



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ –

Διαφορικές εξισώσεις, Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

Λαμία, Μάϊος 2017

1. Αν με $y = y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$

ii) $y' + \frac{1+y^3}{(x+x^3)y^2} = 0$

iii) $y' = x^2 - 2xy + y^2$

iv) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

v) $y' = x + \sin(x) + y$

vi) $xy' = 1 + x^3 + y$

vii) $xy' - (1 - xy)y = 0$

viii) $x^4y' = (x^3 + y)y$

2. Αν με $y = y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

i) $x^2yy' = x + 1$, όταν $y(1) = 0$.

ii) $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, όταν $y(1) = 1$.

iii) $y' = x + y$, όταν $y(0) = 1$.

iv) $x \ln x y' = 3x^3 \ln^2 x + y$, όταν $y(2) = 1$.

v) $y' + \frac{2}{x}y + x^9y^5 = 0$, όταν $y(1) = 1$.

3. Αν με $y = y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x , να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων:

i) $y''' - 3y'' + 2y = \sin(x)$

ii) $y''' - y = e^x$

iii) $y''' - y'' - y' + y = e^{2x} + x$

iv) $y''' - 4y'' + y' - 10y = 1 - x$

v) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x$

4. Να λυθούν τα ακόλουθα ομογενή συστήματα των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων, όπου y' συμβολίζει την παράγωγο του πίνακα $y = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$ ως προς τη μεταβλητή x .

$y_1' = -y_1 - 4y_2 + 6y_3$

$y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3$

i) $y_2' = -y_1 - y_2 - 3y_3$

ii) $y_2' = -y_1 + 4y_2 - y_3$

$y_3' = y_1 + 2y_2 + 4y_3$

$y_3' = -y_1 - y_2 + 4y_3$

$y_1' = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3$

$y_1' = 4y_1 + y_2 + y_3$

iii) $y_2' = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3$

iv) $y_2' = -2y_1 + y_2 - 2y_3$

$y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 6y_3$

$y_3' = y_1 + y_2 + 4y_3$

Μετασχηματισμός Laplace και Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

5. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace με ανάλυση σε απλά κλάσματα ή μέσω της συνέλιξης κατάλληλων συναρτήσεων των ακόλουθων συναρτήσεων :

i) $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

ii) $G(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$

iii) $G(s) = \frac{1}{s^2(s+9)}$

iv) $G(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^2(s+3)}$

v) $G(s) = \frac{-12s+27}{(s+4)(s^2+9)}$

vi) $G(s) = \frac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)}$

6. Να λυθούν τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace :

- i) $y' + y = 1, y(0) = 0$
- ii) $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- iii) $y'' + 4y = 6u(x), y(0) = y'(0) = 0$
- iv) $2y'' - 3y' + y = 1, y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1$
- v) $y'' - 3y' + 2y = x, y(0) = y'(0) = 0$
- vi) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = 2$
- vii) $y'' + 3y' + 2y = e^{5x}, y(0) = 1, y'(0) = 3$
- viii) $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}, y(0) = 4, y'(0) = 2$
- ix) $y'' - y = 2\cos x, y(0) = 0, y'(0) = -1$
- x) $y' + y = 2\sin x, y(0) = 0$
- xi) $y'' + 4y = -6\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0$
- xii) $y'' + 9y = \frac{9}{5}u(x-3), y(0) = y'(0) = 0$

7. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να λυθούν τα επόμενα συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων :

- i) $\left. \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = y_2 - 2y_1 \end{array} \right\}, \text{ όταν } y_1(0) = 8, y_2(0) = 3$
- ii) $\left. \begin{array}{l} y_1' - 3y_1 = -2y_2 \\ y_2' - 3y_2 = -2y_1 \end{array} \right\}, y_1(0) = y_2(0) = 1$
- iii) $\left. \begin{array}{l} y_1 + y_1' = y_2 + e^x \\ y_2 + y_2' = y_1 + e^x \end{array} \right\}, y_1(0) = y_2(0) = 1$
- iv) $\left. \begin{array}{l} 6y_1' + 8y_1 - y_2' = 2y_2 + e^{2x} \\ 7y_1' + y_1 - y_2' = y_2 \end{array} \right\}, y_1(0) = y_2(0) = 0$
- v) $\left. \begin{array}{l} y_1' + y_1 + 2y_2' + 3y_2 = e^{-x} \\ 3y_1' - y_1 + 4y_2' = -y_2 \end{array} \right\}, y_1(0) = -1, y_2(0) = 0$