Κανονικοί Πίνακες
και
Αριθμητικό Πεδίο Πινάκων

Χωριανόπουλος Χρήστος

ΔΠΜΣ Πληροφορική και Υπολογιστική Βιοϊατρική
Κατεύθυνση Υπολογιστικής Ιατρικής και Βιολογίας
Σχολή Θετικών Επιστημών Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Λαμία, Απρίλιος 2019

Κανονικοί Πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ καλείται *κανονικός* όταν αντιμετατίθεται με τον αναστροφοσυζυγή του, δηλαδή όταν ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^* = A^*A.$$

Παραδείγματα κανονικών πινάκων είναι

- Οι Ερμιτιανοί Πίνακες (άρα και οι Συμμετρικοί).
- Οι Αντιερμιτιανοί Πίνακες
- Οι Ορθομοναδιαίοι Πίνακες.
- Οι διαγώνιοι πίνακες.

Πρόταση

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A^{-1} είναι κανονικός.

Απόδειξη.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος κανονικός πίνακας, τότε ισχύει

$$(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (A A^*)^{-1} = (A^* A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})$$

δηλαδή ο A^{-1} είναι κανονικός.
Αντίστροφα, αν ο A^{-1} είναι κανονικός, τότε από το ευθύ θα είναι κανονικός και ο πίνακας $(A^{-1})^{-1} = A$. $\square$

Πρόταση

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο* $A^{-1}A^*$ *είναι ορθομοναδιαίος.*

Απόδειξη.

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και κανονικός, τότε

$$(A^{-1}A^*)(A^{-1}A^*)^* = A^{-1}A^*A(A^{-1})^* = A^{-1}AA^*(A^{-1})^* = I_\nu$$

και

$$(A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) = A(A^{-1})^*A^{-1}A^* = AA^{-1}(A^{-1})^*A^* = I_\nu.$$

Άρα $(A^{-1}A^*)(A^{-1}A^*)^* = (A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) = I_\nu.$ □

Απόδειξη.

Αντίστροφα, αν ο $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε

$$(A^{-1}A^*)^* = (A^{-1}A^*)^{-1} \Leftrightarrow A(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A \Leftrightarrow A^{-1}A^* = A^*A^{-1}.$$

Πολαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση, από αριστερά και από δεξιά, με A, παίρνουμε $A^*A = AA^*$. Δηλαδή, ο πίνακας A είναι κανονικός. $\square$

Πρόταση

(Συνθήκη 4) *Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας* $U^* A\, U$ *είναι κανονικός για οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο πίνακα* $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$.

Απόδειξη.

Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε με απλές πράξεις έχουμε
$(U^* A\, U)(U^* A\, U)^* \;=\; U^* A\, U\, U^* A^* U \;=\; U^*(A\, A^*)U$
και
$(U^* A\, U)^*(U^* A\, U) \;=\; U^* A^* U\, U^* A\, U \;=\; U^*(A^* A)U \;=\; U^*(A\, A^*)U.$
Άρα $(U^* A\, U)(U^* A\, U)^* = (U^* A\, U)^*(U^* A\, U)$ και ο πίνακας $U^* A\, U$ είναι κανονικός.
Αντίστροφα, αν ο $U^* A\, U$ είναι κανονικός (για οποιονδήποτε ορθομοναδιαίο U), τότε και ο πίνακας $A = U(U^* A\, U)U^*$ είναι κανονικός. □

Λήμμα

(Schur) *Έστω ένας τυχαίος πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$. *Τότε υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος πίνακας* $U \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ *κι ένας άνω τριγωνικός πίνακας* $T \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ *με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του* A *(λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες), τέτοιοι ώστε*

$$A = U\,T\,U^*.$$

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας* $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *κι ένας διαγώνιος πίνακας* $\Lambda \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *τέτοιοι ώστε* $U^* A\, U = \Lambda$*.*

Απόδειξη.

Από το Λήμμα του Schur, υπάρχουν ορθομοναδιαίος πίνακας U και άνω τριγωνικός πίνακας T τέτοιοι ώστε

$$A = U\,T\,U^* \;\Leftrightarrow\; T = U^* A\, U.$$

Αν λοιπόν ο A είναι κανονικός, τότε και ο τριγωνικός πίνακας T είναι κανονικός. Με απλές πράξεις, εύκολα μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι ο T πρέπει υποχρεωτικά να έχει μηδενικά όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του. Δηλαδή, ο T είναι διαγώνιος. $\square$

Απόδειξη.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $A = U\Lambda U^*$, όπου ο Λ, ως διαγώνιος, ικανοποιεί τη σχέση $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$. Τότε είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} AA^* &= (U\Lambda U^*)(U\Lambda^* U^*) = U\Lambda\Lambda^* U^* \\ &= U\Lambda^*\Lambda U^* = (U\Lambda^* U^*)(U\Lambda U^*) = A^*A \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν είναι διαγωνοποιήσιμος και υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A.

