delta U^*\right)^* = U\Delta U^*U\Delta^*U^* = U\Delta(U^*U)\Delta^*U^* = U\Delta\Delta^*U^* \qquad (8.62)$$

και

$$A^*A = \left(U\,\Delta U^*\right)^* U\Delta U^* = U\Delta^*U^*U\Delta U^* = U\Delta^*(U^*U)\Delta U^* = U\Delta^*\Delta U^*. \qquad (8.63)$$

Επιπλέον, ο πίνακας Δ είναι διαγώνιος, οπότε ισχύει η αντιμεταθετικότητα των πινάκων, $\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta$, επομένως οι πίνακες στα δεύτερα μέλη των (8.62) και (8.63) είναι ίσοι, άρα ισχύει $AA^* = A^*A$, δηλαδή ο A είναι κανονικός πίνακας. ◆◆◆

8.6 Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι επόμενοι πίνακες διαγωνοποιούνται και να βρείτε μία διαγωνοποίηση για όσους αυτό είναι δυνατό

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, iii) $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, iv) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vi) $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

vii) $G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, viii) $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

2. Να εξετάσετε αν διαγωνοποιούνται οι γραμμικές απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, όπου

   i) $f(x, y, z) = (x + 3y + 3z,\ -3x - 5y - 3z,\ 3x + 3y + z)$

   ii) $f(x, y, z) = (2x + 4y + 3z,\ -4x - 6y - 3z,\ 3x + 3y + z)$

3. Έστω ότι για τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε οι πίνακες $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ να είναι διαγώνιοι. Να αποδείξετε ότι $AB = BA$. Τι συμπεραίνετε για τα ιδιοποσά του πίνακα AB;

4. i) Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ πίνακας διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές $\lambda_i \in \mathbb{F}$ και τέτοιες ώστε $|\lambda_i| < 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A^k τείνει στον μηδενικό πίνακα καθώς $k \to \infty$.

   ii) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}$. Να εξηγήσετε γιατί ο πίνακας A^k προσεγγίζει τον πίνακα $\begin{pmatrix} -0.5 & -0.75 \\ 1.0 & 1.5 \end{pmatrix}$ καθώς $k \to \infty$. Υπάρχει αντίφαση με το πρώτο ερώτημα της άσκησης;

5. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq \mu$ και οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \lambda & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & \mu & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \lambda & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & \lambda & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & \lambda & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \lambda & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & \lambda & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & \lambda & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Να διατυπώσετε συνθήκες για τα $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, ώστε οι πίνακες $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ να είναι διαγωνοποιήσιμοι. Τι παρατηρείτε;

6. Έστω $A \in M_2(\mathbb{F})$ πίνακας διαγωνοποιήσιμος με $A = P\Delta P^{-1}$ και $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

   Έστω $B = 5I - 3A + A^2$. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες B, B^{-1} είναι διαγωνοποιήσιμοι πίνακες και να γράψετε τη διαγώνια μορφή του καθενός.

7. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   i) Να αποδείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται. Ποια είναι η διαγώνια μορφή του;

ii) Να υπολογίσετε τον A^k , $k \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε τον πίνακα $I + A + A^2 + \cdots + A^{2006}$.

8. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι

$$A^{2k} - 3A^{2m+1} + 2I = 3\left(I - A\right) = 3\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix},\ k, m \in \mathbb{N}^*.$$

9. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

i) Να αποδείξετε ότι $A^2 = A$. Είναι ο $I - A$ ταυτοδύναμος πίνακας;

ii) Να υπολογισθούν trA και $r\left(A\right)$.

iii) Οι πίνακες A και $I - A$ διαγωνοποιούνται; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

10. Να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) - 5x_2(t) - 3x_3(t) \\ x_3'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t) + x_3(t) \end{aligned}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, $x_i(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, για κάθε $i = 1, 2, 3$.

11. Έστω οι διαφορικές εξισώσεις

$$y'''(t) - 3y''(t) + 2y(t) = 0, \qquad y''(t) - 9y(t) = 0, \qquad y'''(t) - 7y'(t) + 6y(t) = 0$$

i) Να εκφράσετε κάθε μία από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις ως ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

ii) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα κάθε συστήματος στο ερώτημα (i) καθώς και μία βάση του χώρου των λύσεών της.

12. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_3(t) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι ο πίνακας , που συνδέεται με το σύστημα, είναι στοιχειώδης πίνακας Jordan.

13. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 6 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ και $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Να βρεθεί ο πίνακας M^{-1} και να επαληθευθεί ότι ο πίνακας $J = M^{-1}AM$ είναι ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan του A.

ii) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας-στήλη $\boldsymbol{x}(t)$ ικανοποιεί το σύστημα $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\boldsymbol{y}(t) = M^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{y}'(t) = J\boldsymbol{y}(t)$.

iii) Να βρεθεί η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) \qquad\qquad - x_3(t) \\ x_2'(t) &= -8x_1(t) + 4x_2(t) + 6x_3(t) \\ x_3'(t) &= 6x_1(t) - x_2(t) \quad - 2x_3(t) \end{aligned}$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_2(0) = 0$ και $x_3(0) = 1$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τα ερωτήματα (i) και (ii) καθώς και το αποτέλεσμα της Άσκησης 8.6.12.

14. Να λυθεί η εξίσωση $X^2 = A$, όπου $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

15. Έστω (a_n), (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$ ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά από το σύστημα :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_n + 3b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n \end{aligned}$$

Να εκφραστούν οι όροι των ακολουθιών (a_n), (b_n) ως συνάρτηση του $n \geq 1$, αν είναι γνωστό ότι $a_1 = 1$ και $b_1 = -1$.

16. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ώστε ο πίνακας P^tAP να είναι διαγώνιος.

17. Έστω ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Να υπολογισθεί ο ορθογώνιος πίνακας U, τέτοιος ώστε $U^tAU = T$, όπου T άνω τριγωνικός.

ii) Να υπολογισθεί η κανονική μορφή και μία βάση Jordan για τον A.

18. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

i) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ ο πίνακας A διαγωνοποιείται;

ii) Για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ που ο πίνακας A δε διαγωνοποιείται, να υπολογίσετε την κανονική μορφή Jordan.

19. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

ii) Να βρεθεί μία κανονική βάση και ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan του A.

20. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

i) Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να δικαιολογήσετε αν ο πίνακας διαγωνοποιείται.

ii) Να αποδείξετε ότι $A^3 = 27(A - 2I)$, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις του A.

iii) Να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα M τέτοιον ώστε $M^{-1}AM = J$, όπου J ο πίνακας της κανονικής μορφής του A.