Κεφάλαιο 4

Μετασχηματισμός Laplace

1. Για το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=te^{-2t}u(t) \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}=-1$$

χρησιμοποιώντας τις τεχνικές μετ/μού Laplace να βρείτε:

α. την έξοδο $y(t)$

β. την κρουστική απόκριση $h(t)$

Λύση

α. $\mathcal{L}\left(te^{-2t}u(t)\right)=\dfrac{1}{(s+2)^2}$ άρα $(1) \xRightarrow{Laplace}$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\left(sY(s)-y(0)\right)+5Y(s)=\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-s+1+2sY(s)-2+5Y(s)=\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$\left(s^2+2s+5\right)Y(s)-(s+1)=\frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$\left(s^2+2s+5\right)Y(s)=\frac{1}{(s+2)^2}+(s+1)=\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{(s+1)(s+2)^2}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$\left(s^2+2s+5\right)Y(s)=\frac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+2)^2} \Rightarrow \boxed{Y(s)=\frac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+2)^2(s^2+2s+5)}} \quad (2)$$

$\Rightarrow$

Άρα:

$$Y(s)=\frac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+2)^2\left(s-(-1+2i)\right)\left(s-(-1-2i)\right)} \xrightarrow[\text{σε κλάσματα}]{\text{Ανάλυση}}$$

$$Y(s)=\frac{k_1}{(s+2)^2}+\frac{k_2}{(s+2)}+\frac{k_3 s+k_4}{\left(s-(-1+2i)\right)\left(s-(-1-2i)\right)}$$

άρα $k_1 = Y(s)(s+2)^2\Big|_{s=-2} \Rightarrow k_1 = 1/5$

$$k_2=\frac{d\left(Y(s)(s+2)^2\right)}{ds}\Bigg|_{s=-2} = \frac{(3s^2+10s+8)\left(s-(-1+2i)\right)\left(s-(-1-2i)\right)-(s^3+5s^2+8s+5)(2s-2)}{\left(s-(-1+2i)\right)\left(s-(-1-2i)\right)}\Bigg|_{s=-2}$$

$\Rightarrow k_2 = 2/25$

$$k_3 s+k_4\Big|_{s=-1+2i} = Y(s)\left(s-(-1+2i)\right)\left(s-(-1-2i)\right)\Big|_{s=-1+2i} = \frac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-1+2i}$$

$\Rightarrow k_3(-1+2i)+k_4 = -\frac{3}{25}+\frac{46}{25}i \Rightarrow k_3 = 23/25,\ k_4 = 20/25$

άρα

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1/5}{(s+2)^2}+\frac{2/25}{s+2}+\frac{23/25\,(s+2)}{(s+1)^2+4}+\frac{-3/25}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{5}te^{-2t}u(t)+\frac{2}{25}e^{-2t}u(t)+\frac{23}{25}e^{-t}\cos(2t)u(t)-\frac{3}{50}e^{-t}\sin(2t)u(t).$$

β. $\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 5h(t) = \delta(t)$

$$\Big\Downarrow \text{Laplace}$$

$$s^2H(s) - \cancel{sh(0)}^{0} - \cancel{h'(0)}^{0} + 2sH(s) - \cancel{2h(0)}^{0} + 5H(s) = 1$$

$$(s^2+2s+5)H(s) = 1 \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{k_2s+k_3}{(s-(-1+2i))(s-(-1-2i))}$$

$$= \frac{k_2s+k_3}{(s+1)^2+4} \Rightarrow H(s) = \frac{1/2 \cdot 2}{(s+1)^2+4}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)u(t)$$

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

Λύση

$$F(s)=\frac{C_1}{(s+1)^2}+\frac{C_2}{(s+1)}+\frac{C_3 s+C_4}{(s+i)(s-i)}$$

Άρα:

$$C_1=F(s)(s+1)^2\Big|_{s=-1}=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=-1}=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-1/2$$

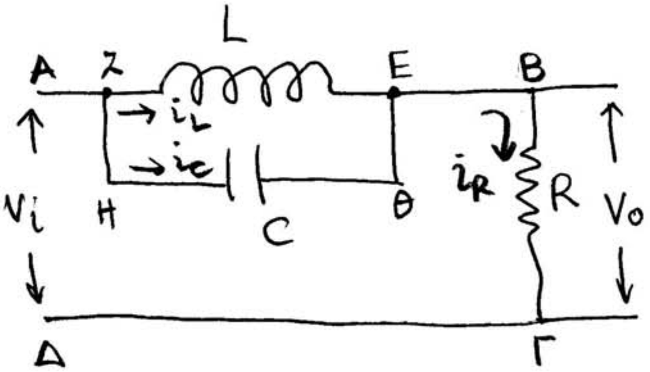
$$C_2=\frac{d\left(F(s)(s+1)^2\right)}{ds}\Bigg|_{s=-1}=\frac{(s^2+1)-s\cdot 2s}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=-1}=0$$

$$C_3 s+C_4\Big|_{s=-i}=F(s)(s^2+1)\Big|_{s=-i}=\frac{s}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-i}=\frac{-i}{(1-i)^2}=\frac{-i}{-2i}=1/2$$

άρα $-iC_3+C_4=1/2 \Rightarrow C_3=0$ και $C_4=1/2$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1/2}{(s+1)^2}+\frac{1/2}{s^2+1}\right)=-1/2\,t\,e^{-t}u(t)+1/2\sin(t)$$

3. Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα: (Αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία)



α. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς συναρτήσει των L, C, R.