Πως κατασκευάζουμε όμως τον ορθομοναδιαίο πίνακα που διαγωνοποιεί έναν κανονικό;

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και οποιαδήποτε ιδιοδιανύσματα του τα οποία προέρχονται από διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Πράδειγμα 1. Να κατασκευαστεί μια ορθομοναδιαία διαγωνοποίηση του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Υπολογίζουμε ιδιοτιμές

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 3)[(\lambda - 2)(\lambda - 5) - 4] = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

Ο πίνακας έχει τρείς ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 6$, με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Οπότε κάθε ιδιοτιμή θα έχει έναν ιδιόχωρο διάστασης 1.

Ας βρούμε τα ιδιοδιανύσματα.

$\underline{\lambda_1 = 1:}$

$$[\lambda_1 I - A|0] = [I - A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \ldots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ για τη $\lambda_1 = 1$.

$\underline{\lambda_2 = 3:}$

$$[\lambda_2 I - A|0] = [3I - A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \ldots \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ για τη $\lambda_2 = 3$.

$\underline{\lambda_3 = 6:}$

$$[\lambda_3 I - A|0] = [6I - A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \ldots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ για τη $\lambda_3 = 6$.

Τα ιδιοδιανύσματα είναι ήδη ορθογώνια, οπότε απλά τα κανονικοποιούμε και τα τοποθετούμε ως στήλες του ορθομοναδιαίου U που θέλουμε να κατασκευάσουμε.

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\pi}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Οπότε ο U που διαγωνοποιεί τον A είναι

$U = [\boldsymbol{\pi}_1\ \boldsymbol{\pi}_2\ \boldsymbol{\pi}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ και ο διαγώνιος Λ είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Υπολογίζουμε ιδιοτιμές

$$c_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & -3 \\ 3 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 - 9] - 3[3(\lambda - 1) - 9] - 3[-9 + 3(\lambda - 1)] = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2(\lambda + 5) = 0$$

Ο πίνακας έχει 2 ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 4$με πολλαπλότητα 2, $\lambda_2 = -5$ με πολλαπλότητα 1.

$\underline{\lambda_1 = 4:}$

$$[\lambda_1 I - A|0] = [4I - A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Προκύπτουν τα ιδιοδιάνυσματα $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ για την $\lambda_1 = 4$. Τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι ορθογώνια. Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *Gram* – *Schmidt* σε αυτόν τον ιδιόχωρο για να τα κάνουμε ορθογώνια.

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1}{\|\boldsymbol{\varphi}_1\|^2}\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = 5:}$

$$[\lambda_2 I - A|0] = [5I - A|0] = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 & | & 0 \\ 3 & -6 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow^{E.R.Os} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | \\ 0 & 1 & 1 & | \\ 0 & 0 & 0 & | \end{bmatrix}$$

Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ γαι τη $\lambda_2 = 0$.

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1}{\|\boldsymbol{\varphi}_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}}, \ \boldsymbol{\pi}_2 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_2}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\pi}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}}$$

Οπότε ο $U = [\boldsymbol{\pi}_1 \ \boldsymbol{\pi}_2 \ \boldsymbol{\pi}_3]$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί συμμετρικός $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 2 και $\lambda_2 = -1$ αν είναι γνωστό ότι στη λ_1 αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{\chi}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Με *Gram – Schmidt* κατασκευάζουμε ορθοκανονική βάση για τον ιδιόχωρο της λ_1, και προκύπτει η

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Έστω τώρα $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = -1$. Τότε αυτό πρέπει να είναι κάθετο στα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ αφού ο πίνακας είναι κανονικός. Έτσι πρέπει

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$ και

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \Rightarrow x + y - 2z = 0.$

Μια λύση του συστήματος είναι το $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και διαιρώντας με το μέτρο του λαμβάνουμε $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο ορθομοναδιαίος πίνακας που διαγωνοποιεί τον A είναι ο $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$,
$A = UDU^*$, όπου $D = diag\{1, 1, -1\}$.

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και κάθε ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^{\nu}$ του A είναι ιδιοδιάνυσμα και του A^*.

Απόδειξη.

Αν ο A είναι κανονικός, τότε

$$U^* A U = \Lambda \;\Leftrightarrow\; U^* A^* U = \Lambda^*$$

για κάποιο διαγώνιο πίνακα $\Lambda \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και για κάποιο ορθομοναδιαίο $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Όμως οι διαγώνιοι πίνακες Λ και Λ^* έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, τα διανύσματα της κανονικής βάσης. Επομένως, οι A και A^* έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, τα διανύσματα που είναι οι στήλες του ορθομοναδιαίου πίνακα U. □

Απόδειξη.

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και ότι τα ιδιοδιανύσματα του ταυτίζονται ιδιοδιανύσματα του A^*. Τότε για τους A και A^* υπάρχει κοινός αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε οι $P^{-1}AP$ και $P^{-1}A^*P$ να είναι διαγώνιοι. Τότε οι στήλες του πίνακα P είναι (δεξιά) ιδιοδιανύσματα του A, ενώ οι γραμμές του P^{-1} είναι αριστερά ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ίδιες ιδιοτιμές. Επομένως, για να ισχύει $P^{-1} = P^*$, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα του A και αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του A είναι κάθετα μεταξύ τους.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι λ_1 και λ_2 είναι δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές του A με x_1 ένα (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα της λ_1 και y_2 ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα της λ_2. Τότε ισχύει $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ και $y_2^* A = \lambda_2 y_2^*$. □

Απόδειξη.

Συνεπώς,

$$0 = y_2^* A x_1 - y_2^* A x_1 = y_2^* (\lambda_1 x_1) - (y_2^* \lambda) x_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) y_2^* x_1 \, ,$$

κι αφού $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, έπεται ότι $y_2^* x_1 = 0$. $\square$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = H(A) + S(A)$, όπου $H(A) = (A + A^*)/2$ είναι το *ερμιτιανό μέρος* και $S(A) = (A - A^*)/2$ το *αντιερμιτιανό μέρος* του A. Οι ακόλουθες συνθήκες συνδέουν την έννοια της κανονικότητας με αυτήν την ανάλυση καρτεσιανού τύπου.

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν

- $H(A)S(A) = S(A)H(A)$
- $H(A)A = A\,H(A)$
- $S(A)A = A\,S(A)$.

Απόδειξη.

Άσκηση $\square$

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *με (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$, *είναι κανονικός αν και μόνο αν οι ιδιάζουσες τιμές του είναι* $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_\nu|$.

Ορισμός Αριθμητικού Πεδίου

Το **αριθμητικό πεδίο** (numerical range, field of values) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$F(A) = \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Τα αριθμητικά πεδία κάποιων απλών πινάκων είναι τα ακόλουθα:

- $$\begin{aligned} F(a\, I_\nu) &= \{x^*(a\, I_\nu)\, x :\ x \in \mathbb{C}^\nu,\ x^* x = 1\} \\ &= \{a\,(x^* x) :\ x \in \mathbb{C}^\nu,\ x^* x = 1\} \\ &= \{a\}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{[\bar{x}_1\ \bar{x}_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} :\ |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\} \\ &= \left\{|x_1|^2 :\ 0 \le |x_1|^2 \le 1\right\}, \end{aligned}$$

  δηλαδή το αριθμητικό πεδίο είναι το $[0,1]$.

- $$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{[\bar{x}_1\ \bar{x}_2]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\} \\ &= \left\{2\, x_2\, \bar{x}_1 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\}, \end{aligned}$$

  δηλαδή το αριθμητικό πεδίο ταυτίζεται με τον κλειστό μοναδιαίο (κυκλικό) δίσκο $\Delta(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Βασικές Ιδιότητες

Πρόταση

(Συμπάγεια) *Για κάθε πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$*, το* $F(A)$ *είναι ένα συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη.

Το $F(A)$, όπως ήδη παρατηρήσαμε, είναι η εικόνα της (Ευκλείδειας) μοναδιαίας σφαίρας $\{x \in \mathbb{C}^\nu : x^*x = 1\}$ στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω της απεικόνισης $x \to x^* Ax$. Όμως η σφαίρα είναι συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) σύνολο και η εν λόγω απεικόνιση συνεχής. Επομένως, από το Θεώρημα του Weierstrass το $F(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου). $\square$

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *και* $a \in \mathbb{C}$, *ισχύουν*

$$F(A + a\, I_\nu) = F(A) + a \quad \textit{και} \quad F(a\, A) = a\, F(A).$$

Απόδειξη.

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$F(A + a\, I_\nu) = \{x^* A x + x^* a\, I_\nu\, x : x \in \mathbb{C}^\nu,\ x^* x = 1\} = F(A) + a$$

και

$$F(a\, A) = \{a\, x^* A x : x \in \mathbb{C}^\nu,\ x^* x = 1\} = a\, F(A).$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση

Για έναν πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $F(A) = \{a\}$ *αν και μόνο αν* $A = a\, I_\nu$.

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A. Τότε

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

είναι το *ερμιτιανό μέρος* και *αντιερμιτιανό μέρος* του A, αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι $A = H(A) + S(A)$, καθώς και ότι οι πίνακες $H(A)$ και $S(A)$ είναι ερμιτιανός και αντιερμιτιανός αντίστοιχα.

Πρόταση

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύουν*

$$F(H(A)) = \mathrm{Re}(F(A)) \quad \textit{και} \quad F(S(A)) = \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(F(A)).$$

Απόδειξη.