β. Αν $L=2H$, $C=1/2\,F$ και $R=2\Omega$ και το σύστημα αρχικά ηρεμεί να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$.

γ. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας $H(i\omega)$

Λύση

α.

Νόμοι Kirchoff:

Βρόγχος ΑΒΓΔ: $V_i - V_C - V_o = 0 \Rightarrow V_C = V_i - V_o \quad (V_o = V_R)$ (1)

Βρόγχος ΖΗΘΕ: $V_C = V_L = L\frac{di_L}{dt}$ (2)

κόμβος Ε: $i_C + i_L = i_R \Rightarrow C\frac{dV_C}{dt} + i_L = \frac{V_o}{R} \Rightarrow i_L = \frac{V_o}{R} - C\frac{dV_C}{dt}$ (3)

Από $(1)+(3) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad V_i - V_o = L\left(\frac{dV_o}{R} - C\frac{d^2(V_i-V_o)}{dt^2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{d^2V_i}{dt^2} + \frac{1}{LC}V_i = \frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{LC}$$ Laplace και μηδενικές $\Rightarrow$ αρχικές συνθήκες

$$\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)V_i(s) = \left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)V_o(s) \quad \overset{H(s)=V_o(s)/V_i(s)}{\Longrightarrow}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

β. Για $L = 2H$, $C = 1/2 F$, $R = 2\Omega$

έχουμε:
$$H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+s+1}$$

Διαίρεση πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l} s^2+1 & s^2+s+1 \\ \hline -s^2-s-1 & 1 \\ \hline -s & \end{array}$$

Άρα $H(s) = 1 - \dfrac{s}{s^2+s+1}$

$$\Rightarrow H(s) = 1 - \underbrace{\frac{s}{\left(s - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(s - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}}_{=H'(s)}$$

Άρα $H'(s) = \dfrac{k_1 s + k_2}{\left(s - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(s - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow k_1 s + k_2 \Big|_{s=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = -s \Big|_{s=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

$$\Rightarrow k_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k_2 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2 \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{array}$$

Άρα
$$H(s) = 1 - \frac{1s}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} + \frac{1/2}{(s+1/2)^2+3/4} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

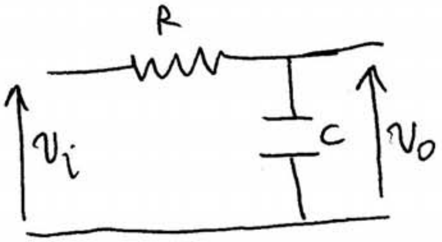
$$h(t) = \delta(t) - e^{-1/2 t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

γ. $$H(i\omega) = \frac{(i\omega)^2+1}{(i\omega)^2+(i\omega)+1} = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)+i\omega} = \frac{(1-\omega^2)(1-\omega^2-i\omega)}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} = \frac{(1-\omega^2)^2 - i\omega(1-\omega^2)}{1-\omega^2+\omega^4}$$

άρα $$|H(i\omega)| = \sqrt{\left(\frac{(1-\omega^2)^2}{1-\omega^2+\omega^4}\right)^2 + \left(\frac{\omega(1-\omega^2)}{1-\omega^2+\omega^4}\right)^2} = (1-\omega^2)\sqrt{\frac{1}{1-\omega^2+\omega^4}}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{-\omega(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2} = -\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

(4)



Αν $v_i = V(u(t) - u(t-a))$
(τετραγωνικός παλμός)
$V_c(0) = 0$
$i(0) = 0$

$V_0 = V_C$ (1)

$V_i = V_R + V_C = iR + V_C = RC\frac{dV_c}{dt} + V_c$ (2)

$i = c\frac{dV_c}{dt}$ (3)

$$(2) \Rightarrow \frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{RC}V_0 = \frac{V}{RC}\left(u(t) - u(t-a)\right)$$

$\Downarrow$ Laplace

$$sV_0(s) + \frac{1}{RC}V_0(s) = \frac{V}{RC}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}\right)$$

$$V_0(s)\left(s + 1/RC\right) = \frac{V}{RC}\left(\frac{1 - e^{-as}}{s}\right)$$

$$V_0(s) = \frac{V}{RC}\frac{1 - e^{-as}}{s(s + 1/RC)} = \frac{V}{RC}\left(\frac{1 - e^{-as}}{s(s + 1/RC)}\right)$$

Ανάλυση σε κλάσματα

$$V_0(s) = \frac{V(1 - e^{-as})}{RC}\left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1/RC}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = RC \\ k_2 = -RC \end{array}$$

$$V_0(s) = \frac{V}{RC}(1 - e^{-as})\left(\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + 1/RC}\right) \Longrightarrow$$

$$V_0(s) = \frac{V}{RC}\left(\frac{RC}{s} - \frac{RCe^{-as}}{s} - \frac{RC}{s + 1/RC} + \frac{RC}{s + 1/RC}e^{-as}\right) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$V_0(t) = \frac{V}{RC}\left(RCu(t) - RCu(t-a) - RCe^{-t/RC}u(t) + RCe^{-(t-a)/RC}u(t-a)\right) \Rightarrow$$

Άρα

$$V_0(t) = V\left(u(t) - e^{-t/RC}u(t) - u(t-a) + e^{-(t-a)/RC}u(t-a)\right)$$

$$V_0(t) = \begin{cases} V\left(1 - e^{-t/RC}\right) & 0 < t \leq a \\ V\left(e^{-(t-a)/RC} - e^{-t/RC}\right) & t > a \end{cases}$$