Για τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^{\nu}$, έχουμε

$$x^*H(A)x = x^*\frac{A+A^*}{2}x = \frac{x^*Ax + x^*A^*x}{2} = \frac{x^*Ax + \overline{xAx^*}}{2} = \mathrm{Re}(x^*Ax)$$

και

$$x^*S(A)x = x^*\frac{A-A^*}{2}x = \frac{x^*Ax - x^*A^*x}{2} = \frac{x^*Ax - \overline{x^*Ax}}{2} = \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(x^*Ax).$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Πόρισμα

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει ότι* $F(A) \subset \mathbb{R}$ *αν και μόνο αν ο* A *είναι ερμιτιανός.*

Πρόταση

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *το φάσμα του,* $\sigma(A)$, *περιέχεται στο αριθμητικό του πεδίο* $F(A)$.

Απόδειξη.

Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $x \in \mathbb{C}^{\nu}$ ένα μοναδιαίο (δηλαδή, $x^*x = 1$) ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε ισχύει $\lambda = \lambda(x^*x) = x^*(\lambda x) = x^*Ax \in F(A)$. $\square$

Πρόταση

(Υπο-προσθετικότητα) *Για κάθε* $A, B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει*

$$F(A+B) \subseteq F(A) + F(B).$$

Πρόταση

Για κάθε $A, U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *με* U *ορθομοναδιαίο, ισχύει*

$$F(U^* A\, U) = F(A).$$

Απόδειξη.

Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι

$$\begin{aligned} F(U^* A\, U) &= \{x^*(U^* A\, U)\,x : \ x \in \mathbb{C}^\nu,\ x^* x = 1\} \\ &= \{(Ux)^* A\,(Ux) : \ U\,x \in \mathbb{C}^\nu,\ (U\,x)^*(U\,x) = 1\}\,. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Πρόταση

(Κανονικότητα) *Για κάθε κανονικό πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, *δηλαδή το αριθμητικό πεδίο κανονικού πίνακα είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του.*

Απόδειξη.

Ο κανονικός πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu\}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες). Δηλαδή, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $A = U^*\Lambda U$. Έτσι από την Πρόταση 26, έχουμε

$$
\begin{aligned}
F(A) &= F(U^*\Lambda U) = F(\Lambda) \\
&= \{x^*\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu\}x : x \in \mathbb{C}^\nu, x^*x = 1\}
\end{aligned}
$$

$\square$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \bar{x}_i x_i \, \lambda_i : \sum_{i=1}^{\nu} \bar{x}_i x_i = 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} |x|_i^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^{\nu} |x|_i^2 = 1 \right\} \\
&= \mathrm{Co}(\sigma(A))
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Ως πόρισμα της προηγούμενης πρότασης, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι ερμιτιανός, οπότε και έχει αποκλειστικά πραγματικές ιδιοτιμές.

Πόρισμα

Αν ένας $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό πεδίο του είναι το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του A.

Υπενθυμίζουμε ότι το *ευθύ άθροισμα* δύο πινάκων $A \in \mathbb{C}^{\nu_1 \times \nu_1}$ και $B \in \mathbb{C}^{\nu_2 \times \nu_2}$ ορίζεται ως ο $(\nu_1 + \nu_2) \times (\nu_1 + \nu_2)$ πίνακας

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu_1 \times \nu_1}$ *και* $B \in \mathbb{C}^{\nu_2 \times \nu_2}$, *ισχύει*

$$F(A \oplus B) = \mathrm{Co}(F(A) \cup F(B)).$$

Πρόταση

Για κάθε κύριο υποπίνακα $\hat{A}$ *ενός πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *ισχύει* $F(\hat{A}) \subseteq F(A)$.

Πρόταση

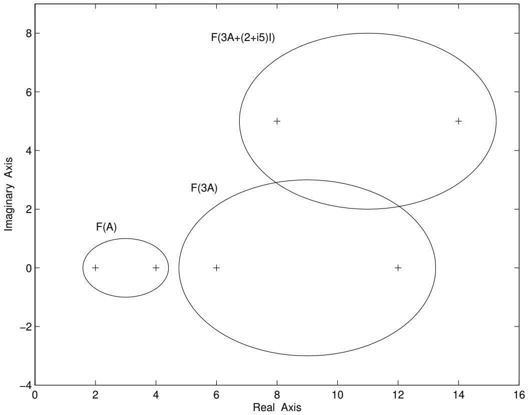
Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A.

(i) *Αν ο* A *είναι πραγματικός, τότε το* $F(A)$ *είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.*

(ii) *Γενικά ισχύει ότι* $F(A^*) = \overline{F(A)}$.

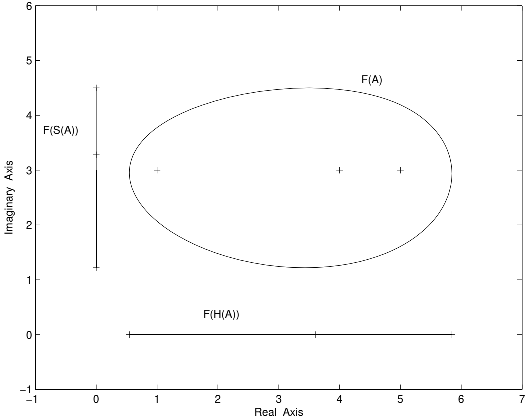
Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Στο σχήμα δίνονται τα αριθμητικά πεδία των πινάκων A, $3\,A$ και $3\,A + (2 + \mathrm{i}\,5)\,I_2$.



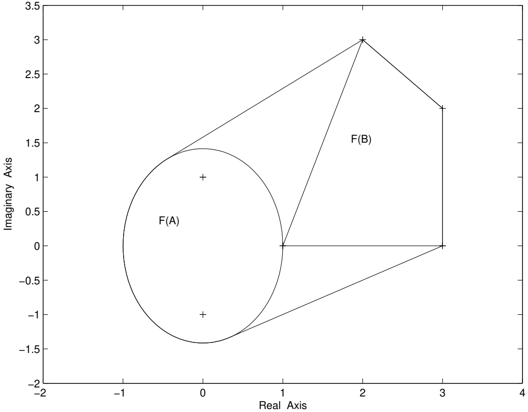
2. Ας θεωρήσουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1+i3 & -1 & 1-i2 \\ 0 & 4+i3 & 2-i \\ 0 & 0 & 5+i3 \end{bmatrix}$$



3. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 2 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ και $B = \mathrm{diag}\{1, 3, 3 + \mathrm{i}\,2, 2 + \mathrm{i}\,3\}$.

Ο πίνακας B είναι διαγώνιος (κανονικός), έτσι το $F(B)$ είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του. Άρα το $F(B)$ είναι το τετράπλευρο με κορυφές τις τέσσερις ιδιοτιμές του πίνακα B, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3 + \mathrm{i}\,2$ και $\lambda_4 = 2 + \mathrm{i}\,3$.



Κυρτότητα

Θεώρημα (Ελλειπτικό Θεώρημα)

Έστω $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Το αριθμητικό πεδίο του A είναι ένας κλειστός ελλειπτικός δίσκος με εστίες λ_1, λ_2 και μήκος μικρού άξονα ίσο με $\sqrt{tr(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα είναι κυρτό. Η κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου ενός 2×2 πίνακα προκύπτει από το Ελλειπτικό Θεώρημα.

Θεώρημα (Toeplitz-Hausdorff)

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$, *το αριθμητικό πεδίο* $F(A)$ *είναι κυρτό.*

Απόδειξη.

Για να δείξουμε την κυρτότητα ενός συνόλου S, αρκεί να δείξουμε ότι $a\,s + (1-a)\,t \in S$ για κάθε $s, t \in S$ και $a \in [0, 1,]$. Επομένως για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$, το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι κυρτό αν και μόνο αν $a\,x^* A\,x + (1-a)\,y^* A\,y \in F(A)$ για κάθε $a \in [0, 1,]$ και $x, y \in \mathbb{C}^{\nu}$ μοναδιαία διανύσματα. Όμως για κάθε ζεύγος γραμμικά ανεξαρτήτων μοναδιαίων διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^{\nu}$, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ και δύο μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{C}^{\nu}$ με όλα τα στοιχεία τους εκτός των δύο πρώτων να είναι μηδενικά, τέτοια ώστε $x = U\,\hat{x}$ και $y = U\,\hat{y}$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Έστω $x, y \in \mathbb{C}^{\nu}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και ο $\nu \times 2$ πίνακας $B = [x\ y]$. □

Απόδειξη.

Από την παραγοντοποίηση *SVD* του B, έχουμε

$$B = U \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

όπου ο πίνακας U είναι ορθομοναδιαίος $\nu \times \nu$, ο V είναι ορθομοναδιαίος 2×2 και $s_1 \geq s_2 > 0$ (αφού $\mathrm{rank}(B) = 2$). Έτσι ο πίνακας B γράφεται στη μορφή

$$B = U \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} V^* \\ 0_{(\nu-2)\times 2} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, $B = [x\ y] = U\,\hat{B}$, όπου ο $\hat{B} = [\hat{x}\ \hat{y}]$ είναι ένας $\nu \times 2$ πίνακας

Απόδειξη.

Επομένως, για κάθε γραμμικά ανεξάρτητα μοναδιαία διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}^\nu$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} a\, x^* A\, x + (1-a)\, y^* A\, y &= a\, \hat{x}^* U^* A\, U\, \hat{x} + (1-a)\, \hat{y}^* U^* A\, U\, \hat{y} \\ &= a\, \hat{\xi}^* C\, \hat{\xi} + (1-a)\, \hat{\eta}^* C\, \hat{\eta}, \end{aligned}$$

όπου C είναι ο πρώτος 2×2 κύριος υποπίνακας του $U^* A\, U$ και $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ είναι τα διανύσματα με στοιχεία, τα δύο πρώτα στοιχεία των $\hat{x}, \hat{y}$. Από το Ελλειπτικό Θεώρημα και την Πρόταση 26, προκύπτει η ζητούμενη κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου. □

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε το* 0 *δεν ανήκει στο* $F(A)$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $\theta \in [0, 2\pi]$ *τέτοιος ώστε ο ερμιτιανός πίνακας* $H(e^{i\theta}A) = \frac{1}{2}(e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)$ *να είναι θετικά ορισμένος.*

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

- ***(i)*** $0 \in \mathrm{Int}(F(A))$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\theta \in [0, 2\pi]$, *ο* $H(e^{i\theta}A)$ *είναι αόριστος.*
- ***(ii)*** $0 \in \partial F(A)$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ *τέτοιο ώστε ο πίνακας* $H(e^{i\theta_0}A)$ *να είναι μη αντιστρέψιμος και θετικά ημιορισμένος.*
- ***(iii)*** $0 \notin F(A)$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ *τέτοιο ώστε ο πίνακας* $H(e^{i\theta_0}A)$ *να είναι θετικά ορισμένος.*

Αριθμητική Ακτίνα

Η *αριθμητική ακτίνα* *(numerical radius)* ενός τετραγωνικού πίνακα A ορίζεται ως

$$r(A) = \max\{|z| : z \in F(A)\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η φασματική ακτίνα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Από το γεγονός ότι $\sigma(A) \subseteq F(A)$, για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, προκύπτει άμεσα ότι

Πρόταση

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *τότε ισχύει* $\rho(A) \leq r(A)$.

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $\frac{1}{2}\|A\|_2 \le r(A) \le \|A\|_2$.

Απόδειξη.

Έχουμε

$$r(A) = \max_{\|x\|_2=1} |x^* A x| \le \max_{\|x\|_2=1} (\|Ax\|_2\|x\|_2) = \max_{\|x\|_2=1} (\|Ax\|_2) = \|A\|_2$$

και

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \left\|\frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}\right\|_2 \\ &\le \left\|\frac{A+A^*}{2}\right\|_2 + \left\|\frac{A-A^*}{2}\right\|_2 \\ &= r\left(\frac{A+A^*}{2}\right) + r\left(\frac{A-A^*}{2}\right),\end{aligned}$$

□

Απόδειξη.
όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω κανονικότητας. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} r\left(\frac{A+A^*}{2}\right)+r\left(\frac{A-A^*}{2}\right) &\leq \frac{r(A)+r(A^*)}{2}+\frac{r(A)+r(A^*)}{2} \\ &= r(A)+r(A^*) = 2\,r(A), \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Από τα προηγούμενα μπορούμε να συνάγουμε την εξής ανισότητα

$$\rho(A) \leq r(A) \leq \|A\|_2.$$

Μπορείτε να σκεφθείτε κάποιες κατηγορίες πινάκων για τις οποίες ισχύει η ισότητα·

Η αριθμητική ακτίνα είναι διανυσματική νόρμα (δηλαδή, χωρίς να ικανοποιεί την ιδιότητα της υπο-πολλαπλασιαστικότητας), αλλά δεν είναι νόρμα πινάκων.

Πρόταση

Η αριθμητική ακτίνα στο διανυσματικό χώρο των τετραγωνικών πινάκων είναι διανυσματική νόρμα.

Πρόταση

Η νόρμα $4\,r(\cdot)$ *είναι νόρμα πινάκων στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$.

Πρόταση (Ανισότητα δυνάμεων)

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *ισχύει* $r(A^n) \leq r(A)^n$.

Προσέγγιση

Γενικά, για ένα σημείο a του αριθμητικού πεδίου $F(A)$, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα $x \in \mathbb{C}^\nu$ που ικανοποιούν τη σχέση $x^* A x = a$. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό μόνο στην περίπτωση "ακραίων" συνοριακών σημείων.

Λήμμα

Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $x_0 \in \mathbb{C}^\nu$ με $x_0^* x_0 = 1$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathrm{Re}\,(x_0^* A x_0) = \max\{\mathrm{Re}(a) : \ a \in F(A)\}$,

(ii) $x_0^* H(A)\, x_0 = \max\{b : \ b \in F(H(A))\}$,

(iii) $H(A)\, x_0 = \lambda_{\max}(H(A))\, x_0$,

όπου $\lambda_{\max}(H(A))$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα $H(A)$.

Από το προηγούμενο λήμμα επαληθεύεται ότι

$$\max\{\mathrm{Re}(a) : \ a \in F(A)\} \ = \ \max\{h : \ h \in F(H(A))\} \ = \ \lambda_{\max}(H(A)).$$

- Αυτό σημαίνει ότι το "δεξιότερο" σημείο του $F(A)$ έχει πραγματικό μέρος τη μέγιστη ιδιοτιμή του ερμιτιανού μέρους του πίνακα A, $\lambda_{\max}(H(A))$.
- Αν υπολογισθεί η $\lambda_{\max}(H(A))$ και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της x, τότε το "δεξιότερο" συνοριακό σημείο του $F(A)$ είναι το $x^* A x$.
- Η ευθεία $\{\lambda_{\max}(H(A)) + \mathrm{i}\, t : \ t \in \mathbb{R}\}$ είναι εφαπτομένη του κυρτού συνόλου $F(A)$ σε αυτό το συνοριακό σημείο.
- Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση $e^{-\mathrm{i}\,\theta} F(e^{\mathrm{i}\,\theta} A) = F(A)$, είναι δυνατόν να πάρουμε όσα συνοριακά σημεία και όσες εφαπτόμενες ευθείες θέλουμε στρέφοντας το $F(A)$ και κάνοντας τον απαιτούμενο υπολογισμό των ιδιοζευγών.

Ορίζουμε

- $\lambda_\theta = \lambda_{\max}(H(e^{\mathrm{i}\,\theta}A))\ \ \theta \in [0, 2\,\pi]$, και $x_\theta \in \mathbb{C}^\nu$ ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Δηλαδή, $H(e^{\mathrm{i}\,\theta}A)x_\theta = \lambda_\theta x_\theta$ με $x_\theta^* x_\theta = 1$.
- Επίσης l_θ την εφαπτόμενη ευθεία $\{e^{-\mathrm{i}\,\theta}(\lambda_\theta + \mathrm{i}\,t) : t \in \mathbb{R}\}$ και συμβολίζουμε το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την l_θ και περιέχει το πεδίο $F(A)$, με $H_\theta = e^{-\mathrm{i}\,\theta}\{z : \operatorname{Re}(z) \leq \lambda_\theta\}$. Βάσει των παραπάνω έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Ορίζουμε

- $\lambda_\theta = \lambda_{\max}(H(e^{i\theta}A))$ $\theta \in [0, 2\pi]$, και $x_\theta \in \mathbb{C}^\nu$ ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Δηλαδή, $H(e^{i\theta}A)x_\theta = \lambda_\theta x_\theta$ με $x_\theta^* x_\theta = 1$.
- Επίσης l_θ την εφαπτόμενη ευθεία $\{e^{-i\theta}(\lambda_\theta + i\,t) : t \in \mathbb{R}\}$ και συμβολίζουμε το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την l_θ και περιέχει το πεδίο $F(A)$, με $H_\theta = e^{-i\theta}\{z : \operatorname{Re}(z) \leq \lambda_\theta\}$. Βάσει των παραπάνω έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, ο μιγαδικός αριθμός $p_\theta = x_\theta^* A x_\theta$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $F(A)$. Η ευθεία l_θ είναι εφαπτόμενη του $F(A)$ με $p_\theta \in l_\theta \cap F(A)$ και $F(A) \subset H_\theta$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$.

Επειδή το $F(A)$ είναι κυρτό, γίνεται εποπτικά φανερό ότι κάθε συνοριακό σημείο του εμφανίζεται ως ένα p_θ και για κάθε $a \notin F(A)$ υπάρχει μία ευθεία l_θ που αφήνει το $F(A)$ και το A σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, δηλαδή $a \notin H_\theta$ ενώ $F(A) \in H_\theta$. Έτσι το αριθμητικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άπειρη τομή κλειστών ημιεπιπέδων:

Θεώρημα

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$,

$$F(A) = \mathrm{Co}\left(\{p_\theta : 0 \le \theta \le 2\pi\}\right) = \bigcap_{0\le\theta\le 2\pi} H_\theta .$$

Αφού δε γίνεται να υπολογίσουμε άπειρα σημεία p_θ και άπειρες ευθείες l_θ, απλά αρκούμαστε σε ένα διακριτό ανάλογο του τελευταίου θεωρήματος, επιλέγοντας μία διαμέριση του $[0, 2\pi]$, έστω

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}, \quad \text{όπου} \quad 0 = \theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_k = 2\pi .$$

Το Σύνορο

Το αριθμητικό πεδίο ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, είναι

- ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $b = 0$,
- το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα λ_1, λ_2 αν και μόνο αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $b = 0$,
- ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα $|b|/2$ αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2$,
- ένας ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις λ_1, λ_2 αν και μόνο αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $b \neq 0$.

Τι γίνεται όμως για πίνακες μεγαλύτερης διάστασης;

Ένα $a \in \partial F(A)$ καλείται *γωνιακό σημείο (angular point, sharp point)* του $F(A)$ αν υπάρχουν γωνίες θ_1 και θ_2 με $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$ και $\theta_1 - \theta_2 < \pi$, για τις οποίες $\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta} a) = \max\{\mathrm{Re}(b) : b \in F(e^{\mathrm{i}\theta} A)\}$ για κάθε $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$. *Αν* $a \in \mathbb{C}$ *είναι ένα γωνιακό σημείο του* $F(A)$, *τότε το* a *είναι ιδιοτιμή του* A.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Αν* $a \in \mathbb{C}$ *είναι ένα γωνιακό σημείο του* $F(A)$, *τότε το* a *είναι ιδιοτιμή του* A.

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Το πεδίο* $F(A)$ *έχει το πολύ* ν *γωνιακά σημεία και είναι κυρτό πολύγωνο αν και μόνο αν* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Αν* $a \in \mathbb{C}$ *είναι ένα γωνιακό σημείο του* $F(A)$, *τότε το* a *είναι ιδιοτιμή του* A.

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Το πεδίο* $F(A)$ *έχει το πολύ* ν *γωνιακά σημεία και είναι κυρτό πολύγωνο αν και μόνο αν* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$.

Μια ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ καλείται *κανονική* αν η γεωμετρική της πολλαπλότητα ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα και κάθε ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ είναι κάθετο σε κάθε ιδιοδιάνυσμα άλλης ιδιοτιμής. Ακολουθεί ένα θεώρημα που μας εξασφαλίζει τη κανονικότητα κάθε ιδιοτιμής που βρίσκεται στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα.

Θεώρημα

Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *και* $a \in \partial F(A) \cap \sigma(A)$, *τότε η ιδιοτιμή* a *είναι κανονική ιδιοτιμή του πίνακα* A. *Επιπλέον, αν* m *είναι η πολλαπλότητα της* a, *τότε ο* A *είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής* $aI_m \oplus B$, *όπου* $B \in \mathbb{C}^{(\nu-m)\times(\nu-m)}$ *και* $a \notin \sigma(B)$.

Απόδειξη Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής a είναι m, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 7 του Schur, ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα T του οποίου τα πρώτα m διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με a και τα υπόλοιπα είναι οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του A. Υποθέτουμε ότι ο T έχει μη μηδενικό στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου σε μία από τις m πρώτες γραμμές του. Τότε υπάρχει ένας κύριος 2×2 υποπίνακας $T_0 = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$, με $c \neq 0$. Όμως το πεδίο $F(T_0)$ είναι ή κυκλικός δίσκος με ακτίνα $|c|/2$ (όταν $a = b$) ή μη εκφυλισμένη έλλειψη με εστίες a, b.

Έτσι έχουμε ότι το a είναι εσωτερικό σημείο του $F(T_0)$. Όμως $F(T_0) \subseteq F(T) = F(A)$, από τις Προτάσεις 26 και 30. Δηλαδή, το σημείο a είναι εσωτερικό του $F(A)$, άτοπο αφού το a είναι συνοριακό σημείο του $F(A)$. Από το άτοπο αυτό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία εκτός της κυρίας διαγώνιου στις m πρώτες γραμμές του T. Έτσι $T = a\,I_m \oplus B$, $B \in \mathbb{C}^{(\nu-m)\times(\nu-m)}$. Τα υπόλοιπα συμπεράσματα του θεωρήματος προκύπτουν άμεσα.

Πόρισμα

Αν $\nu - 1$ *ιδιοτιμές του πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ *(συνυπολογίζοντας και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες) ανήκουν στο σύνορο του* $F(A)$, *τότε ο πίνακας* A *είναι κανονικός.*

Πόρισμα

Αν $\nu - 1$ *ιδιοτιμές του πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *(συνυπολογίζοντας και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες) ανήκουν στο σύνορο του* $F(A)$, *τότε ο πίνακας* A *είναι κανονικός.*

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$ *αν και μόνο αν ο* A *είναι κανονικός ή είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής* $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, *όπου ο* A_1 *είναι κανονικός και* $F(A_2) \subset F(A_1)$.

Πόρισμα

Αν $\nu - 1$ *ιδιοτιμές του πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *(συνυπολογίζοντας και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες) ανήκουν στο σύνορο του* $F(A)$, *τότε ο πίνακας* A *είναι κανονικός.*

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$ *αν και μόνο αν ο* A *είναι κανονικός ή είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής* $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, *όπου ο* A_1 *είναι κανονικός και* $F(A_2) \subset F(A_1)$.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *και* $\nu \leq 4$, *τότε ο* A *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $F(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$.

Βιβλιογραφία

- *R. Horn, CR Johnson, Matrix Analysis*
- *R. Horn, CR Johnson, Topics in Matrix Analysis*
- Π. Ψαρράκος, Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων