

Επεξεργασία και ανάλυση εικόνας: Βασικές αρχές

- Εισαγωγή. Βασικές έννοιες επεξεργασίας δισδιάστατων σημάτων. Αναπαράσταση ψηφιακής εικόνας. Ψηφιοποίηση.
- Χωρική επεξεργασία εικόνων (σημειακοί τελεστές, συνέλιξη, μη γραμμικά φίλτρα)
 - Βελτίωση και αποκατάσταση εικόνων, εξάλειψη θορύβου
 - Ανίχνευση ακμών
- Μετασχηματισμοί εικόνων (Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, FT, Radon, DT).
- Επεξεργασία εικόνων στο χώρο των συχνοτήτων
 - Βελτίωση και αποκατάσταση εικόνων, εξάλειψη θορύβου
 - Ανίχνευση ακμών

- Κατάτμηση εικόνων (ανάπτυξη περιοχών, ενεργά περιγράμματα κλπ).
- Τεχνικές περιγραφής και αναγνώρισης προτύπων
- Υφή εικόνας
- Τεχνικές κωδικοποίησης για επεξεργασία και μεταφορά και αποθήκευση.
- Εφαρμογές ψηφιακής επεξεργασίας εικόνων στην βιομηχανία, στο περιβάλλον, στην ιατρική κ.α.

Βιβλιογραφία

1. «Digital Image Processing», R. Gonzalez, R. Woods, 2nd ed. 2002.
2. «Practical Algorithms for Image Analysis: Descriptions, Examples, and Code», M. Seul, L. O'Gorman, M. Sammon.
3. «Fundamentals of Digital Image Processing», A. Jain.
4. «Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας», Ι. Πήττας.
5. «Ψηφιακή επεξεργασία και ανάλυση εικόνας», Ν. Παπαμάρκος

Ορισμοί

- Ψηφιακή Εικόνα $I(i,j)$: το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας μίας διδιάστατης συνάρτησης $f(x,y)$ (αναλογική πληροφορία)
- Η εικόνα f αποτελεί μετασχηματισμό που αντιστοιχεί ζεύγος ακέραιων συντεταγμένων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$f(x, y): N^2 \rightarrow \mathfrak{R}$$

- Η Εικόνα ψηφιοποιείται σε πίνακα γραμμών (rows) - πρώτη μεταβλητή- και στηλών (columns) -δεύτερη μεταβλητή.
- Η αρχή του συστήματος αναφοράς $(0,0)$ θεωρείται η πάνω αριστερή γωνία της εικόνας.

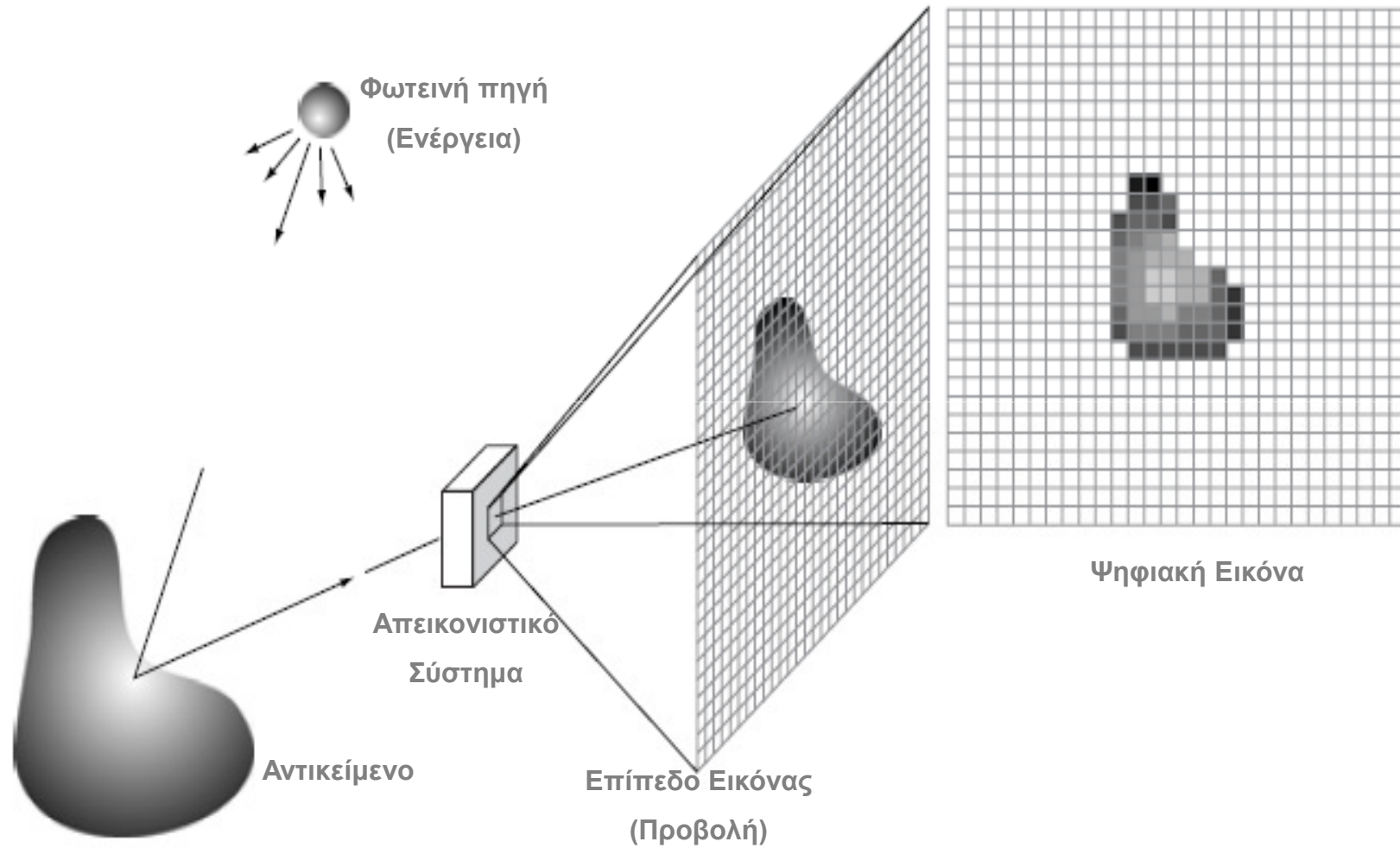
Χωρική Αναπαράσταση Εικόνων

- Οι εικόνες αποτελούνται από ένα σύνολο στοιχειωδών πληροφοριών:
 - Αντιστοιχούν στην τιμή ακτινοβολίας ή μίας μετρούμενης παραμέτρου
 - Οργανώνονται σε ορθογωνικές περιοχές
- Ανάλογα με τη διάσταση των εικόνων, η στοιχειώδης πληροφορία ορίζεται:
 - 2D Εικόνες: Εικονοστοιχείο ή Pixel (Picture Element)
 - 3D Εικόνες: Χωροστοιχείο ή Voxel (Volume Element)
 - 4D Εικόνες: Υπερ-χωροστοιχείο ή Hypervoxel (Hyper Volume Element)
 - Ως τέταρτη διάσταση θεωρείται ο χρόνος (t)

Συλλογή Εικόνων

- Εικόνες προέρχονται από φωτογραφικό φιλμ, video κάμερες, ψηφιακές κάμερες (CCD) με χρήση κατάλληλων ανιχνευτών
- Εικόνες ψηφιοποιούνται με κατάλληλες διατάξεις (σαρωτής (scanner), ψηφιοποιητής (grabber)) ή απευθείας (ψηφιακές κάμερες)
- Η απευθείας λήψη ψηφιακών εικόνων παρέχει αυξημένη ποιότητα εικόνων
 - Τα περισσότερα Ιατρικά Απεικονιστικά Συστήματα παρέχουν απευθείας ψηφιακή έξοδο

Συλλογή Ψηφιακής Εικόνας



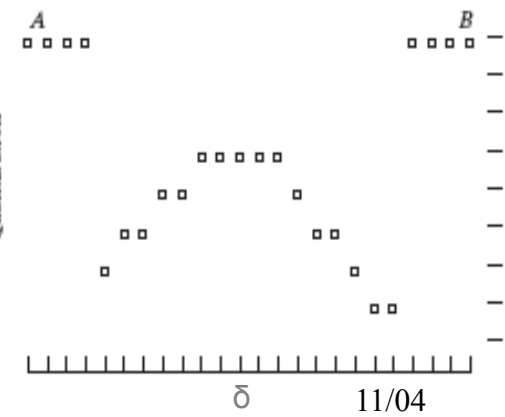
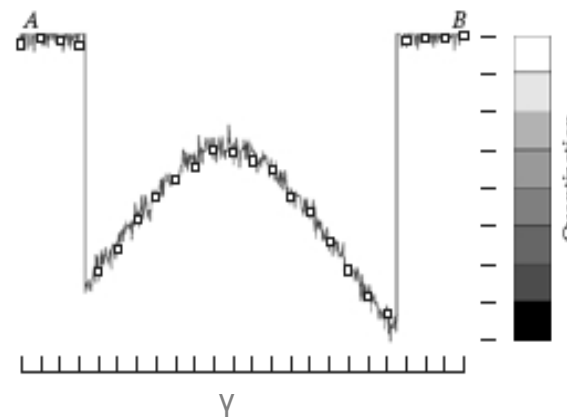
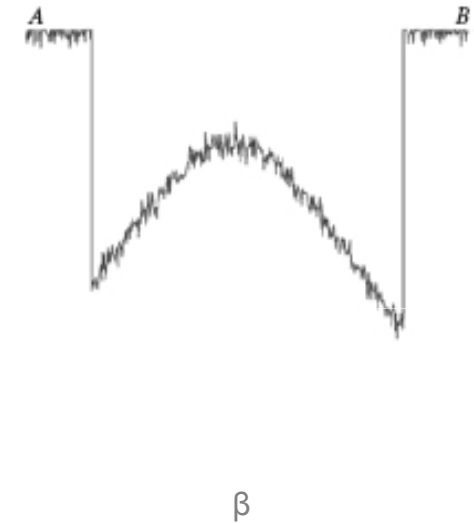
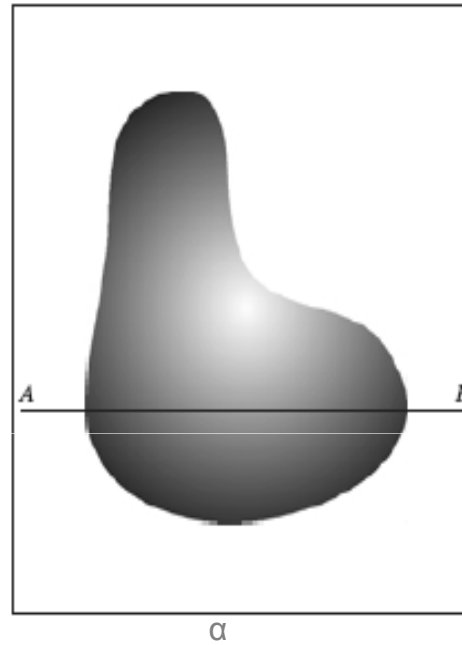
Δειγματοληψία - Κβαντισμός

(α) - Συνεχής εικόνα

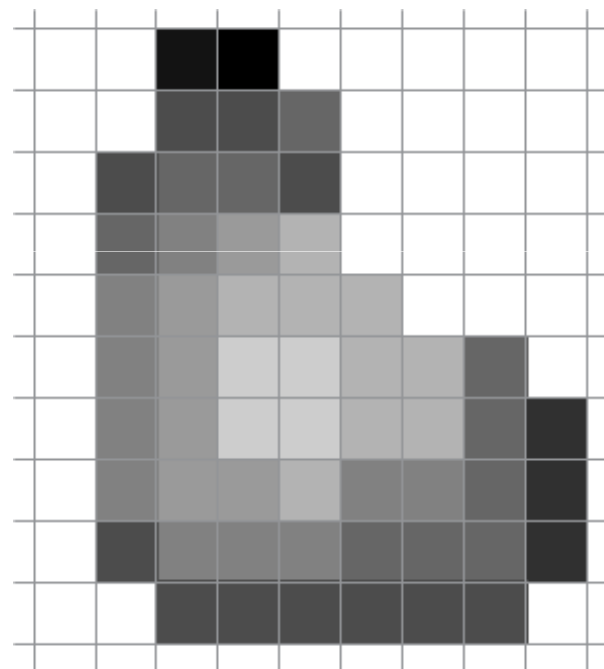
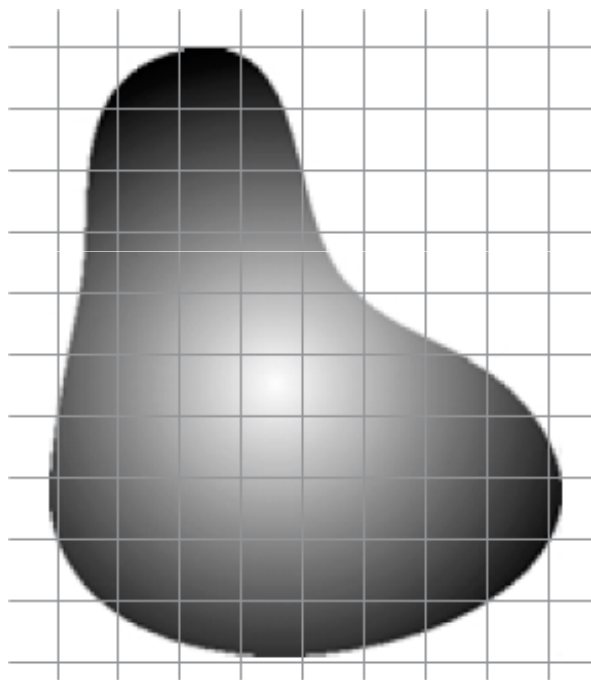
(β) - Προφίλ της γραμμής AB της
συνεχούς εικόνας

(γ) - Δειγματοληψία

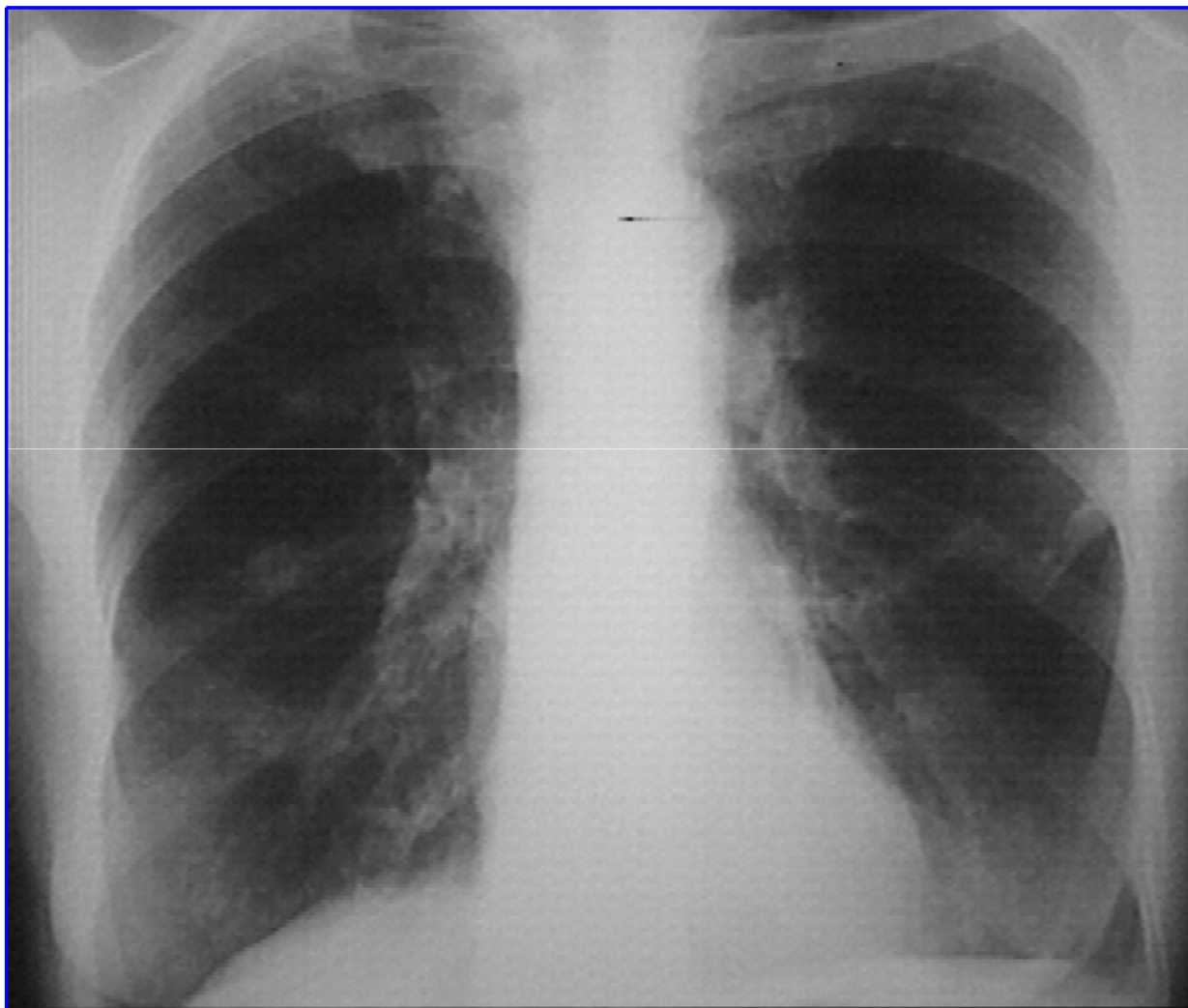
(δ) - Κβαντισμός (ψηφιακή
γραμμή)



Οι έννοιες δειγματοληψίας και κβαντισμού τιμών στην ψηφιακή εικόνα



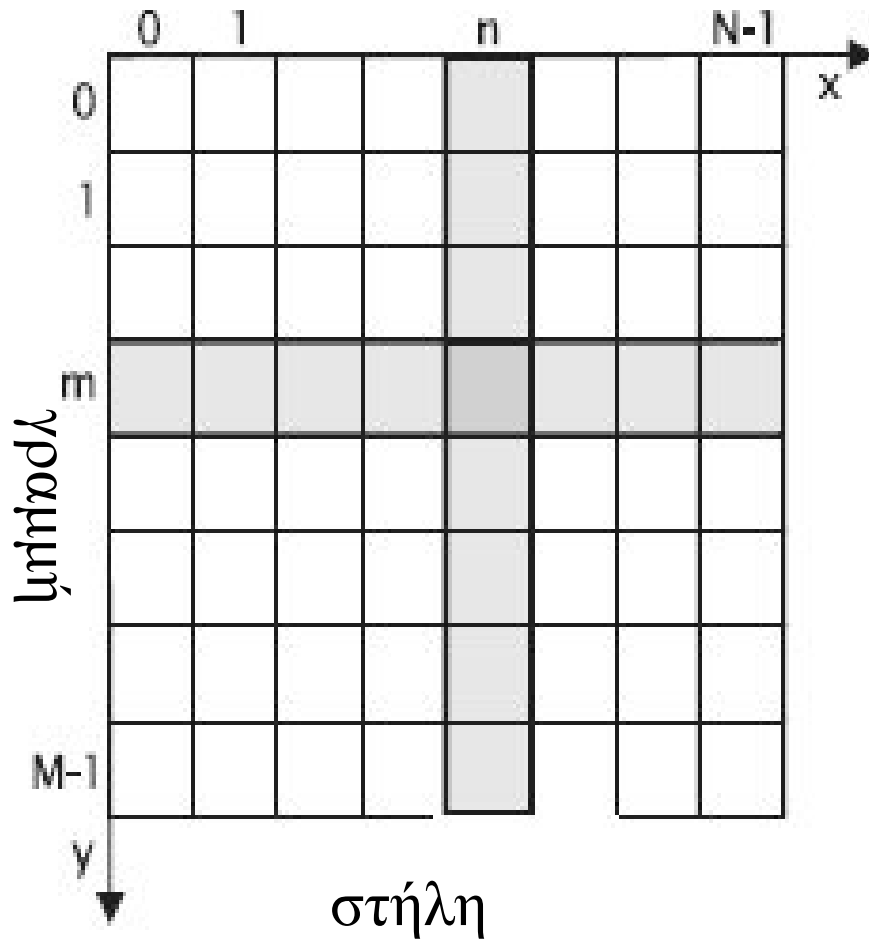
(0,0)



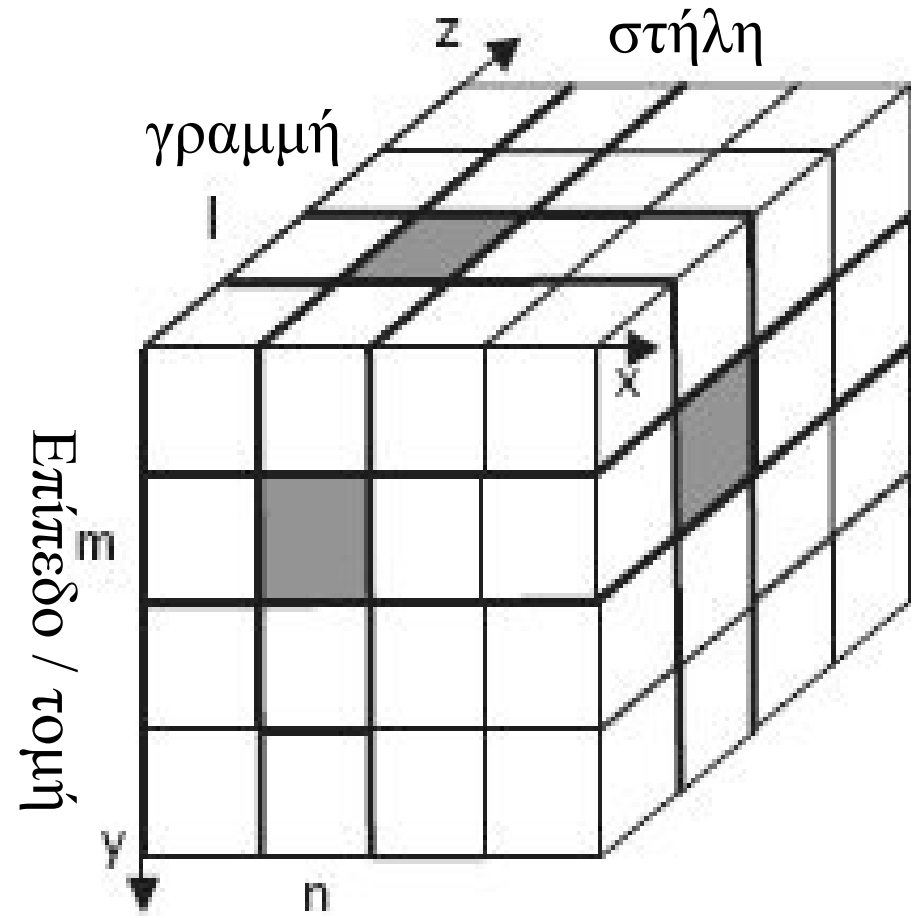
j

i

Χωρική Αναπαράσταση Εικόνων



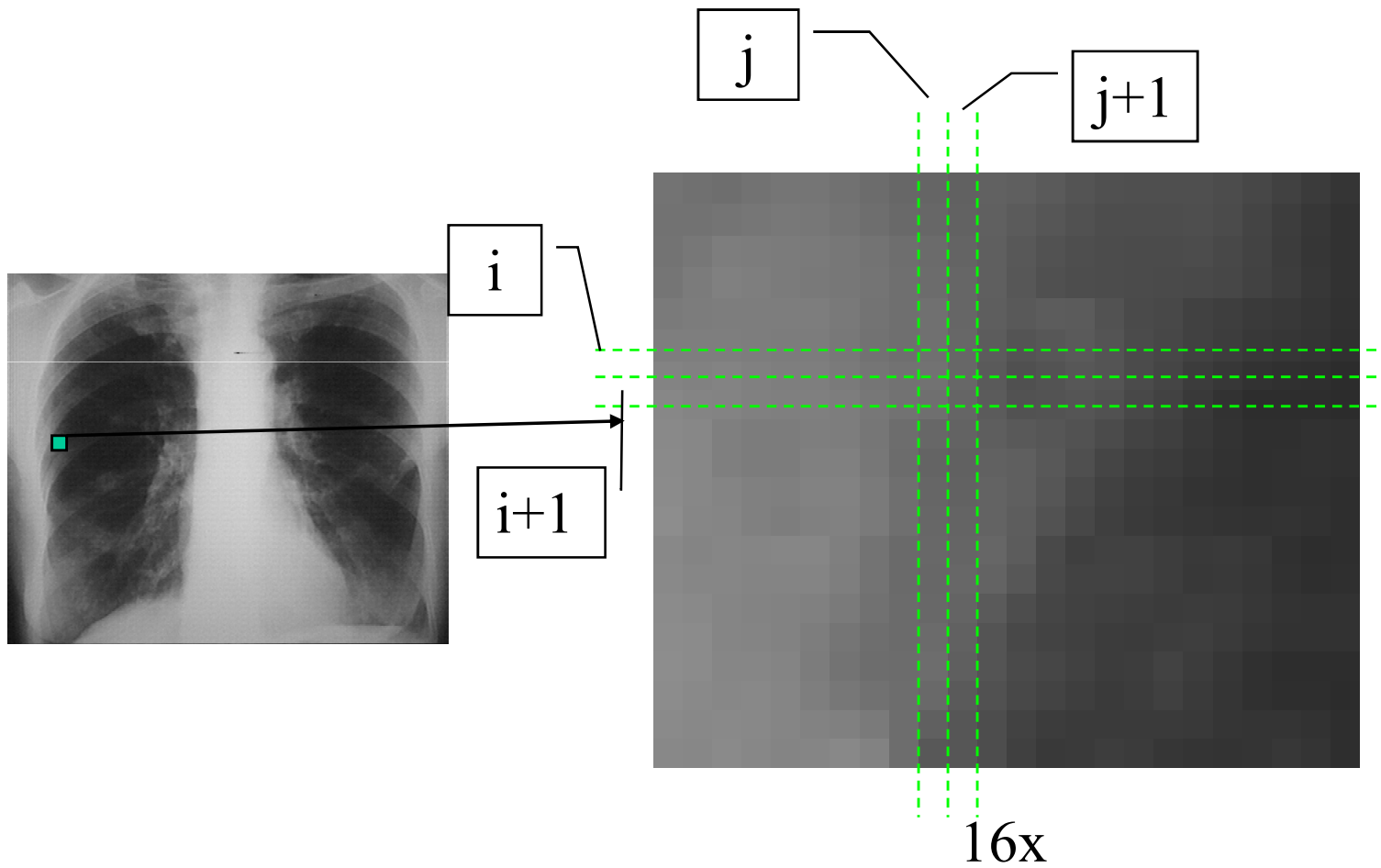
2D Εικόνα: Pixels



3D Εικόνα: Voxels

- Οι τιμές της ψηφιακής εικόνας συνήθως κυμαίνονται σε ακτίνα:
 - $[0 - 255]$: 1 byte
 - $[0 - (2^{16}-1)]$: 2 bytes
- Η κάθε θέση (i,j) αποτελεί το στοιχείο της εικόνας *-picture element -PIXEL*

Παράδειγμα pixels



Χρωματική Κωδικοποίηση της πληροφορίας

- Η περίπτωση της χρήσης αποχρώσεων του γκριζου -*gray scale*:



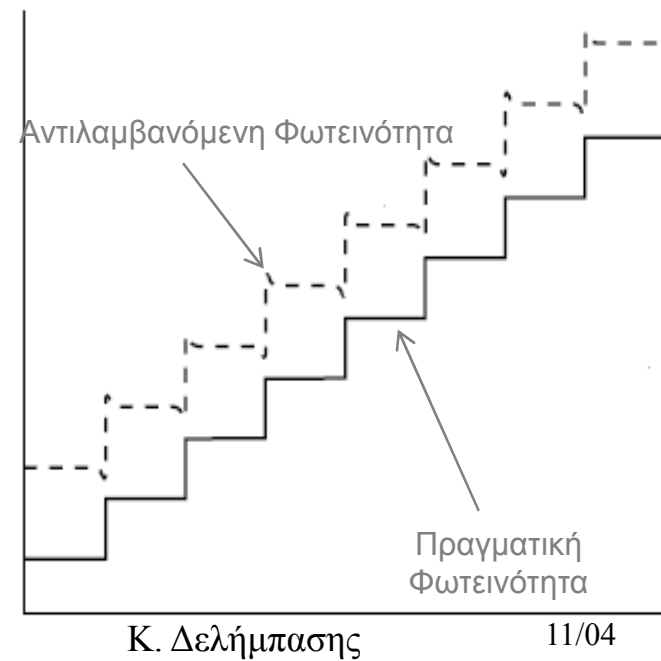
- Κωδικοποίηση της πληροφορίας με χρώμα
- Δυαδική εικόνα -Binary Image: Ειδική περίπτωση *gray scale*: εικόνα δύο τιμών (0 και 1). Προκύπτει συνήθως μετά από επεξεργασία.

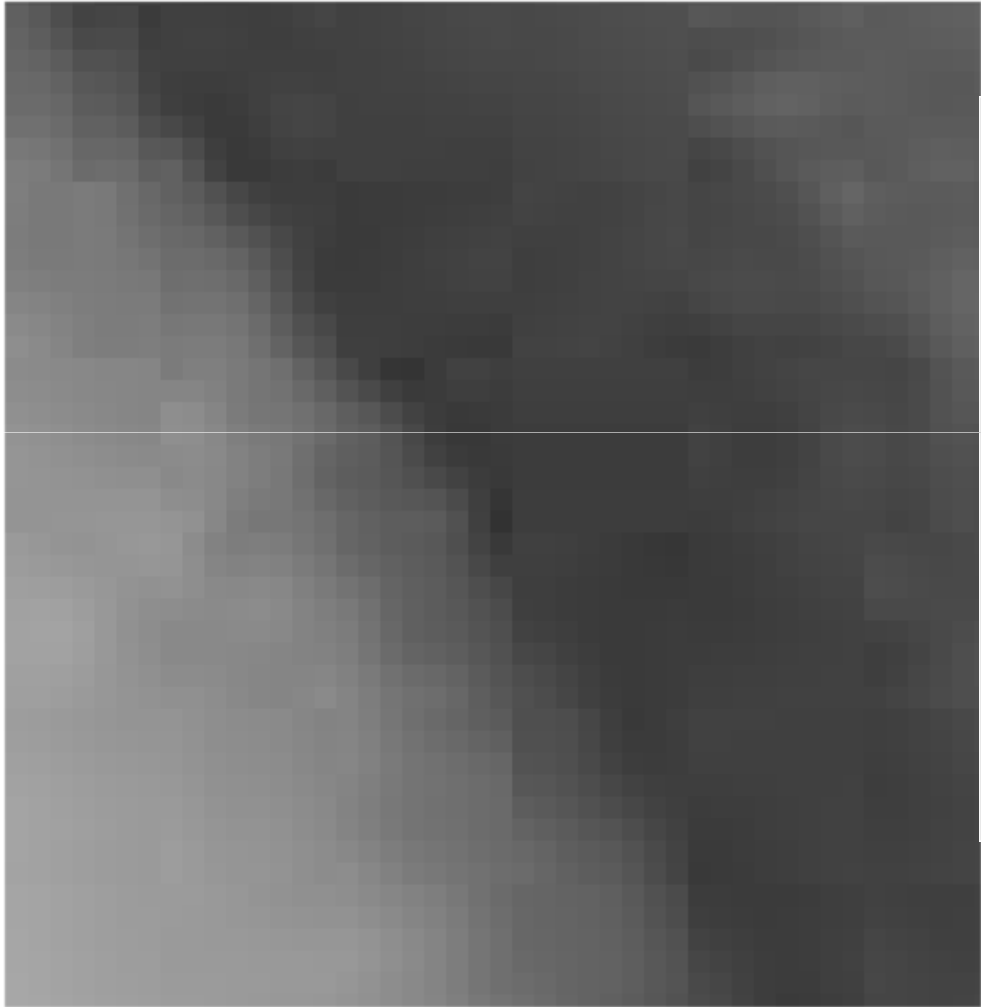
Φωτεινότητα

□ Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να διακρίνει το πολύ 50 διαφορετικές διαβαθμίσεις του γκρι από το μαύρο έως το λευκό

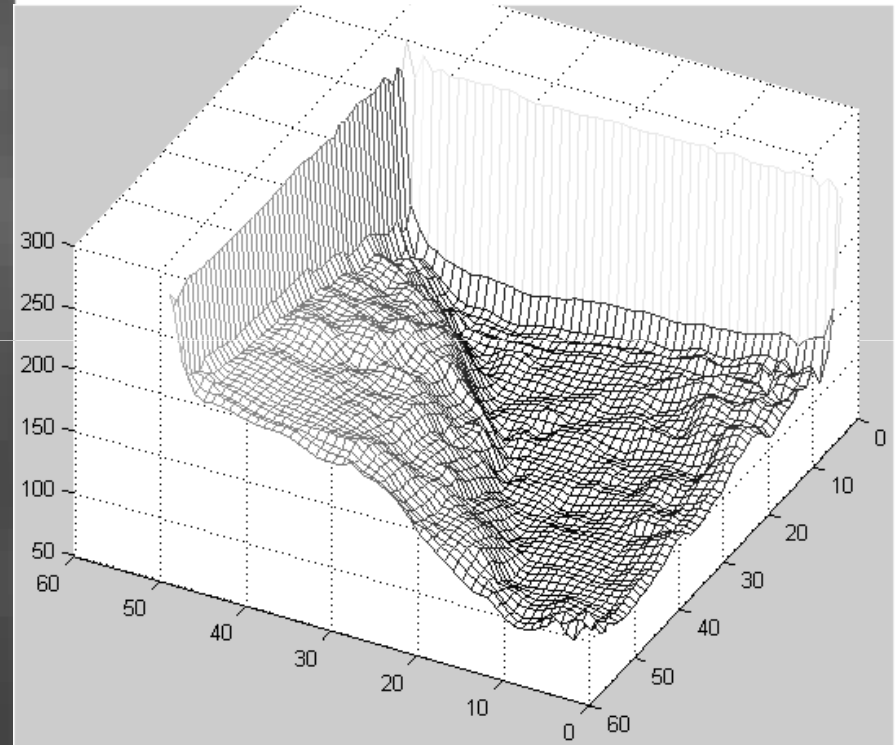
Μαύρο: 0 gray level

Άσπρο: 255 gray level

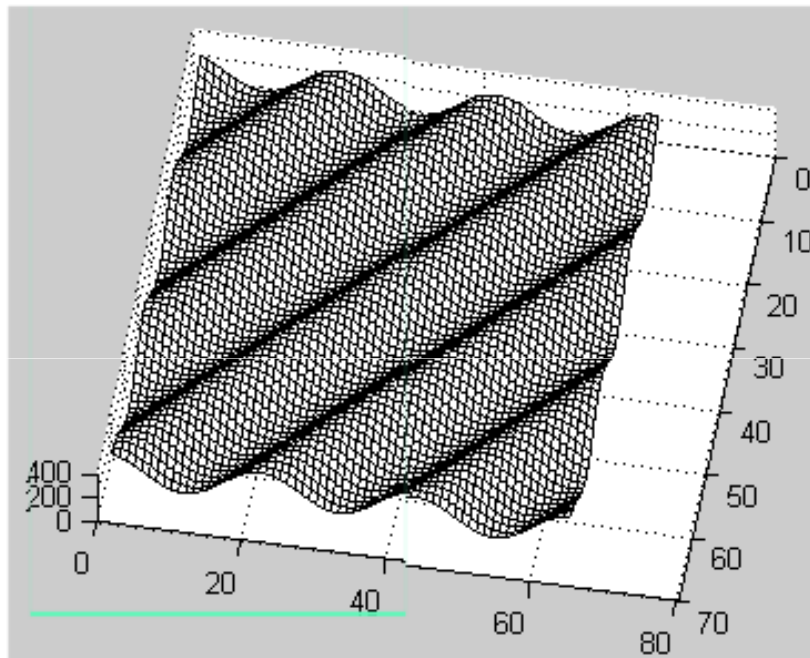




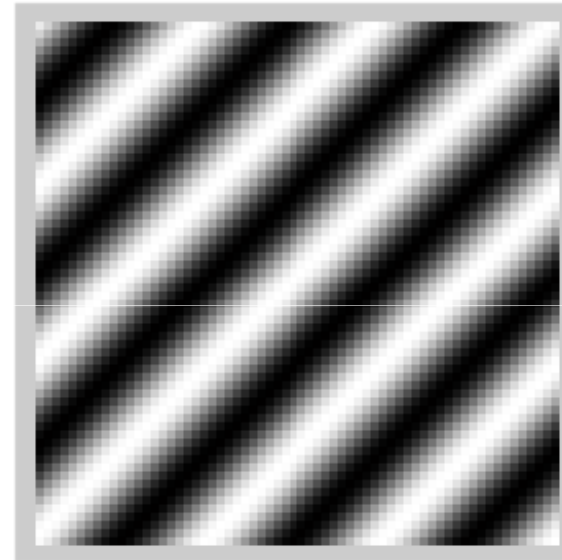
Τμήμα ψηφιακής ραδιογραφίας 12x



Γραφική παράσταση τιμών τμήματος
ψηφιακής ραδιογραφίας 12x



(α)



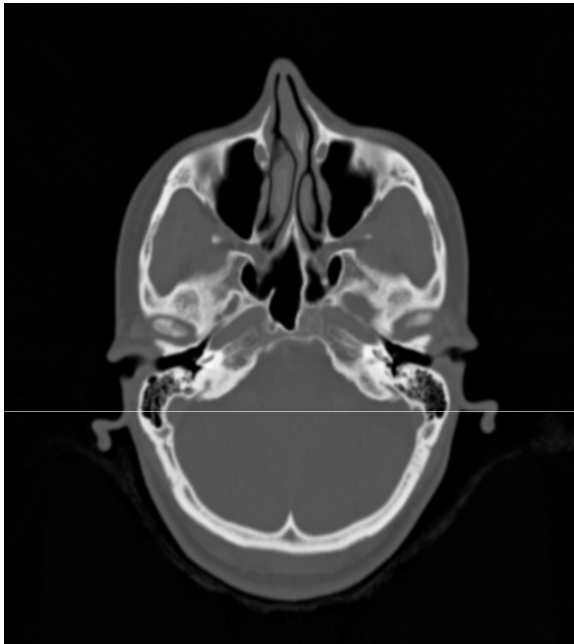
(β)

Κύμα συνημίτονου σαν γραφική παράσταση (α) και πληροφορία κωδικοποιημένη με αποχρώσεις του γκριζου (β).

Χαρακτηριστικά Ψηφιακών Εικόνων

- **Χωρική Διακριτική Ανάλυση (spatial resolution):**
 - Αντιπροσωπεύει το πόσο καλά μπορούν να διακρίνονται τα γειτονικά pixels
 - Μετρούμενο μέγεθος: περιοχή εικόνας στο πραγματικό χώρο
 - Εφαρμόσιμο σε συγκεκριμένες κατηγορίες εικόνων (ιατρικές, remote sensing κλπ). Καθορίζει τη διάσταση του φυσικού χώρου που απεικονίζεται σε κάθε pixel.

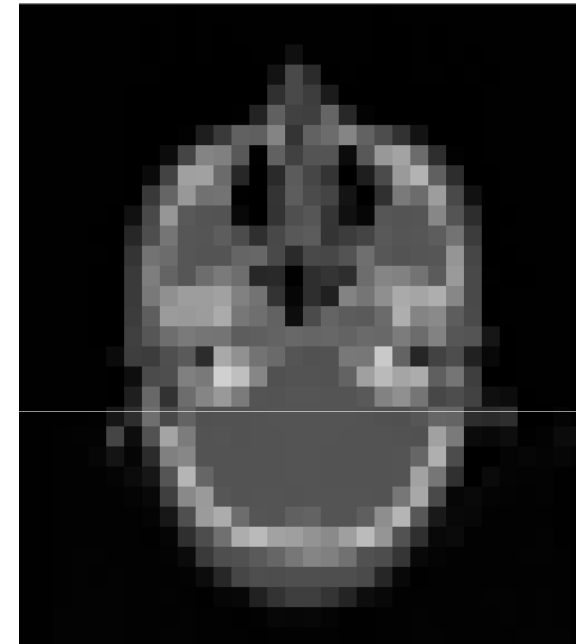
Χωρική Διακριτική Ανάλυση



512x512



128x128



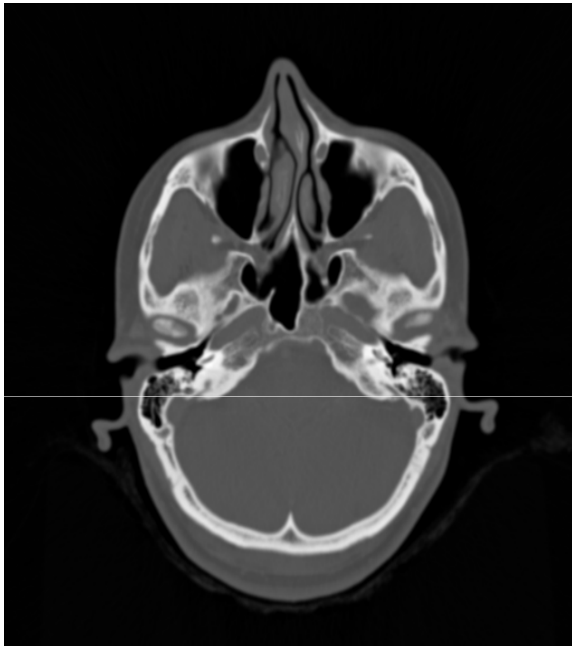
32x32

- **Κβαντισμός (Quantization) – βάθος χρώματος:**

- Αντιπροσωπεύει το πόσο καλά μπορούν να διακρίνονται διαφορές έντασης σε μία εικόνα (διακριτική ικανότητας αντίθεσης)
- Συνδέεται με τον αριθμό των διακριτικών τιμών – στάθμες – στις οποίες αποθηκεύεται κάθε pixel της εικόνας
 - Χαμηλός αριθμός από στάθμες → μείωση ακμών
- Στην Ιατρική, οι συνηθέστερος αριθμός σταθμών είναι 256, 512 και 1024

$$256 \text{ Στάθμες} \Rightarrow \log_2(256) = 8 \text{ bit}$$

Κβαντισμός



12 bits/pixel



4 bits/pixel



2 bits/pixel

Χαρακτηριστικά Ψηφιακών Εικόνων

- Χωρική διακριτική ικανότητα (spatial resolution) , ή Μέγεθος pixel:
 - εφαρμόσιμο σε συγκεκριμένες κατηγορίες εικόνων (ιατρικές, remote sensing κλπ). Καθορίζει τη διάσταση του φυσικού χώρου που απεικονίζεται σε κάθε pixel
 - Αντιπροσωπεύει το πόσο καλά μπορούν να διακρίνονται τα γειτονικά απεικονιζόμενα σημεία
 - σε 2D ιατρικές εικόνες μετριέται σε $mm \times mm$, ή $\mu m \times \mu m$

Παράμετροι Συλλογής Εικόνων Ιατρικών Απεικονιστικών Συστημάτων

	CT	MRI	US
Pixels/Εικόνα	512x512	256x256	512x512
Bits/pixel	12	10	8
Χωρική ευκρίνεια	μέτρια	χαμηλή	μέτρια
Ευκρίνεια αντίθεσης	υψηλή	υψηλή	χαμηλή
Ακτινοβόληση	μέτρια	-	-
Φυσιολογική λειτουργία	όχι	ναι	Ναι
Μέγεθος pixel/voxel	~ 1 x 1x 1 mm	~ 1 x 1x 1 mm	1 x 1 cm

Η έννοια της γειτονιάς του pixel (neighborhood)

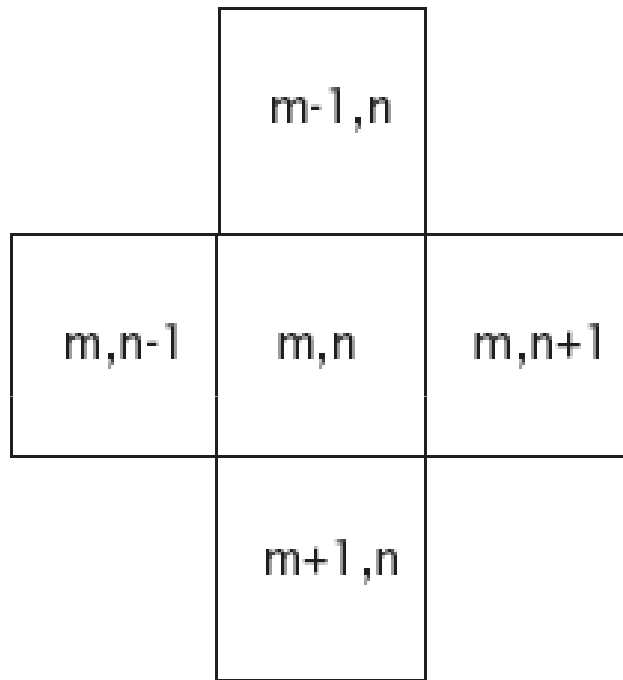
2D Εικόνες:

- Γειτονικά (neighbors) Pixels θεωρούνται όσα έχουν κοινή ακμή ή τουλάχιστον μία κοινή γωνία
- Pixels μπορούν να έχουν 4 ή 8 γείτονες (4-connected και 8-connected-)

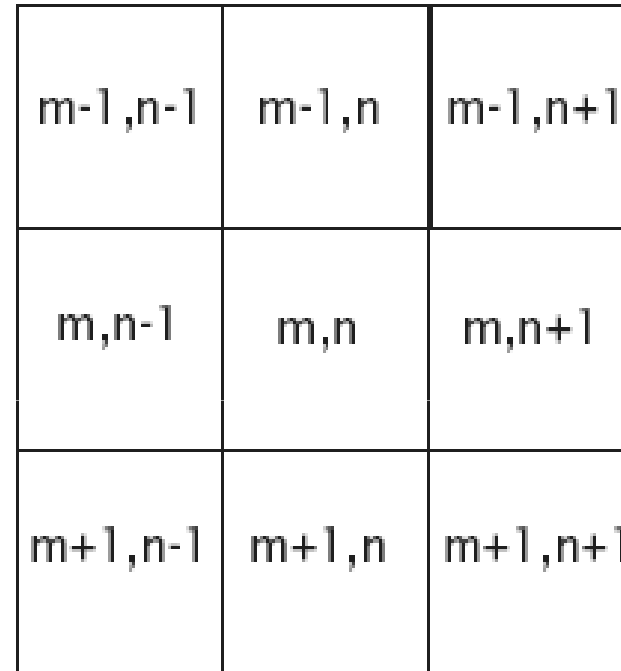
• 3D Εικόνες:

- Voxels μπορούν να έχουν 6 ή 18 ή 26 γείτονες σε κυβικό πλέγμα

Γειτονιά Pixels σε 2D Εικόνες

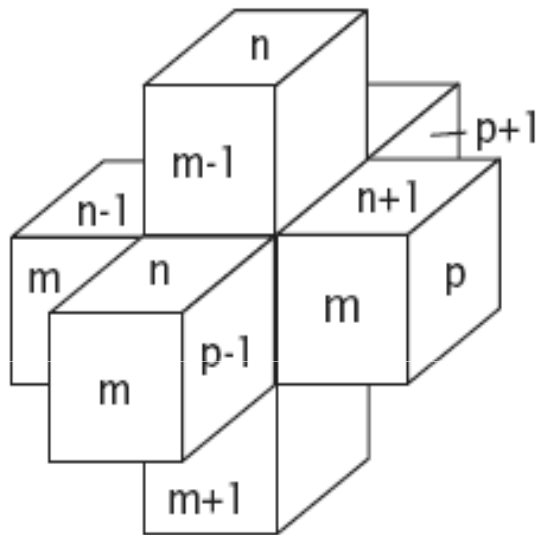


Τετραγωνικό πλέγμα 4 γειτόνων

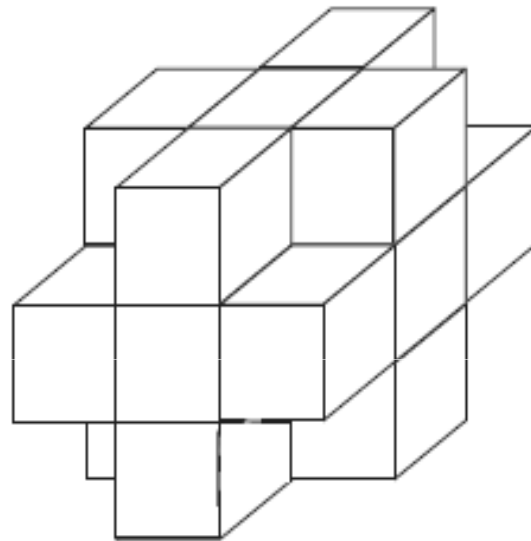


Τετραγωνικό πλέγμα 8 γειτόνων

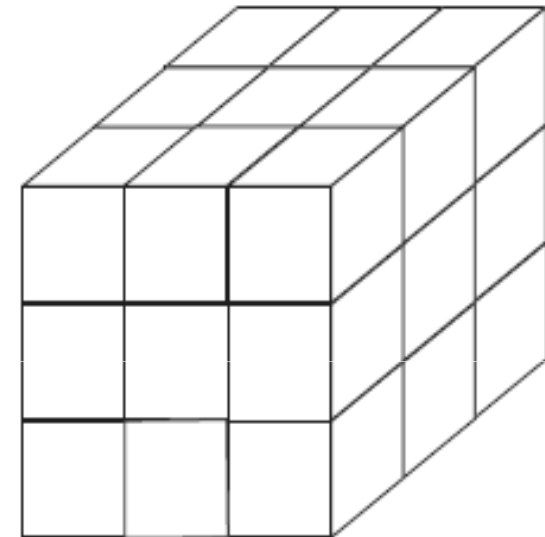
Γειτονιά Pixels σε 3D Εικόνες



Κυβικό πλέγμα 6 γειτόνων



Κυβικό πλέγμα 18 γειτόνων

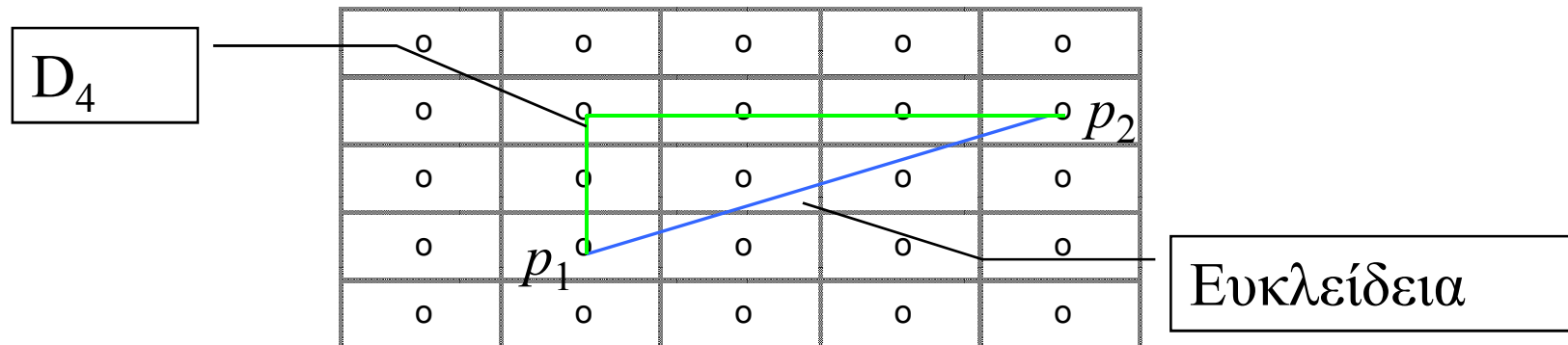


Κυβικό πλέγμα 26 γειτόνων

Μετρική της απόστασης σε εικόνες

- Έστω τα pixels p_1 και p_2 της εικόνας I $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2) \in I$
- Ευκλείδεια απόσταση $D(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- D_4 μετρική απόστασης (city block distance):

$$D_4(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



Αριθμητικοί τελεστές εικόνων

- Πρόσθεση / Αφαίρεση:

$$(I_1 \pm I_2)(x, y) = I_1(x, y) \pm I_2(x, y), (x, y) \in I_1, I_2$$

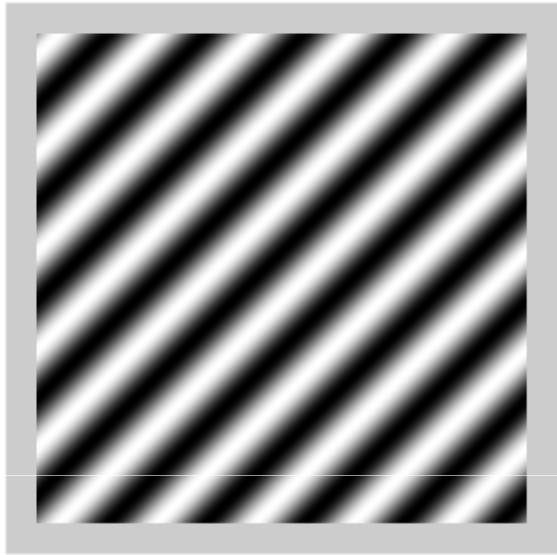
- Γραμμικός μετασχηματισμός:
- Πολλαπλασιασμός:

$$(I_1 \times I_2)(x, y) = I_1(x, y) \times I_2(x, y), (x, y) \in I_1, I_2$$

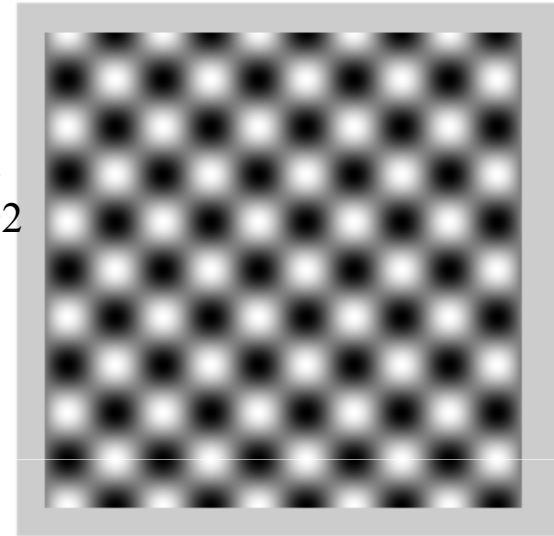
Η εικόνα I_2 συχνά είναι δυαδική οπότε ο τελεστής του πολλαπλασιασμού καλείται **masking**.

Παράδειγμα εφαρμογής τελεστών

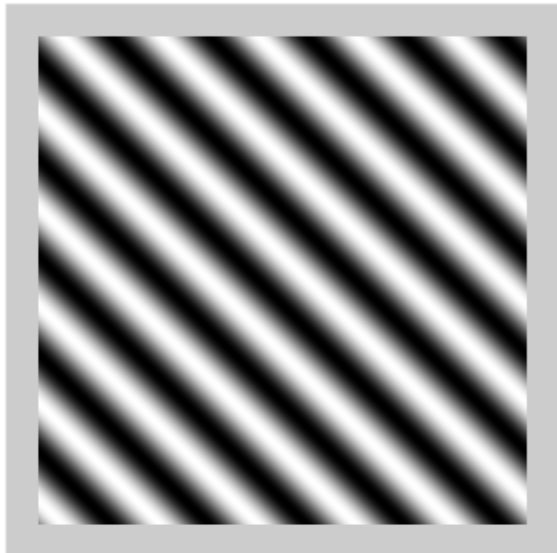
I_1



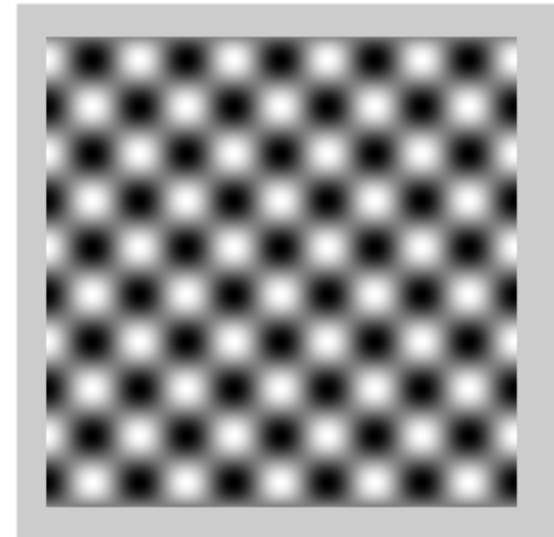
$I_1 + I_2$



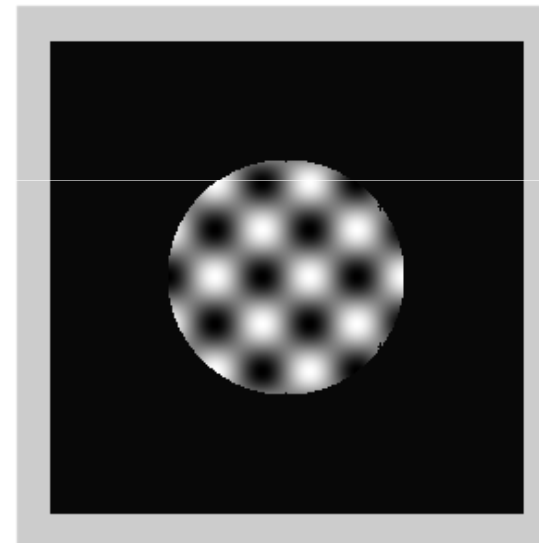
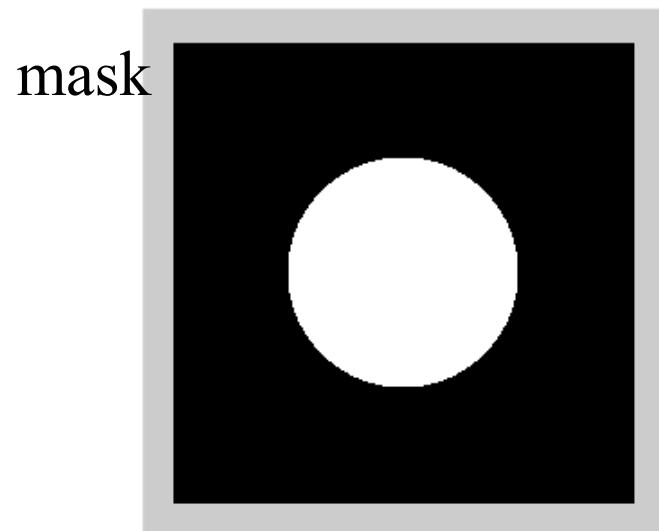
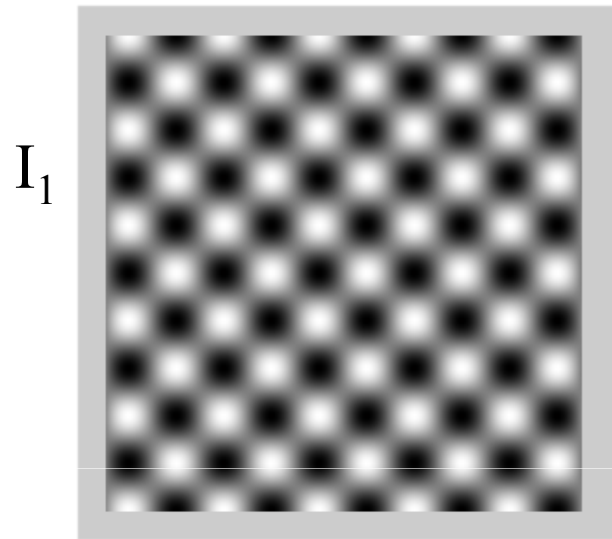
I_2



$I_1 - I_2$



Παράδειγμα εφαρμογής masking



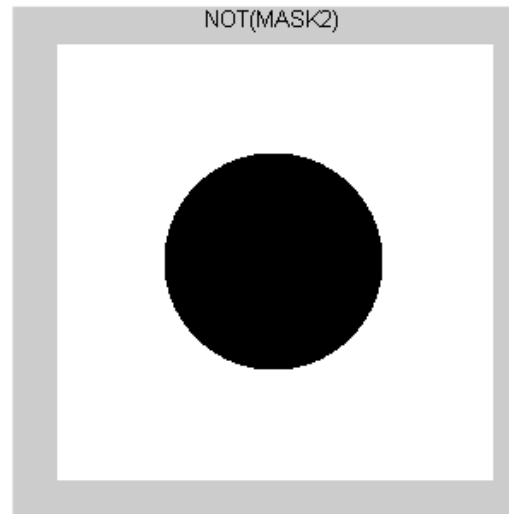
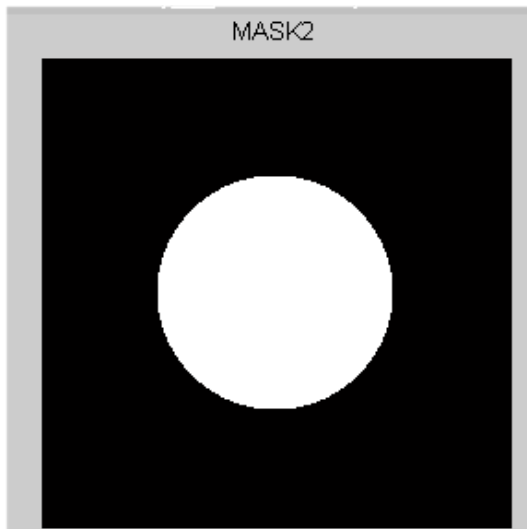
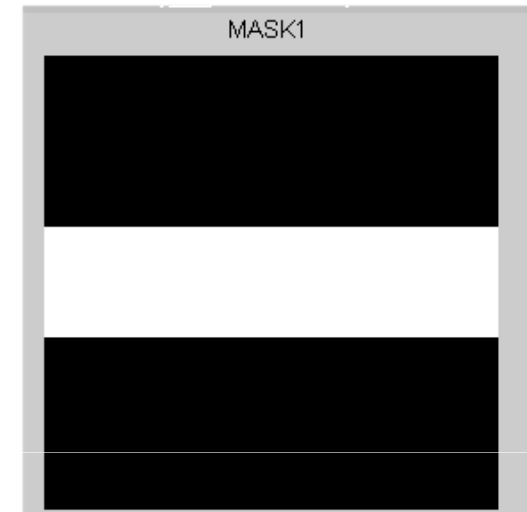
$I_1 \times \text{mask}$

Λογικοί τελεστές εικόνων (Boolean operators)

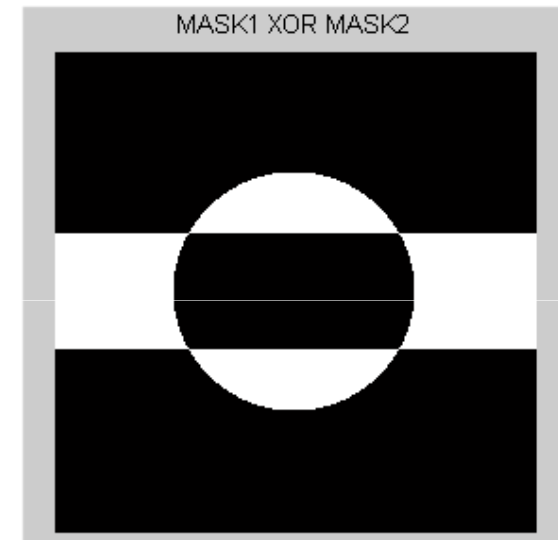
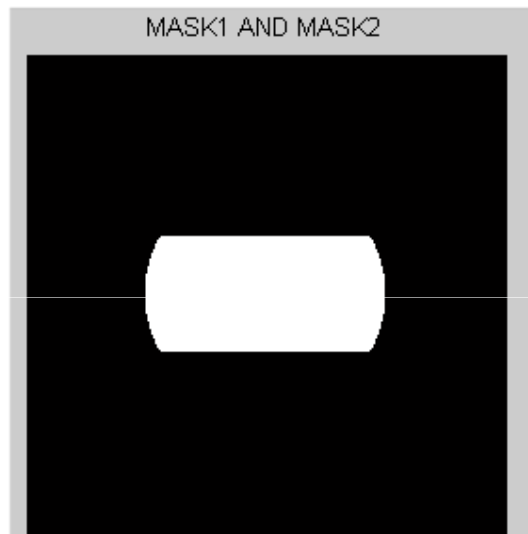
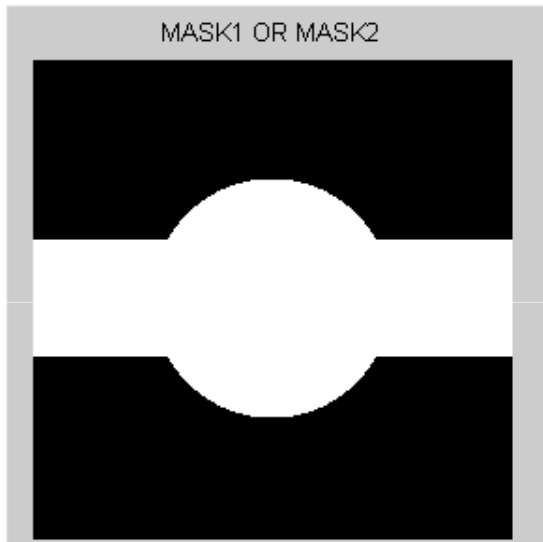
- Εφαρμόζονται σε δυαδικές εικόνες, σε κάθε pixel (*pixel by pixel* ή *pixelwise*).
- Θεωρούμε ότι η τιμή 1 του pixel είναι TRUE και η τιμή 0 είναι FALSE:
 - AND:
 - OR: ομοίως
 - NOT (ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ)
- με χρήση των παραπάνω μπορούμε να παράγουμε οποιαδήποτε λογική έκφραση

$$I(x, y) = I_1 \text{ AND } I_2 = I_1(x, y) \text{ AND } I_2(x, y), \forall (x, y) \in I_1, I_2$$

Παράδειγμα λογικών τελεστών



Παράδειγμα λογικών τελεστών



I1(x,y)	I2(x,y)	I1 OR I2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

I1(x,y)	I2(x,y)	I1 AND I2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Χώρος του χρόνου και χώρος των συχνοτήτων

- Όπως και στα σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier (FT) επεκτείνεται σε δύο (ή περισσότερες) διαστάσεις για εφαρμογή σε εικόνες.
- Ο χώρος του χρόνου *-time domain-* αναφέρεται στη δειγματοληπτημένη ψηφιακή εικόνα.
- Ο χώρος των χωρικών συχνοτήτων *-spatial frequency domain-* αναφέρεται στο FT της ψηφιακής εικόνας.

Επεξεργασία εικόνας στο χώρο του χρόνου

- Σκοπός:
 - Εμπλουτισμός εικόνας (έκταση, συμπίεση ακτίνας τιμών, επεξεργασία ιστογράμματος κλπ)
 - Εξομάλυνση εικόνας
 - Συμπίεση θορύβου
 - Όξυνση εικόνας
 - Ανεύρεση ακμών
- Μέθοδοι επεξεργασίας:
 - Σημειακοί Τελεστές
 - Φίλτρα το αποτέλεσμα των οποίων εξαρτάται από τη γειτονιά κάθε pixel:
 - Γραμμικά φίλτρα: Συνέλιξη
 - Μη γραμμικά φίλτρα

Σημειακοί τελεστές (Point operators)

- Τελεστές οι οποίοι δρουν σε ένα pixel χωρίς να λαμβάνουν υπόψη πληροφορία από τη γειτονιά του pixel.

$$I'(i, j) = f(I(i, j))$$

- Το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή σε ένα pixel εξαρτάται από την τιμή του Pixel αυτού και όχι από την τιμή των γειτονικών του pixels.
- Το αποτέλεσμα της επεξεργασίας μπορεί να αποθηκευτεί και στην ίδια εικόνα.

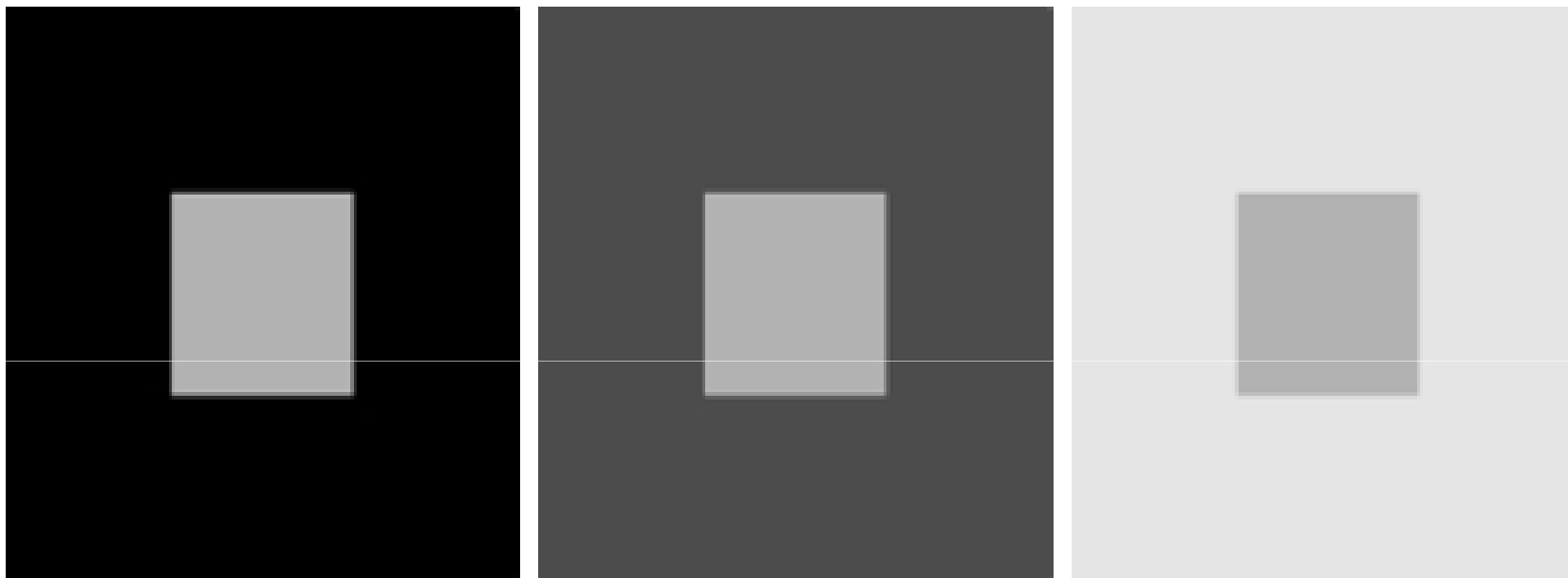
Φωτεινότητα και αντίθεση (Brightness, Contrast)

- Η φωτεινότητα και η αντίθεση αποτελούν σημειακό τελεστή, ως ακολούθως:

$$I'(x, y) = \begin{cases} aI(x, y) + b, & 0 \leq aI(x, y) + b \leq \max \\ \max, & aI(x, y) + b > \max \\ 0, & aI(x, y) + b < 0 \end{cases}, \forall (x, y) \in I$$

- όπου a η τιμή της αντίθεσης και b της φωτεινότητας

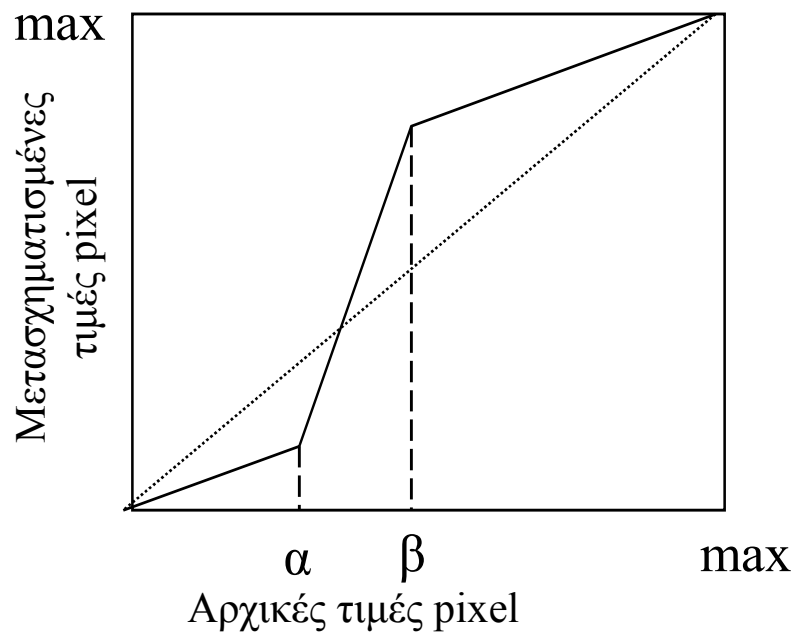
Αντίθεση



Το κεντρικό τετράγωνο στις τρεις περιπτώσεις έχει την ίδια φωτεινότητα αλλά εμφανίζεται διαφορετικό καθώς η φωτεινότητα του υποβάθρου γίνεται πιο υψηλή

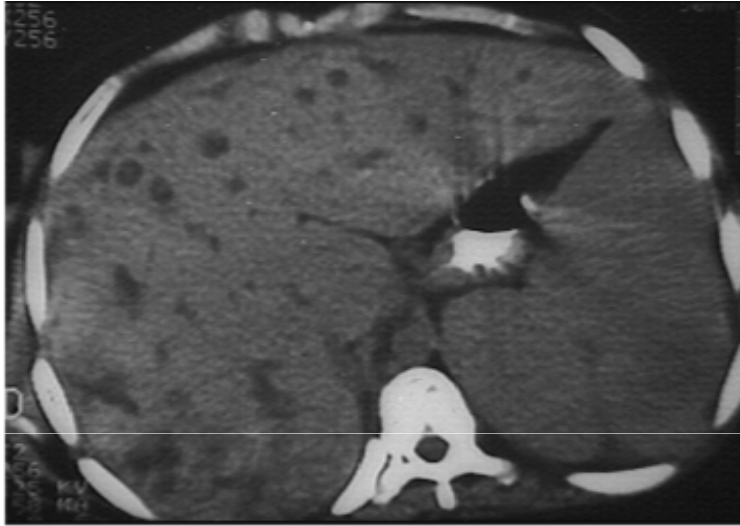
Έκταση αντίθεσης

- Ο σημειακός αυτός τελεστής δρα σε κάθε pixel και μετασχηματίζει την τιμή του σε μία νέα τιμή με γραμμικό ή μη γραμμικό τρόπο.

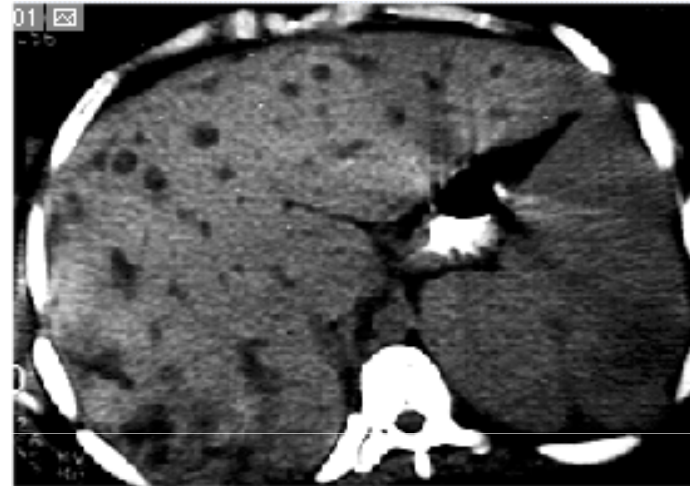


- Τα pixel της εικόνας με τιμές στο διάστημα (α, β) στο οποίο ο μετασχηματισμός τιμών έχει απότομη κλίση απεικονίζονται με μεγάλη αντίθεση.
- Το αντίθετο συμβαίνει για τα pixel με τιμές στις οποίες ο μετασχηματισμός έχει μικρή κλίση (στο παράδειγμα αυτό $(0, \alpha)$ και $(\beta, \max]$).
- Τα α και β μετακινούνται από το χρήστη. Όταν το (α, β) βρίσκεται στις μεσαίες τιμές λέγεται «παράθυρο μαλακών μορίων», ενώ όταν βρίσκεται στις υψηλές τιμές λέγεται «οστικό παράθυρο»

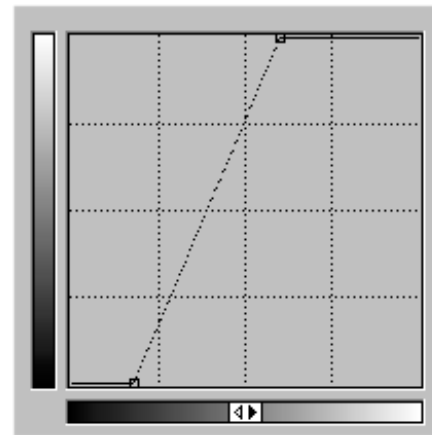
Παράδειγμα έκτασης αντίθεσης



Αρχική εικόνα



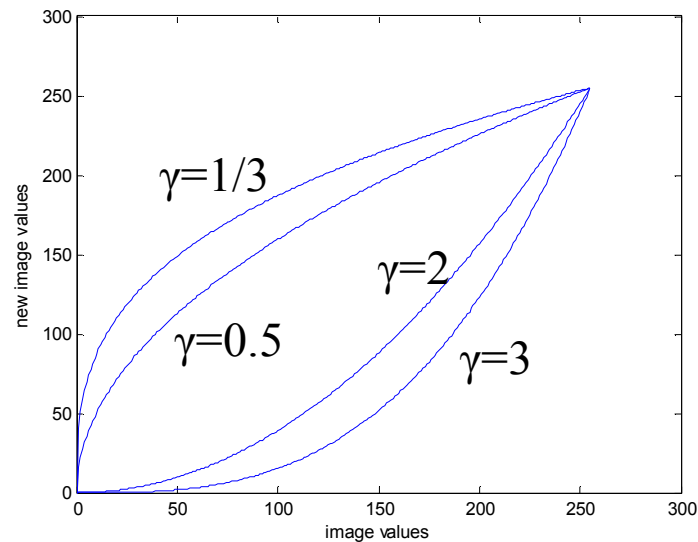
Μετασηματισμένη εικόνα



Κ. Δεληπάσης
Ακτίνα τιμών ενδιαφέροντος

Άλλοι μετασχηματισμοί τιμών εικόνας

- *Εκθετικός μετασχηματισμός (Gamma correction):*
 $I'(x,y)=255(I(x,y)/255)^\gamma$
 - Αν το πεδίο ορισμού είναι $[0,255]$, τότε το πεδίο τιμών είναι $[0,255]$ (θεωρώντας ότι 255 είναι η μέγιστη τιμή της εικόνας δηλ 1 byte/ pixel).
- *Αρνητική εικόνα:* Αποτελεί απλό γραμμικό μετασχηματισμό. Αν το πεδίο τιμών είναι $[0 - 255]$, τότε $I'(x,y)=255-I(x,y)$



- *Λογαριθμικός μετασχηματισμός*: εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που τα pixel της εικόνας έχουν τιμές που παρουσιάζουν πολύ μεγάλες διαφορές, με αποτέλεσμα χαμηλή αντίθεση μεταξύ των pixel με χαμηλές τιμές.
 - $I'(x,y) = c \log(1 + I(x,y))$
 - c : σταθερά ώστε το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού του. Το $1+$ εμφανίζεται ώστε να μην μηδενίζεται το όρισμα του λογαρίθμου.

Παράδειγμα εφαρμογής σημειακών μετασχηματισμών

Αρχική εικόνα				
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	255	99	99	99
3	9	9	9	9
4	0	0	0	0

Εκθετικός μετασχηματισμός $\gamma=1,5$				
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	255	62	62	62
3	1,7	1,7	1,7	1,7
4	0	0	0	0

Λογαριθμικός μετασχηματισμός				
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	255	212	212	212
3	106	106	106	106
4	0	0	0	0

Σημειακός μετασχ. Έκτασης αντίθεσης $2,5 \cdot I + 10$				
	1	2	3	4
1	10	10	10	10
2	255	255	255	255
3	33	33	33	33
4	10	10	10	10

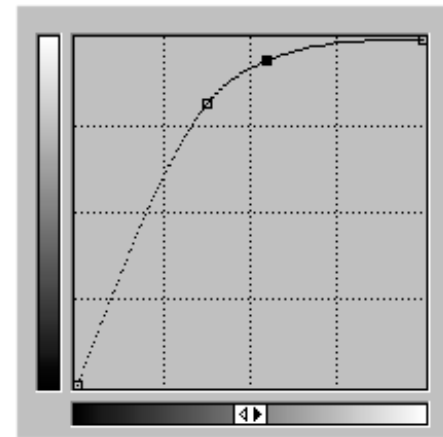
Εκθετικός μετασχηματισμός $\gamma=0,5$				
	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	255	159	159	159
3	48	48	48	48
4	0	0	0	0



Αρχική εικόνα



Μετασχηματισμένη εικόνα



κ. Δεληγιάννης

Ορισμός του ιστογράμματος εικόνας

- Εστω εικόνα I με N pixel και τιμές στο διάστημα $[0, L-1]$. Το ιστογράμμο -Histogram- H της εικόνας I καθορίζει για κάθε μία από τις διακριτές τιμές της εικόνας τον αριθμό εμφάνισης της (τιμής):

$$H(n) = \# \{I(i, j) : I(i, j) = n\}, \forall (i, j) \in I$$

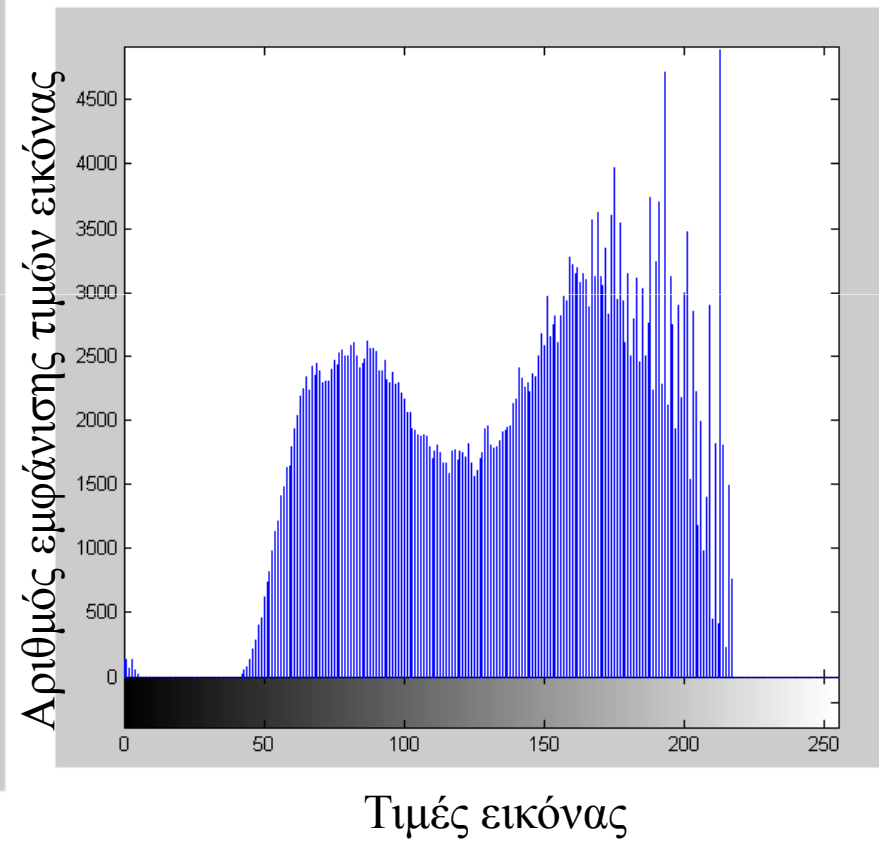
Αν το $H(n)$ διαιρεθεί με τον αριθμό των pixel της εικόνας N , προκύπτει η πιθανότητα εμφάνισης κάποιας τιμής στη συγκεκριμένη εικόνα.

$$p(n) = \frac{H(n)}{N}$$

Είναι προφανές ότι

$$\sum_{n=0}^{L-1} H(n) = N \Rightarrow \sum_{n=0}^{L-1} p(n) = 1$$

Ιστόγραμμα ψηφιακής ραδιογραφίας



Εξίσωση ιστογράμματος - Histogram equalization

- Έστω εικόνα N pixels με ακτίνα τιμών $[0, maxval]$. Ο σκοπός της εξίσωσης του ιστογράμματος είναι σε κάθε pixel με τιμή k να αναθέσει μία νέα τιμή $s(k)$, ώστε το νέο ιστόγραμμα:
 - να καλύψει όλη την ακτίνα τιμών
 - να είναι όσο το δυνατό πιο ομοιογενές

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός $s(k)$ είναι:

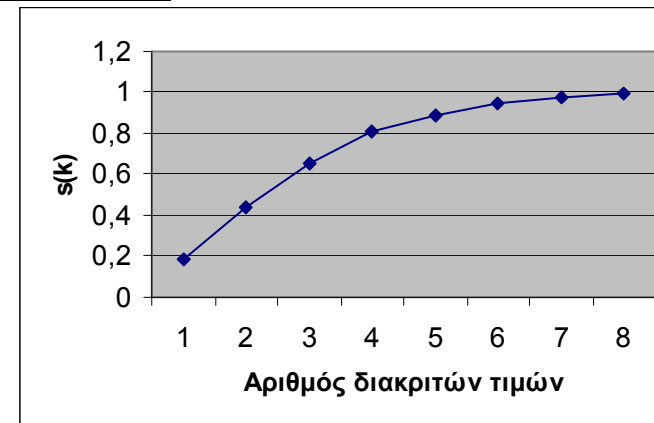
$$s(k) = \frac{\max val}{N} \sum_{i=0}^k H(i)$$

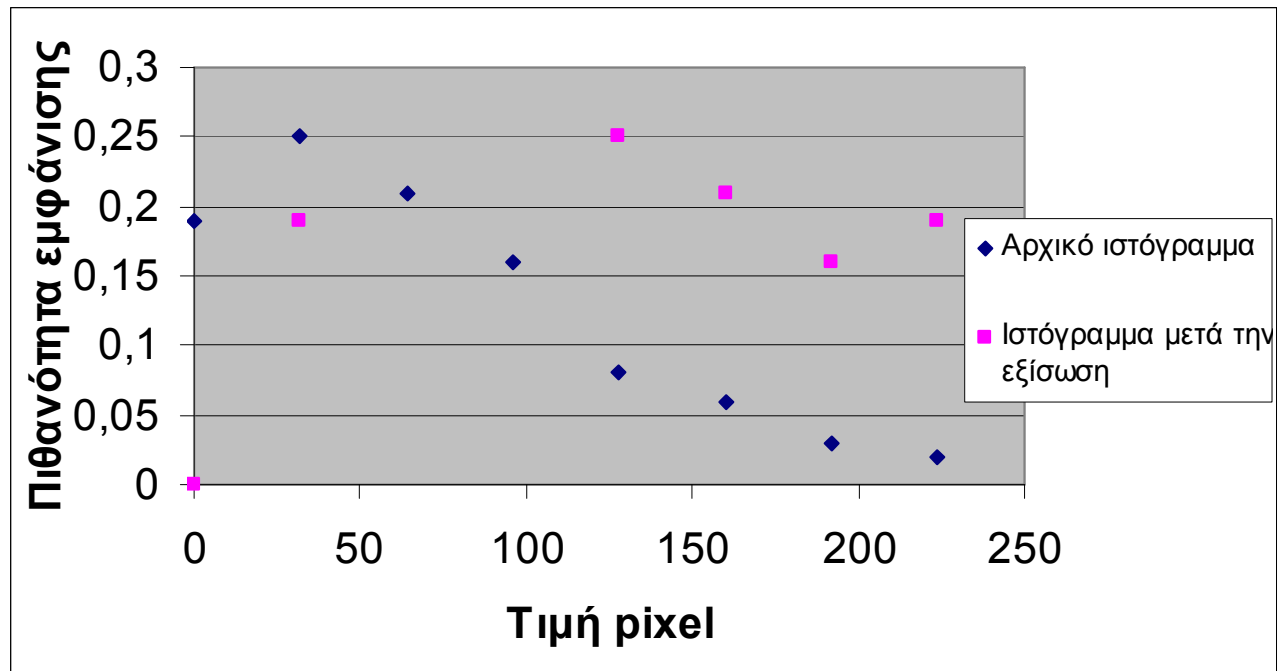
- Όπου H το ιστόγραμμα της εικόνας και $maxval$ η μέγιστη τιμή της εικόνας.

Παράδειγμα

- Έστω εικόνα με 8 διακριτές τιμές:

Αρχικές τιμές	Πιθανότητα εμφάνισης	$s(k)$	Νέες τιμές	Προσεγγίσεις τιμών
0	0,19	0,19	42,56	32
32	0,25	0,44	98,56	96
64	0,21	0,65	145,6	128
96	0,16	0,81	181,44	192
128	0,08	0,89	199,36	224
160	0,06	0,95	212,8	224
192	0,03	0,98	219,52	224
224	0,02	1	224	224





Αρχική εικόνα I								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3	5	5	0	0	0	0
2	3	3	5	5	0	0	0	0
3	2	2	1	1	1	0	0	0
4	2	2	2	1	1	0	0	0
5	2	2	2	1	1	7	7	7
6	4	4	4	4	0	1	6	6
7	4	4	4	0	0	0	6	6
8	4	4	4	0	0	0	6	6

Τιμές	Ιστόγραμμα	Κανονικοποιημένο Ιστόγραμμα	Αθροιστικό Κανονικοποιημένο Ιστόγραμμα	Νέες τιμές
0	21	0,328	0,328	2
1	8	0,125	0,453	3
2	8	0,125	0,578	4
3	4	0,063	0,641	4
4	10	0,156	0,797	6
5	4	0,063	0,859	6
6	6	0,094	0,953	7
7	3	0,047	1,000	7
8	64			

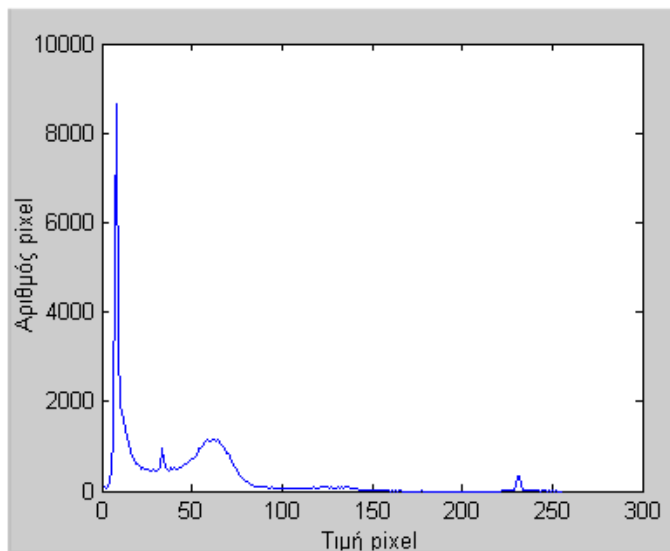
Νέες τιμές	Νέο Ιστόγραμμα
2	21
3	8
4	12
5	0
6	14
7	9



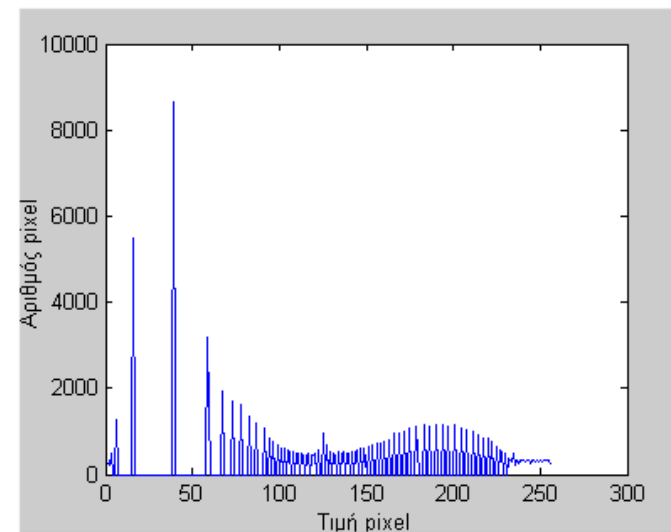
Αρχική εικόνα



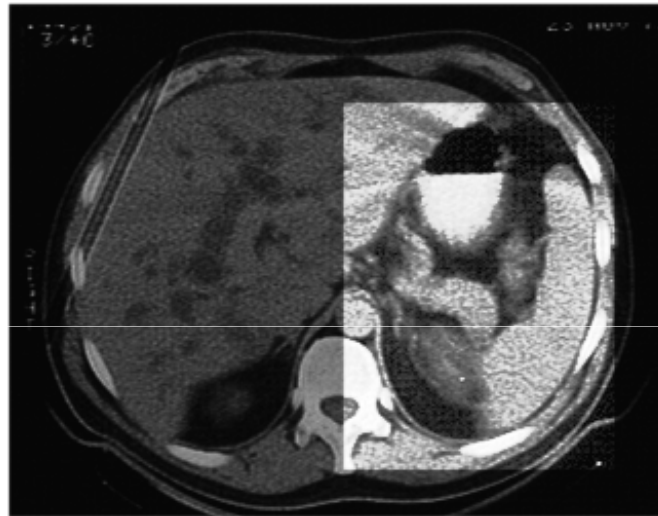
Εικόνα με εξισωμένο
ιστόγραμμα



Ιστόγραμμα



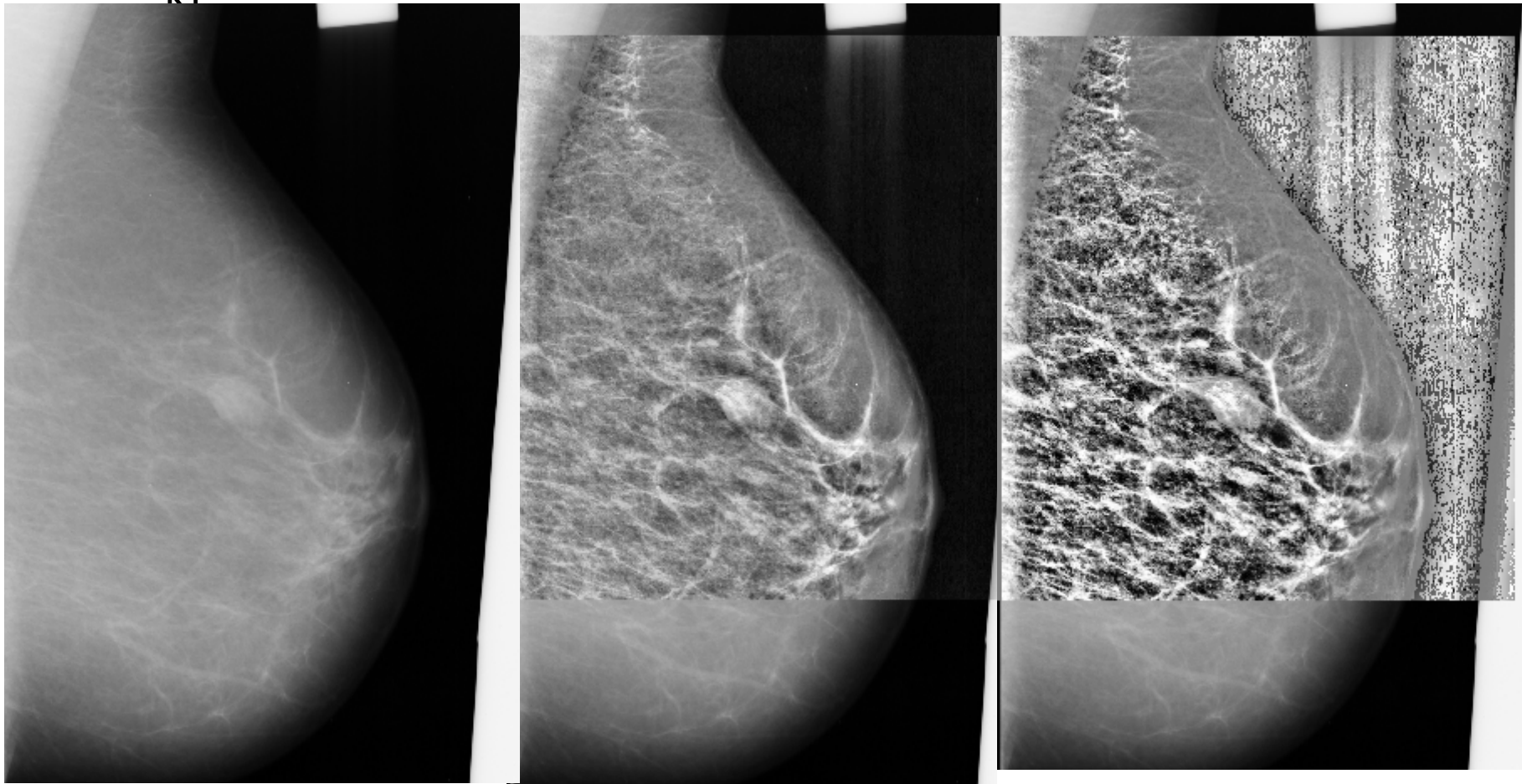
Κ. Δημητρίου
Ιστόγραμμα 11/04



Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης ιστογράμματος εφαρμόζεται και σε περιοχές της εικόνας.

Προσαρμοσμένη εξίσωση ιστογράμματος Adaptive Histogram Equalization

- ki



Τελεστές που εφαρμόζονται σε περιοχές εικόνας - Neighborhood operators

Οι τελεστές αυτοί χρησιμοποιούν τον γενικό αλγόριθμο της **κυλιόμενης (ή κινητής) μάσκας –moving mask**.

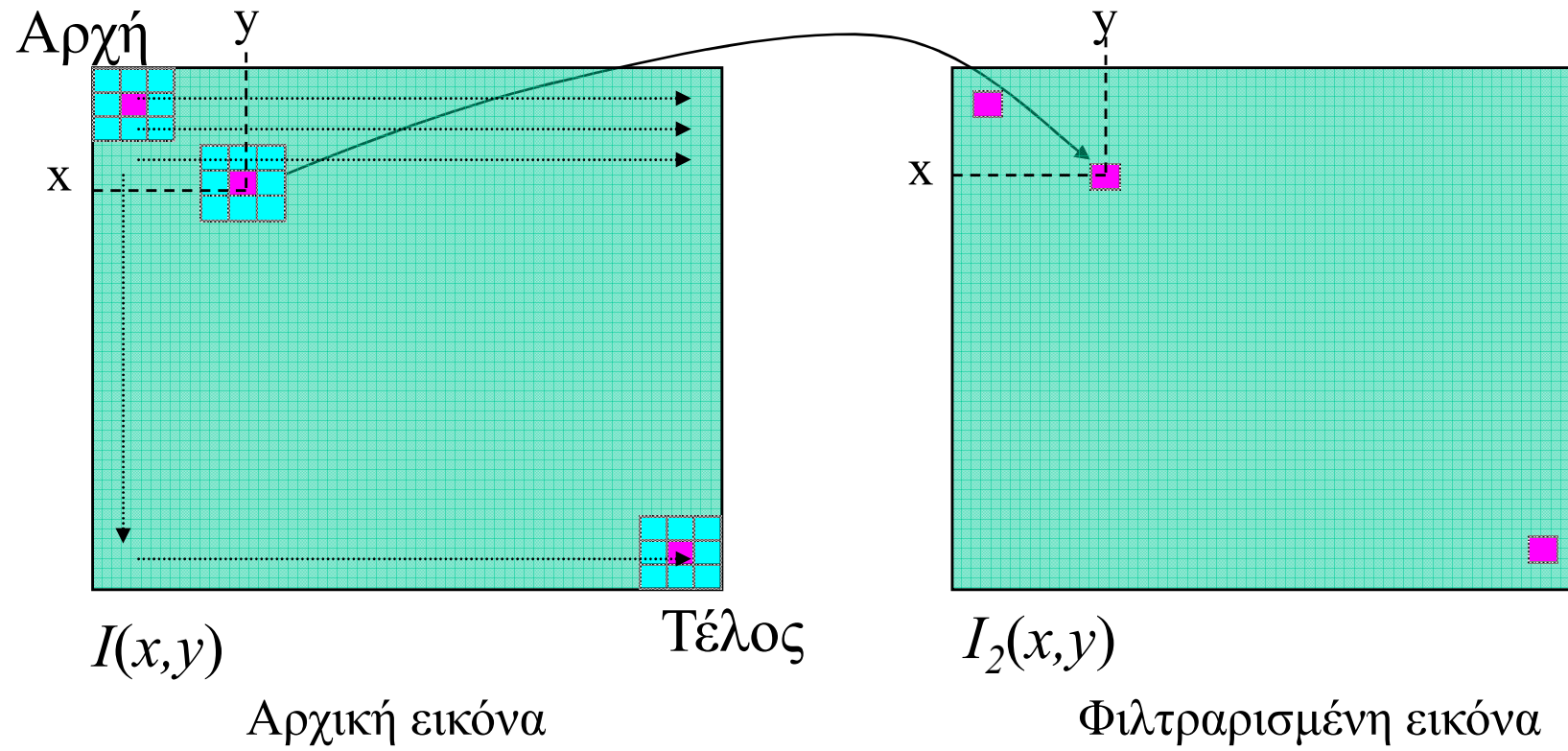
Εφαρμογή για εικόνα I $N \times M$ (γραμμές \times στήλες) και τετραγωνική περιοχή (μάσκα) $2n+1 \times 2m+1$ pixels και αποθήκευση του αποτελέσματος στην εικόνα I_2

Για κάθε γραμμή x από $n+1$ ως $N_x - (n+1)$

 Για κάθε στήλη y από $m+1$ ως $N_y - (m+1)$

 Υπολόγισε την τιμή a του τελεστή
στην περιοχή γύρω από το (x, y) ;

$I_2(x, y) = a$;



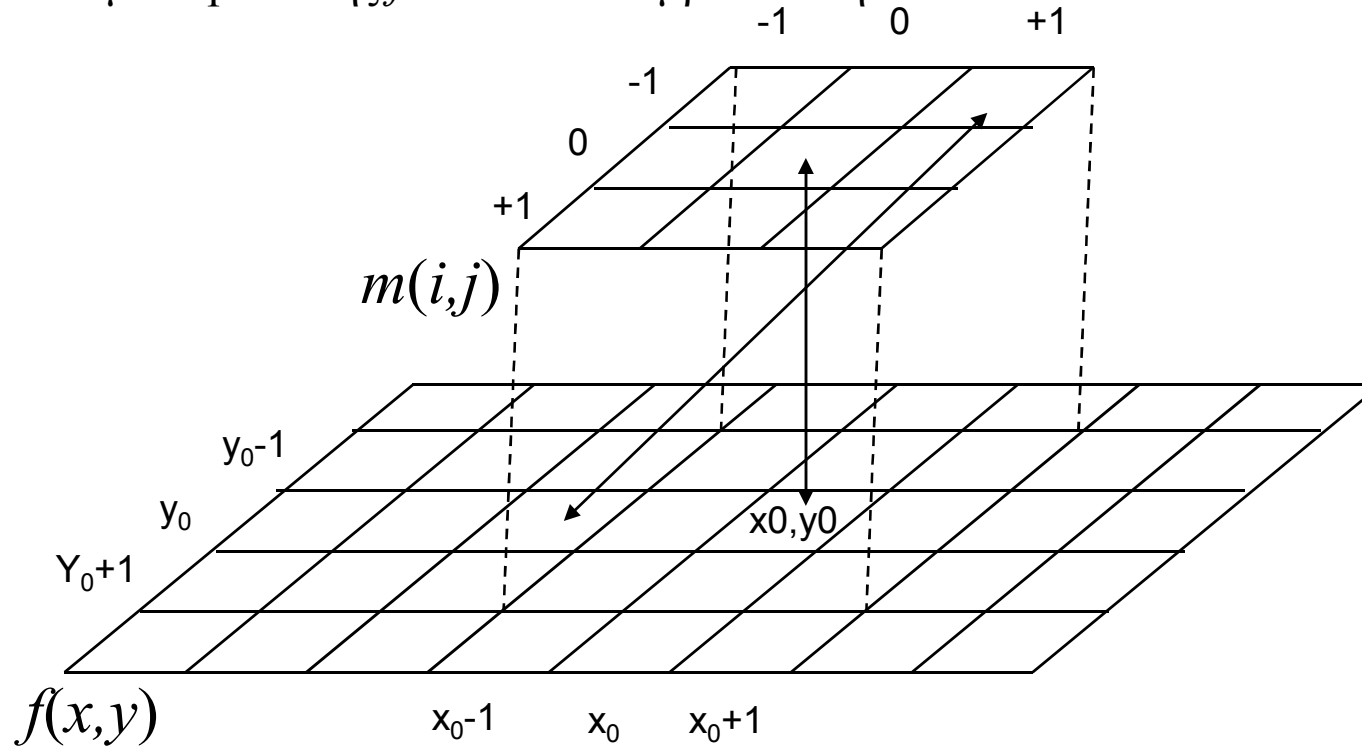
Συνέλιξη εικόνων

- Έστω εικόνα $I(x,y)$, $x=0..N-1$, $y=0..M-1$ και μάσκα M με περιττό αριθμό γραμμών και στηλών $(2n+1) \times (2m+1)$: $M(k,l)$, $k=-n..n$, $l=-m..m$.
- Η συνέλιξη $I * M$, στη θέση (x,y) ορίζεται (κατ' αναλογία με την μονοδιάστατη περίπτωση των σημάτων) ως εξής:

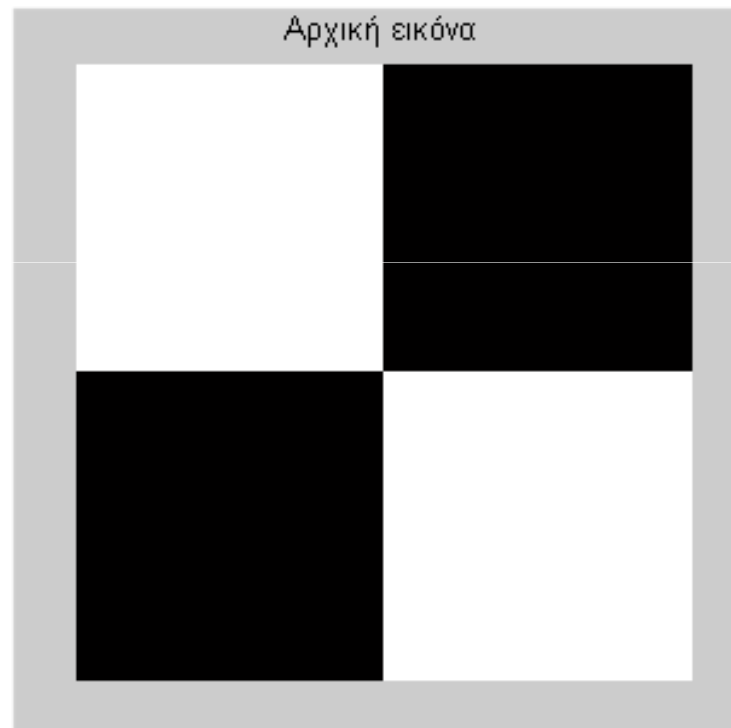
$$I * M = c(x, y) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-m}^m I(x-k, y-l) M(k, l)$$

- Στον ορισμό αυτό οι δείκτες m και n διατρέχουν τη μάσκα M .
- Στην υπολογιστική υλοποίηση της συνέλιξης πρέπει να ληφθεί μέριμνα ώστε οι δείκτες να μην έχουν αρνητικές τιμές

- Έστω εικόνα $f(x,y)$ και μάσκα $m(i,j)$ 3×3 . Ο υπολογισμός της συνέλιξης τους στο σημείο (x_0, y_0) γίνεται ως εξής:
 - Το κεντρικό pixel της m τοποθετείται «πάνω» από το pixel (x_0, y_0) της f .
 - Υπολογίζεται το άθροισμα των γινομένων «χιαστί» στις 2 διαστάσεις, με τρόπο ανάλογο της μίας διάστασης (σήματα).
 - Το αποτέλεσμα (άθροισμα των γινομένων) αποθηκεύεται στο pixel (x_0, y_0) μίας νέας εικόνας f_2 .
 - Η μάσκα m κινείται ώστε το κεντρικό pixel της m να βρεθεί πάνω από το επόμενο pixel της f και επαναλαμβάνεται η διαδικασία.



Παραδειγματικές εφαρμογές της συνέλιξης στην χωρική επεξεργασία εικόνας



Εξομάλυνση εικόνας με χρήση συνέλιξης με Μήτρα μέσου όρου (averaging)

- Το φίλτρο μέσου όρου στην απλή μορφή είναι ένας πίνακας περιττού αριθμού Pixel σε κάθε διάσταση, με ίδια τιμή σε κάθε στοιχείο:

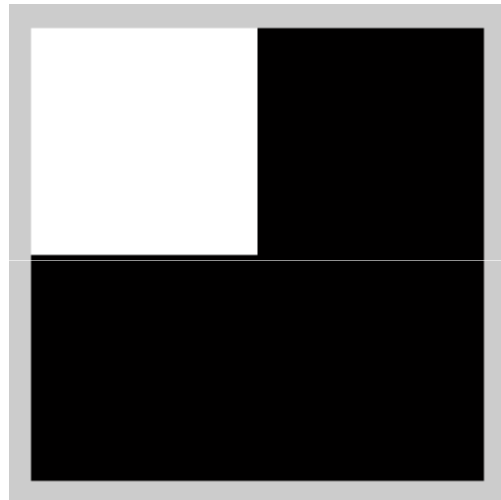
$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα 3x3

$$\frac{1}{49} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα 7x7

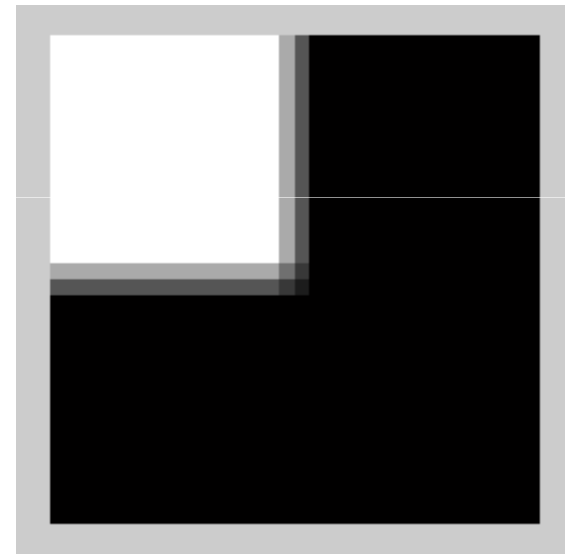
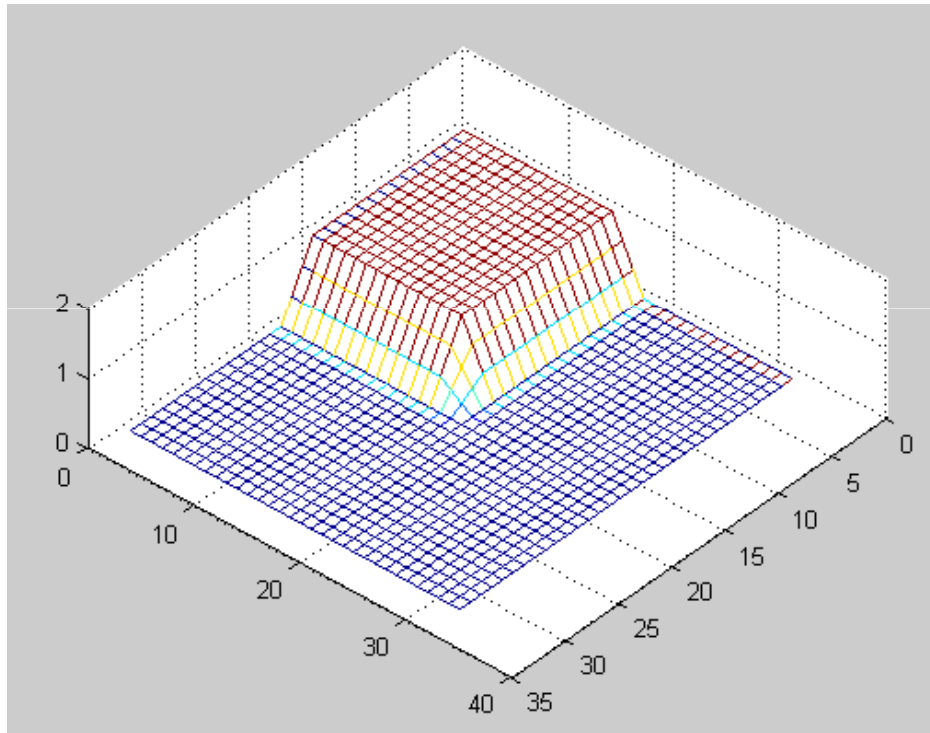
Παράδειγμα συνέλιξης με μήτρα μέσου όρου -averaging

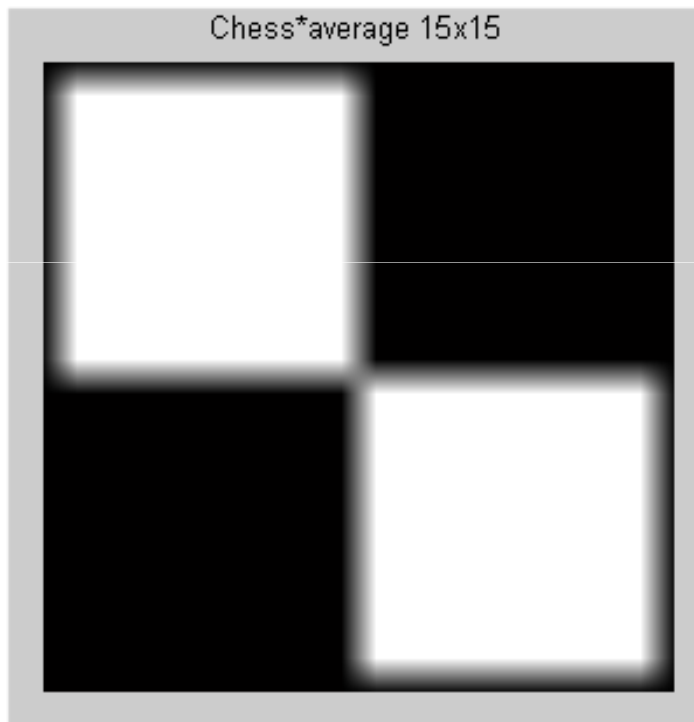


*

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα 3x3



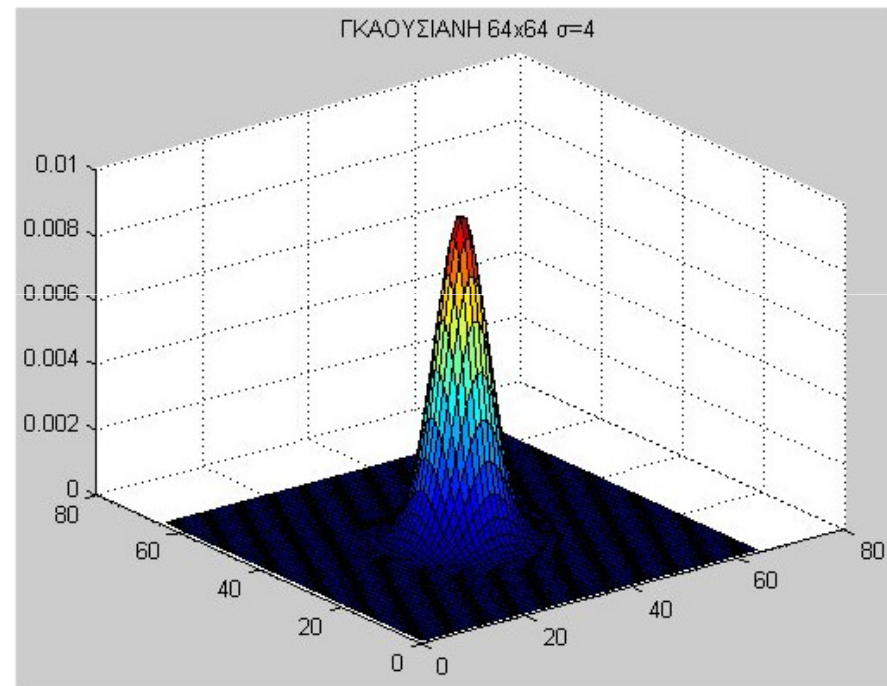
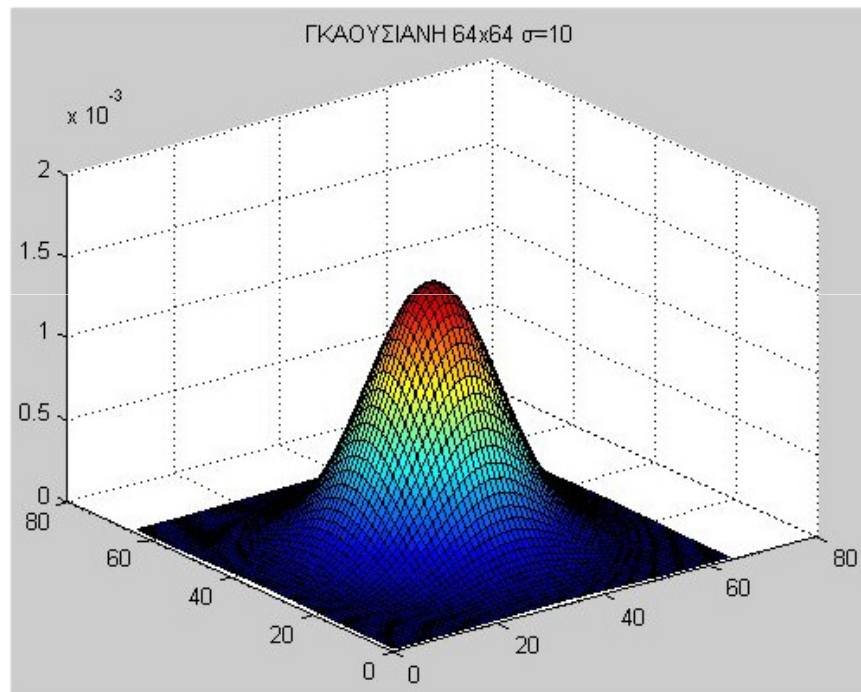


Η Γκαουσιανή σαν φίλτρο εξομάλυνσης

- Η γκαουσιανή σαν επιφάνεια μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο
- Η επιφάνεια έχει διασπορά σ , και κορυφή (δηλ. εμφανίζει μέγιστο) στο σημείο (μ_x, μ_y) .
 - Μεγαλύτερο $\sigma \rightarrow$ πιο ανοικτή και πιο κοντή επιφάνεια, έτσι ώστε ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια και το επίπεδο xy να είναι ίσος με 1.
- Η 2D γκαουσιανή υπολογίζεται σε διακριτή μορφή ως εξής:
 - καθορίζεται το σ της γκαουσιανής (δηλ. το πλάτος της)
 - Υπολογίζονται οι τιμές σε ένα πίνακα συμμετρικό γύρω από το $(0,0)$. Η πλευρά του πίνακα πρέπει να είναι τουλάχιστον $6\sigma+1$. Δηλ $[-3\sigma \dots 3\sigma] \times [-3\sigma \dots 3\sigma]$, ώστε ο διακριτός πίνακας να περιλαμβάνει την επιφάνεια μέχρι και πολύ χαμηλές τιμές.
 - Όσο μεγαλύτερο το σ , τόσο ισχυρότερη η εξομάλυνση που προκαλείται από τη συνέλιξη της εικόνας με την γκαουσιανή.

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}}$$

Η Γκαουσιανή σαν φίλτρο εξομάλυνσης



- Σε περίπτωση που απαιτείται μικρός πίνακας φίλτρου (πχ 3x3) χρησιμοποιούνται προ-υπολογισμένες ακέραιες τιμές.
- Για ακρίβεια και σε πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων χρησιμοποιούνται τιμές απευθείας από τον μαθηματικό ορισμό, σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν σε προηγούμενη διαφάνεια

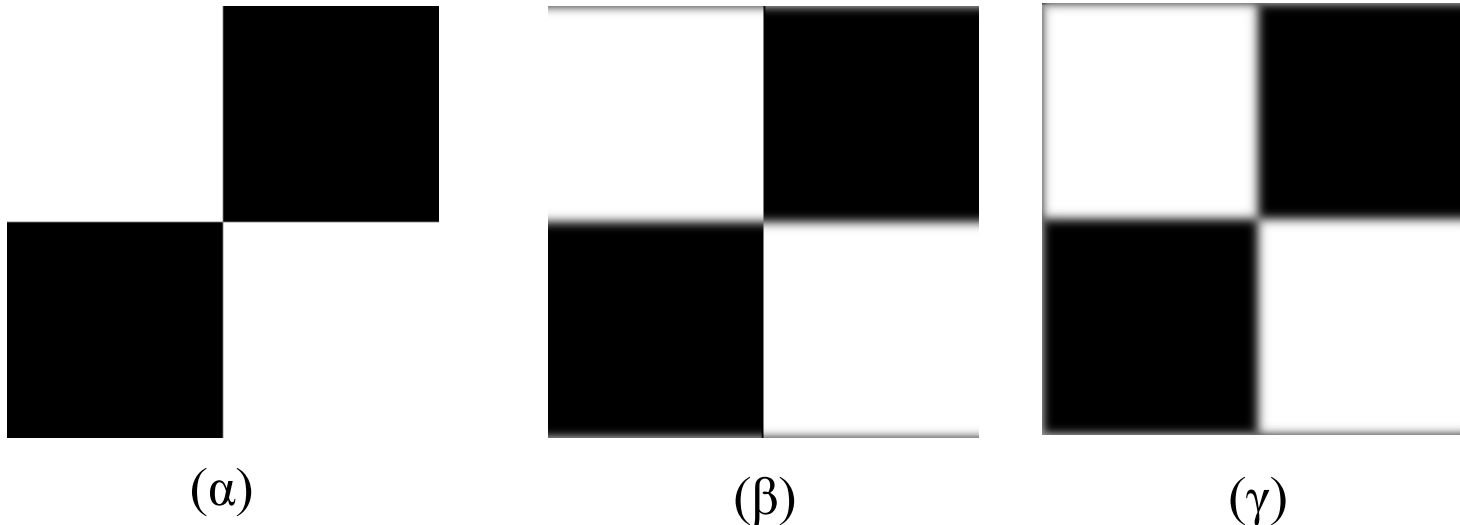
$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα γκαουσιανής 3x3

Διαχωρίσιμα φίλτρα (Separable filters) το παράδειγμα της γκαουσιανής

- Διαχωρίσιμο είναι ένα φίλτρο όταν μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο μίας γραμμής και μίας στήλης.
- Αν ένα 2D φίλτρο είναι διαχωρίσιμο, τότε η συνέλιξη του με μία εικόνα μπορεί να γίνει σαν 2 διαδοχικές μονοδιάστατες συνελίξεις κατά γραμμές και κατά στήλες (η σειρά δεν έχει σημασία).
- Η 2D γκαουσιανή είναι διαχωρίσιμο φίλτρο και μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο (στήλη επί γραμμή) δύο μονοδιάστατων (1D) γκαουσιανών καμπύλων.

Παράδειγμα διαχωρισιμότητας του φίλτρου της γκαουσιανής



- Αρχική εικόνα (α), συνέλιξη με 19×1 Gaussian $\sigma=3$ κατά στήλες (β), συνέλιξη της (β) με 19×1 Gaussian $\sigma=3$ κατά γραμμές (γ).

Εξομάλυνση εικόνας με χρήση συνέλιξης με Γκαουσιανή



Παράδειγμα μη γραμμικής επεξεργασίας

Φίλτρο ενδιάμεσης τιμής

- Έστω κατανομή X πραγματικών αριθμών. Η ενδιάμεση τιμή m της κατανομής X είναι αυτή για την οποία:

$$P(X \leq m) \leq 1/2 \text{ και } P(X \geq m) \geq 1/2$$

- Για πεπερασμένο πλήθος αριθμών:

$$\#\{X: X \leq m\} = \#\{X: X \geq m\},$$

δηλ. το πλήθος των στοιχείων με τιμή $\geq m$ είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων με τιμή $\leq m$.

Αν το πλήθος των στοιχείων της X είναι άρτιο, τότε το m δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

Παρατήρηση: Για μη συμμετρικές κατανομές, η μεσαία τιμή και ο μέσος όρος της κατανομής διαφέρουν.

Το φίλτρο εικόνων ενδιάμεσης τιμής -median filter

- Μη γραμμική επεξεργασία: συνήθως χρησιμοποιείται ο γενικός αλγόριθμος της κυλιόμενης μάσκας, αλλά ΔΕΝ υλοποιείται με συνέλιξη
 - Ορίζεται το παράθυρο του φίλτρου (πχ 3x3)
 - Το κεντρικό pixel του παραθύρου τοποθετείται πάνω στο pixel της εικόνας που θέλουμε να φιλτράρουμε $I(x_0, y_0)$
 - Οι τιμές των pixel της εικόνας μέσα στο παράθυρο ταξινομούνται σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
- Επιλέγεται η ενδιάμεση τιμή των μεσαίων ταξινομημένων pixel
- Τοποθετείται στο αντίστοιχο κεντρικό pixel της φιλτραρισμένης εικόνας $I_1(x_0, y_0)$

25	37	42	44	8
36	255	28	38	42
58	14	255	27	94
13	27	43	12	36
78	76	29	93	49

2 θορυβώδη pixel

Μέσος όρος: $77,7=78$

Median:28

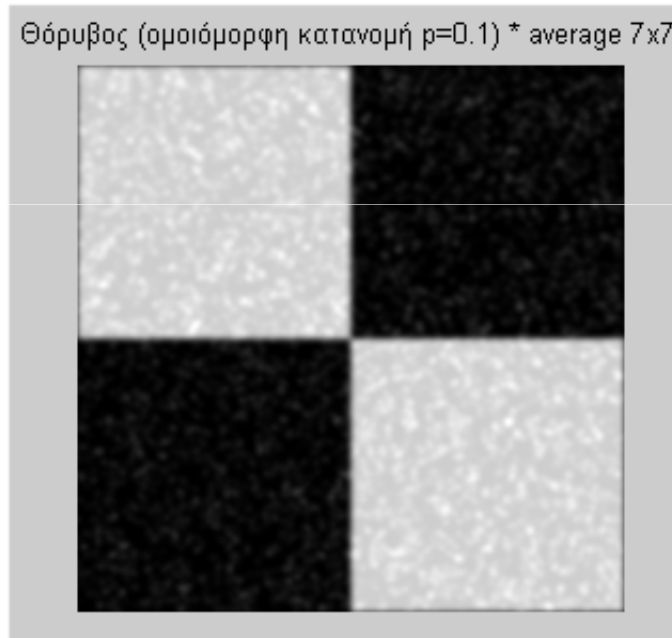
25	37	42	44	8
36	255	28	38	42
58	14	255	27	94
13	27	255	12	36
78	76	29	93	49

3 θορυβώδη pixel

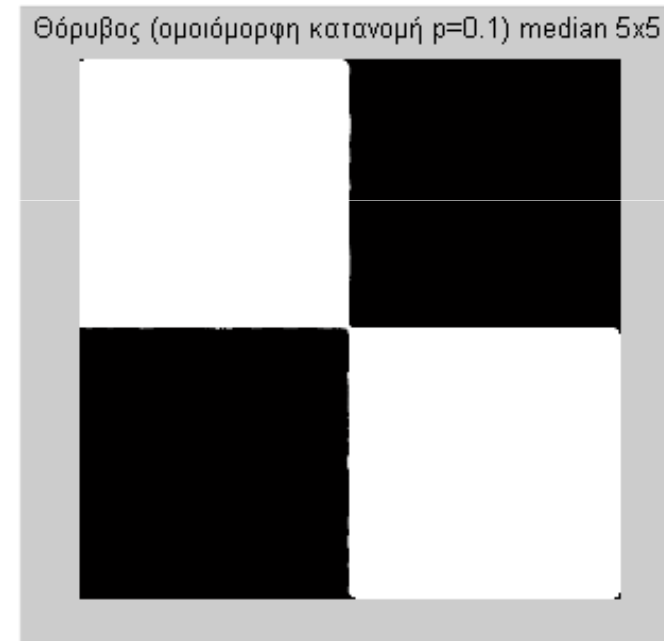
Μέσος όρος: 101

Median:28

Εφαρμογή σε συμπίεση θορύβου



Φίλτρο μέσου όρου 7x7



Φίλτρο μέσου όρου 5x5

Φίλτρο απόριψης A-trim

- Το φίλτρο A-trim ορίζεται ως εξής:

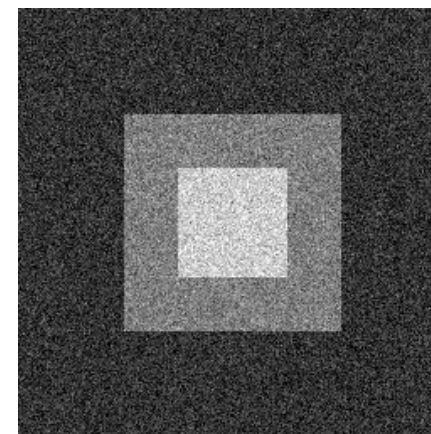
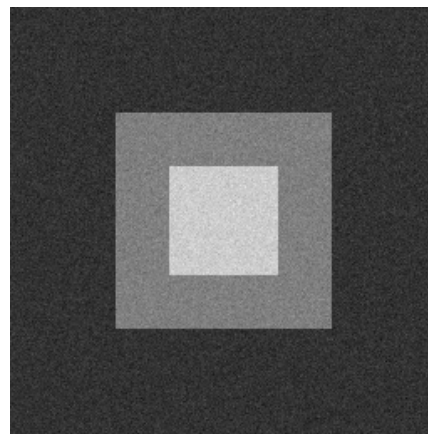
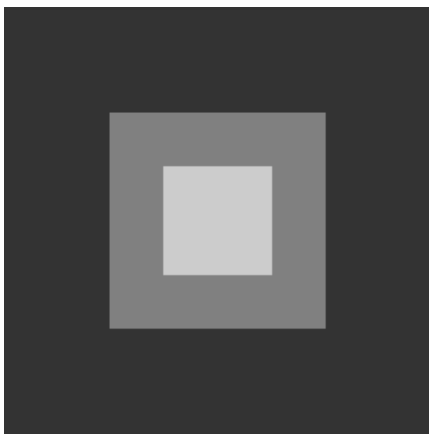
$$y = \frac{1}{n(1-2a)} \sum_{j=an+1}^{n-an} x_j$$

- όπου:
 - $j=1 \dots N$ ο δείκτης των pixel που βρίσκονται εντός του παραθύρου του φίλτρου.
 - x_j : η τιμή της εικόνας στο pixel j διατεταγμένη σε αύξουσα σειρά.
 - $0 \leq a < 0.5$ το ποσοστό των pixel που απορρίπτονται
- Το φίλτρο A-trim αποτελεί ένα συνδυασμό του φίλτρου μέσης τιμής και του φίλτρου ενδιάμεσης τιμής.
 - $a=0 \rightarrow$ το φίλτρο γίνεται κινητού μέσου όρου
 - a τείνει $0.5 \rightarrow$ το φίλτρο γίνεται ενδιάμεσης τιμής

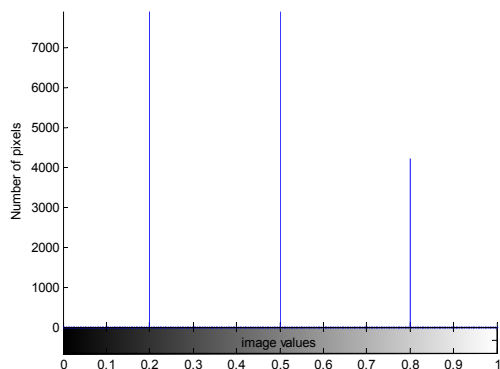
Η έννοια του γκαουσιανού θορύβου

- Εστω εικόνα I η οποία αποτελεί την ιδανική εικόνα όπως θα καταγραφόταν χωρίς θόρυβο.
- Ο γκαουσιανός θόρυβος προσθέτει στην τιμή του κάθε pixel (x_0, y_0) ένα τυχαίο αριθμό που παράγεται ακολουθώντας τη γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή την τιμή της εικόνας $I(x_0, y_0)$ και διασπορά σ η οποία καθορίζεται από τη διαδικασία του θορύβου. Όσο μεγαλύτερο το σ , τόσο μεγαλύτερη η επίδραση του θορύβου.

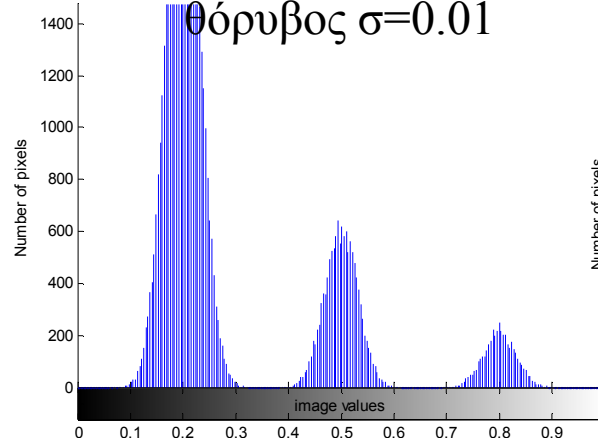
Παραδείγματα γκαουσιανού θορύβου



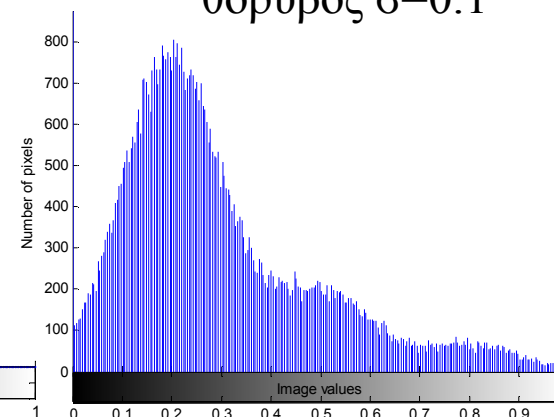
Αρχική εικόνα



Γκαουσιανός
θόρυβος $\sigma=0.01$

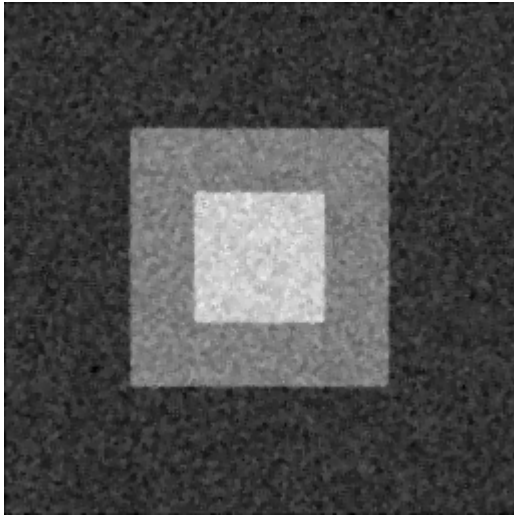


Γκαουσιανός
θόρυβος $\sigma=0.1$

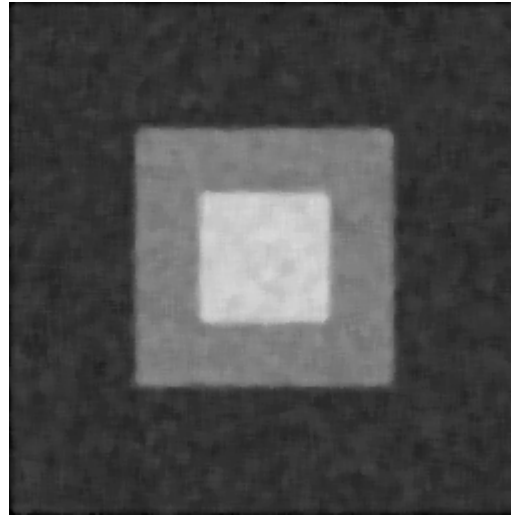


- Εστω εικόνα με τρεις διαφορετικές τιμές, όπως αυτή του σχήματος.

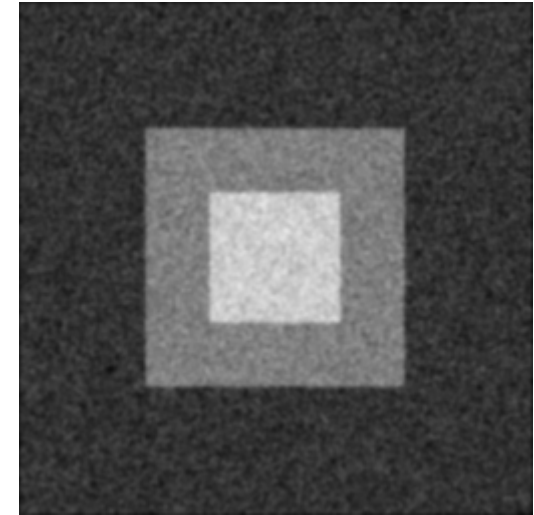
Παραδείγματα συμπίεσης γκαουσιανού θορύβου



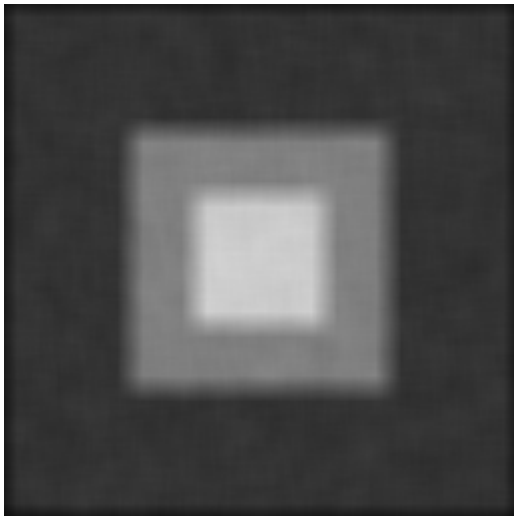
Φίλτρο μέσου όρου 3x3



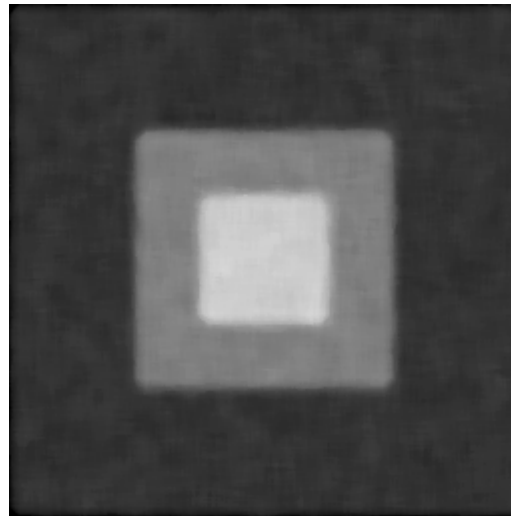
Φίλτρο ενδιάμεσης
τιμής 3x3



Γκαουσιανό φίλτρο 5x5,
 $\sigma=1$



Φίλτρο μέσου όρου 13x13



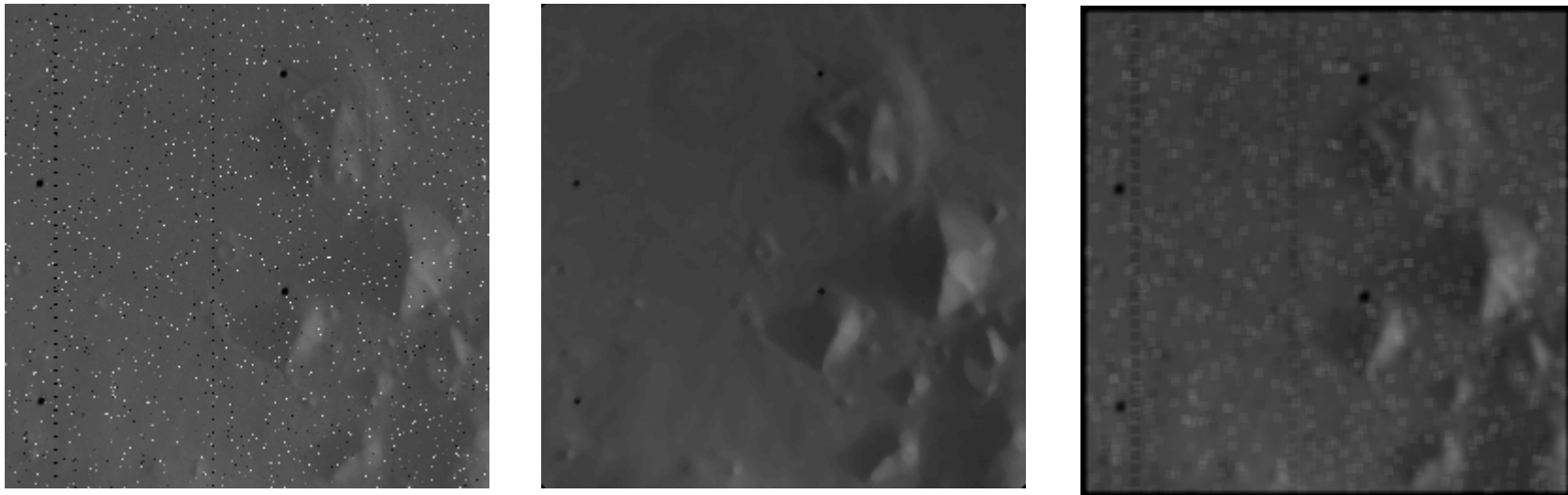
Φίλτρο ενδιάμεσης
τιμής 7x7



Γκαουσιανό φίλτρο
13x13, $\sigma=2$

Θόρυβος “Salt and pepper”

- Μη συσχετισμένος θόρυβος που προκύπτει από τη μετάδοση των δεδομένων. Ένα ποσοστό των pixel αποκτά τιμή η οποία είναι τυχαίος αριθμός με ομογενή κατανομή σε όλο το εύρος τιμών της εικόνας.
- Το φίλτρο ενδιάμεσης τιμής είναι ιδανικό για τέτοιο τύπο θορύβου, αφού εξαφανίζει τα θορυβώδη pixel και διατηρεί τη λεπτομέρεια της εικόνας.
- Τα φίλτρα μέσου όρου δεν αποτελούν μία κατάλληλη επιλογή.



- Αρχική εικόνα με πραγματικό θόρυβο salt and pepper (α) και εφαρμογή του φίλτρου ενδιάμεσης τιμής 5x5 (β) και φίλτρου μέσου όρου 5x5 (γ).

Θόρυβος Poisson

- Ο θόρυβος Poisson σε σήματα και εικόνες αντιστοιχεί σε διακυμάνσεις του καταγραφόμενου αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στον ανιχνευτή που παράγει το σήμα ή την εικόνα.
- Η κατανομή poisson δίνει την πιθανότητα να καταγραφούν x φωτόνια, όταν ο μέσος καταγραφόμενος όρος στη μονάδα του χρόνου είναι μ :

$$p(x, \mu) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \mu, x \in \mathbb{N}$$

- Η παραπάνω κατανομή ισχύει για κάθε περίπτωση διακριτών, ανεξάρτητων γεγονότων, πχ.:
 - Ποια η πιθανότητα σε ένα parking να μπουν σήμερα 100 αυτοκίνητα, όταν ο ημερήσιος μέσος όρος είναι 85 ?
- Όταν $\mu > 100$, η κατανομή Poisson προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή, με $\sigma = \sqrt{\mu}$

Κβαντομηχανικός θόρυβος εικόνας και δόση ασθενούς

- Έστω περιοχή με εμβαδόν ίσο με 1 pixel (πχ $10 \times 10 \mu\text{m}^2$). Η πιθανότητα να καταγράψει x φωτόνια, ενώ ο αναμενόμενος μέσος αριθμός καταγεγραμμένων φωτονίων είναι μ , δίνεται από την κατανομή Poisson $P(x, \mu)$.
- Το σ της Poisson είναι $\mu^{0.5} \rightarrow$ με πιθανότητα 98%, η τιμή ενός Pixel θα είναι εντός του διαστήματος $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

$$p(x, \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

- **Κβαντομηχανικός θόρυβος:** διαταραχές του αριθμού των φωτονίων γ που καταγράφονται στη μονάδα εμβαδού, στη μονάδα του χρόνου.
- Ο θόρυβος της εικόνας υπολογίζεται από το σηματοθορυβικό λόγο Signal to Noise Ratio (SNR). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν από τους δύο ορισμούς:

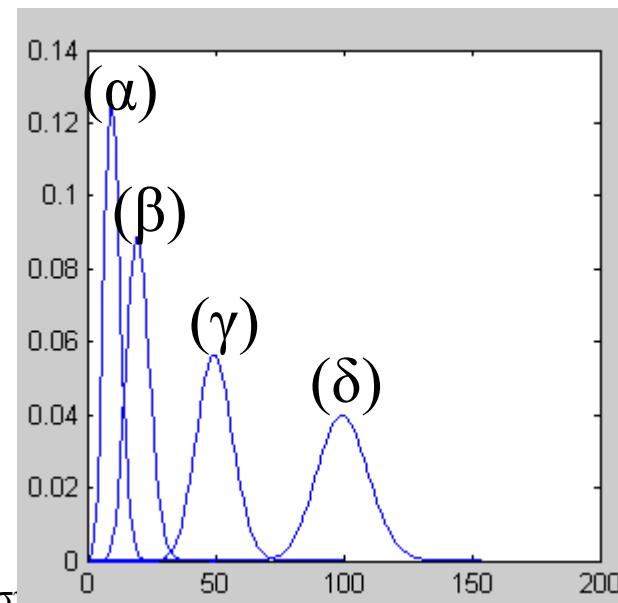
$$SNR = 10 \log \left(\frac{\text{signal}}{\text{noise}} \right) \text{ (dB)} \quad SNR = \frac{\text{signal}}{\text{noise}} \text{ (καθαρός αριθμός)}$$

- Στην περίπτωση του θορύβου Poisson:

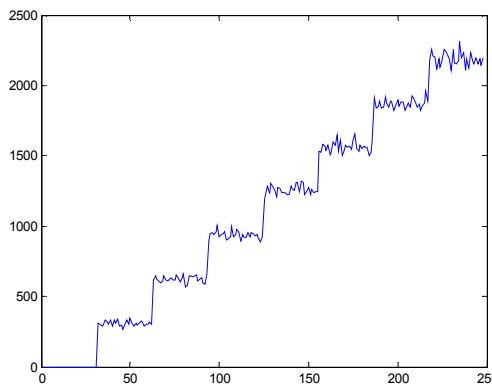
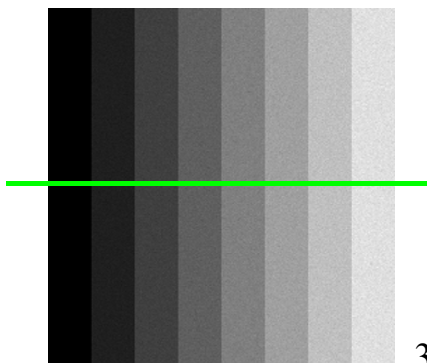
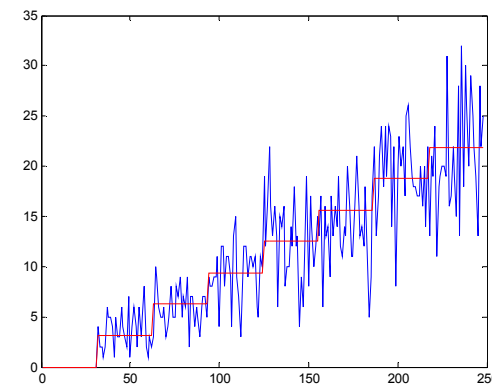
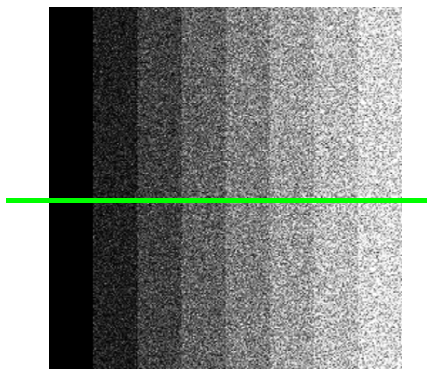
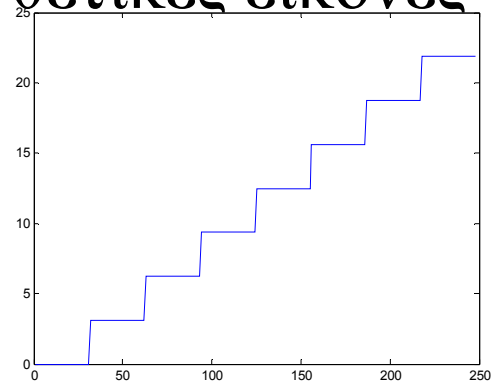
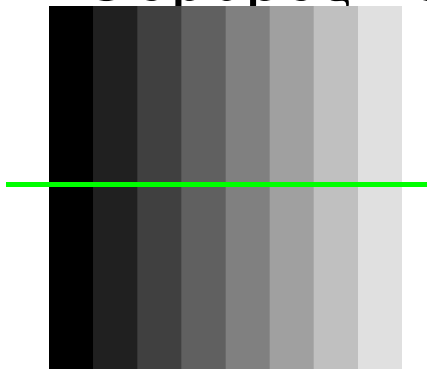
$$\frac{\text{signal}}{\text{noise}} = \frac{\mu}{\sigma} = \sqrt{\mu}$$

- Θεωρείστε δύο γειτονικά Pixel εκ των οποίων το ένα ανήκει σε αντικείμενο και το άλλο στο υπόβαθρο (background) της εικόνας. Το pixel του αντικειμένου έχει διπλάσια τιμή από το Pixel background. Σε ποια από τις περιπτώσεις η αντίθεση του αντικειμένου είναι μεγαλύτερη:
- A) τιμές pixel 5 και 10
- B) τιμές pixel 50,100

Κατανομή Poisson για $\mu=10$
 (α), $\mu=20$ (β), $\mu=50$ (γ) και
 $\mu=100$ (δ).

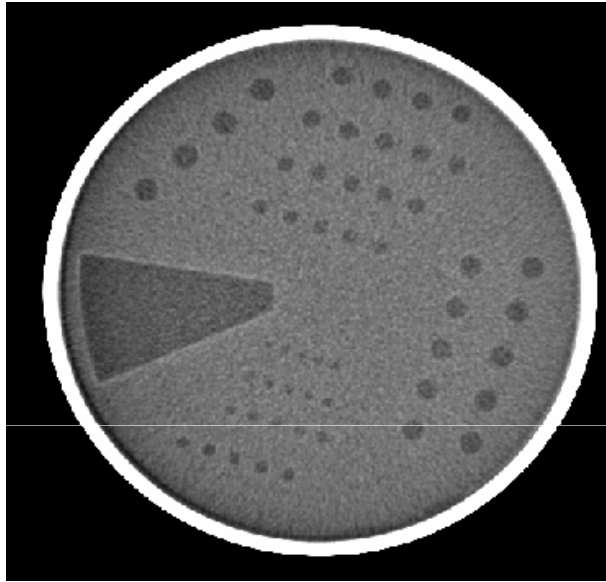


Θόρυβος Poisson σε συνθετικές εικόνες

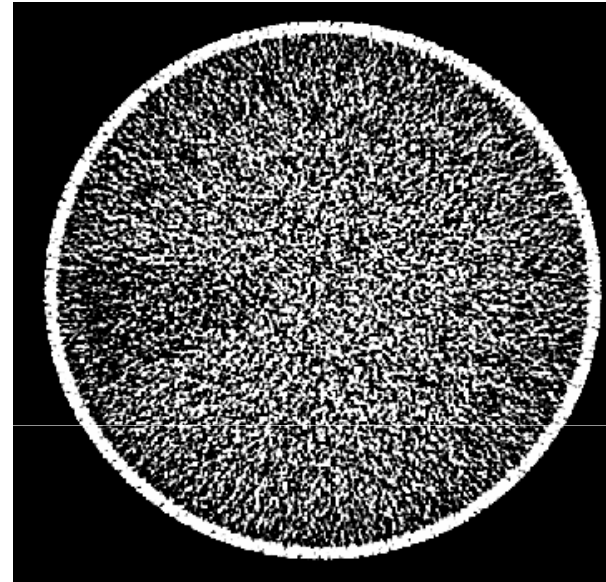


3. Κ Δελήμπασης

Παράδειγμα θορύβου Poisson σε ραδιογραφία phantom



- **μεγάλος αριθμός X** στο σχηματισμό εικόνας \rightarrow μ μεγάλο



- **μικρός αριθμός φωτονίων $X \rightarrow \mu$ μικρό.**



(α)



(β)



(γ)



(δ)

- (α) Εικόνα με θόρυβο poisson.
(β) Εφαρμογή φίλτρου ενδιάμεσης τιμής 5x5.
(γ) Εφαρμογή φίλτρου μέσου όρου 5x5.
(δ) Εφαρμογή φίλτρου γκαουσιανής 5x5, $\sigma=2$.

Ανεύρεση ακμών με χρήση συνέλιξης

- Ακμή -Edge- καλείται μία μεταβολή της φωτεινότητας της εικόνας.
 - Είναι ιδιότητα του pixel,
 - υπολογίζεται στην περιοχή του pixel και
 - είναι **διανυσματικό** μέγεθος \rightarrow έχει μέτρο **mag** και διεύθυνση Φ .
- Αν $I(x,y)$ εικόνα τότε το διάνυσμα της παραγώγου της εικόνας $g(x,y)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$mag(g(x,y)) = |g(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} \quad \Phi(g(x,y)) = \arctan\left(\frac{\partial I / \partial y}{\partial I / \partial x}\right)$$

Για απλοποίηση των υπολογισμών:

$$mag(g(x,y)) = |g(x,y)| = \left|\frac{\partial I}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|$$

- Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται διακριτά:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = I(x_0 + 1, y_0) - I(x_0 - 1, y_0)$$

$$\left. \frac{\partial I}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = I(x_0, y_0 + 1) - I(x_0, y_0 - 1)$$

- Υλοποίηση με χρήση συνέλιξης:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = I * m_x$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = I * m_y$$

- Παραδείγματα των μασκών m_x , m_y δίνονται στην επόμενη διαφάνεια

- Prewitt Gradient μάσκες

$$m_x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m_y = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Sobel Gradient μάσκες

$$m_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m_y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Απλός αλγόριθμος για τον υπολογισμό ακμών βάσει μερικών παραγώγων:

- Υπολογίζεται η συνέλιξη της εικόνας I με τις μάσκες παραγωγίσισης κατά γραμμές και κατά στήλες
- Υπολογίζεται το μέτρο της παραγώγου σε κάθε pixel και χρησιμοποιείται η τεχνική της κατωφλίωσης (thresholding):
 - Ένα pixel (x,y) είναι pixel ακμής, αν το μέτρο της παραγώγου στο σημείο αυτό $g(x,y) \geq T$, όπου T κατώφλι μέτρου παραγώγου

Παράδειγμα εφαρμογής масκών Sobel για ανίχνευση ακμών

Αρχική εικόνα I								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Συνέλιξη I*Sobel_row								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	3	4	4	3	1	0
3	0	1	3	4	4	3	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	-1	-3	-4	-4	-3	-1	0
7	0	-1	-3	-4	-4	-3	-1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

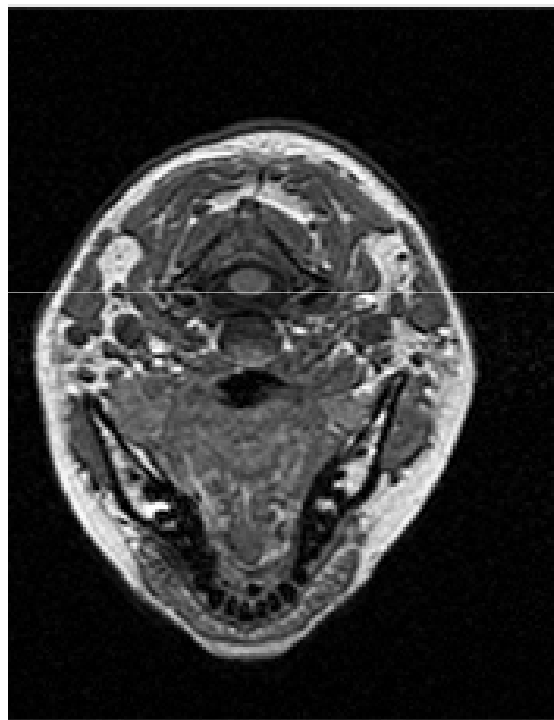
Συνέλιξη I*Sobel_column								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	3	0	0	-1	-1	0
3	0	1	3	0	0	-3	-3	0
4	0	4	4	0	0	-4	-4	0
5	0	4	4	0	0	-4	-4	0
6	0	-1	-3	0	0	-3	-1	0
7	0	-1	-3	0	0	-3	-1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Sobel row			
	1	2	3
1	1	2	1
2	0	0	0
3	-1	-2	-1

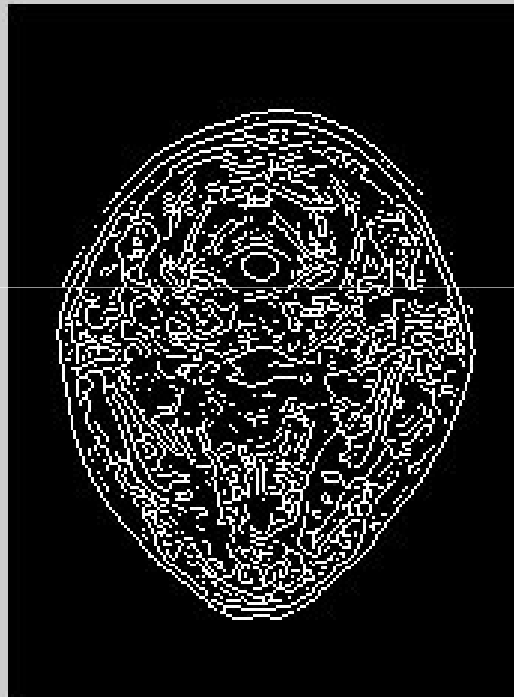
Sobel column			
	1	2	3
1	1	0	-1
2	2	0	-2
3	1	0	-1

abs(I*Sobel_row)+abs(I*Sobel_column)								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	6	4	4	4	2	0
3	0	2	6	4	4	6	4	0
4	0	4	4	0	0	4	4	0
5	0	4	4	0	0	4	4	0
6	0	2	6	4	4	6	2	0
7	0	2	6	4	4	6	2	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

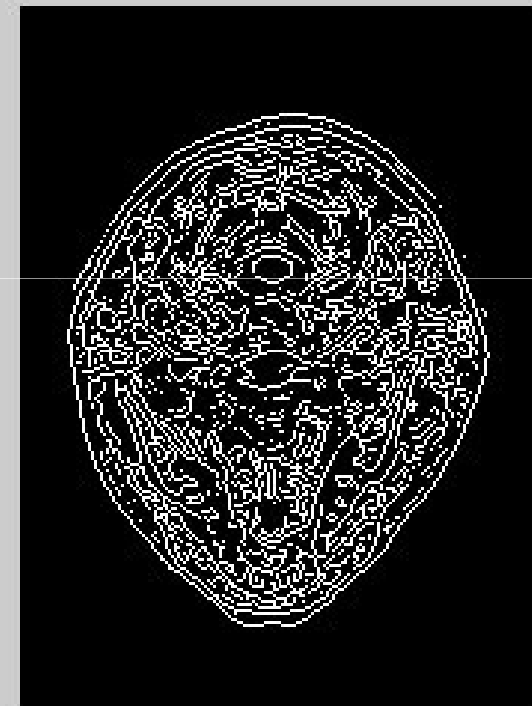
Παράδειγμα εφαρμογής των προηγούμενων μασκών



Prewit

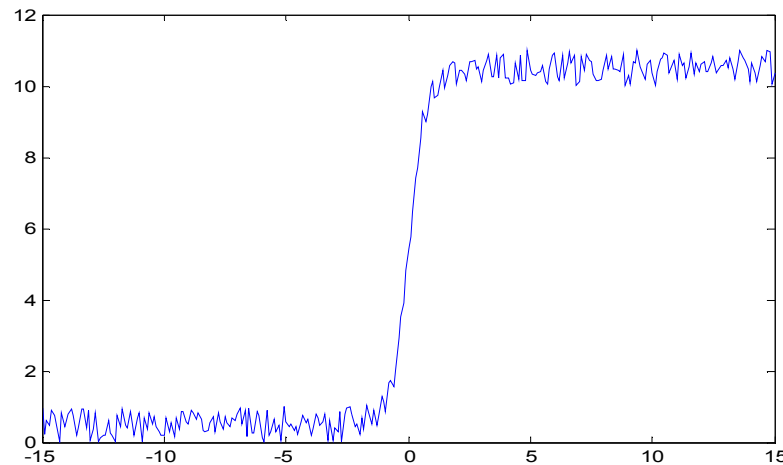


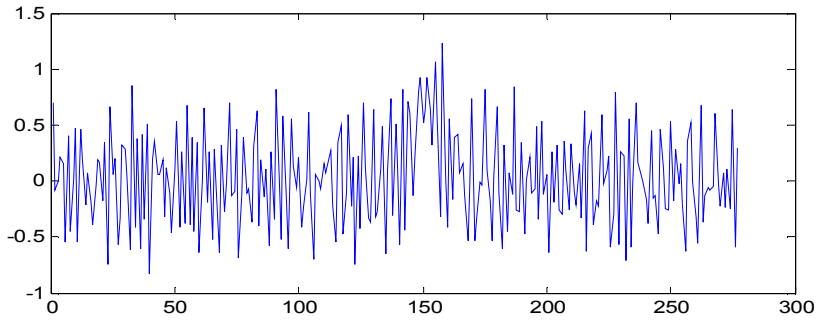
Sobel



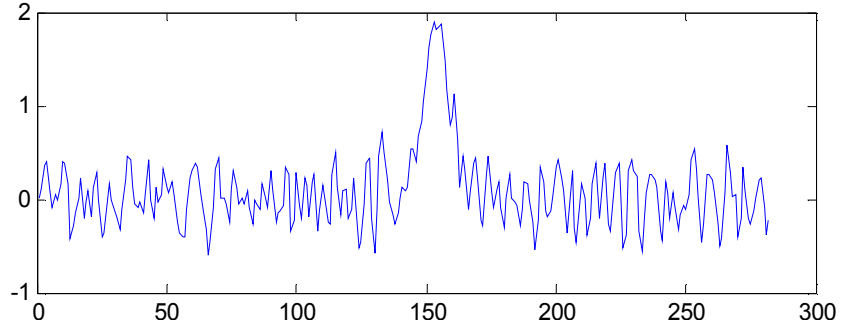
Ανεύρεση ακμών με χρήση συνέλιξης με παράγωγο της γκαουσιανής

- Εστω 1D ακμή με μη συσχετισμένο προσθετικό λευκό θόρυβο.
- Εφαρμόζουμε την συνέλιξη με τις μονοδιάστατες μάσκες Sobel και τις μονοδιάστατες γκαουσιανές παραγώγους, με διαφορετικό πλήθος στοιχείων.

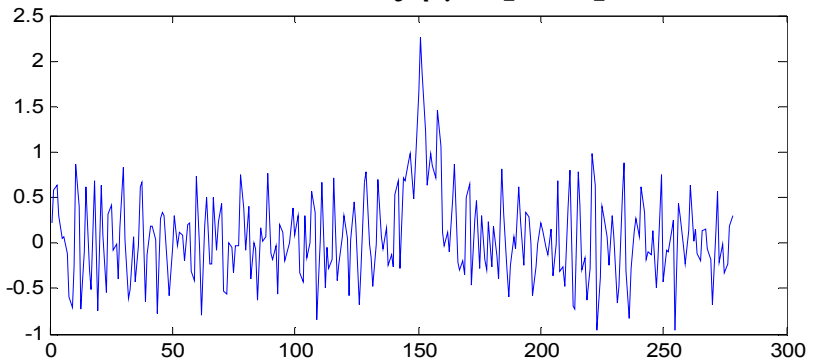




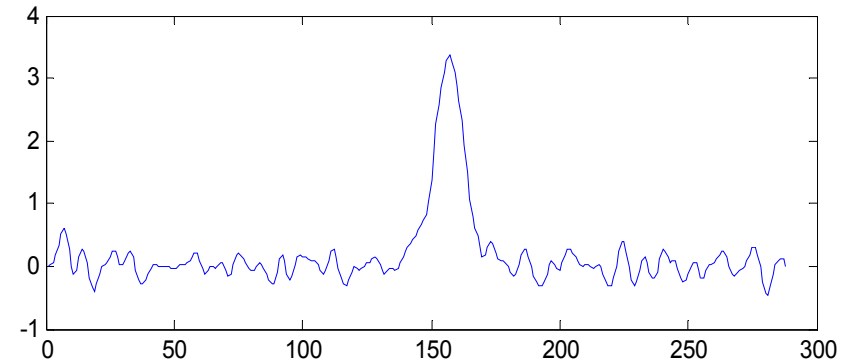
Συνέλιξη με $[1,-1]$



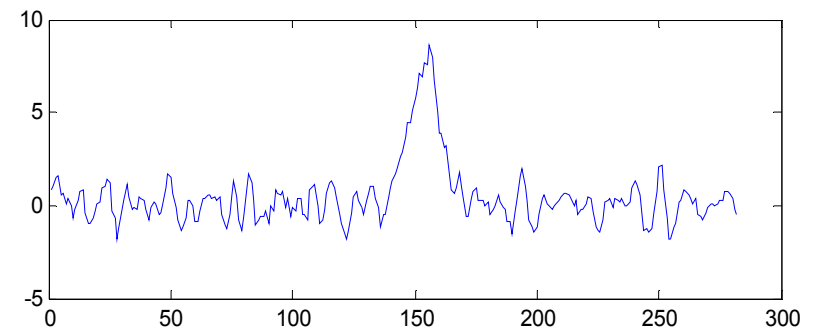
Συνέλιξη με 1^η παράγωγο γκαουσιανής, $\sigma=1$



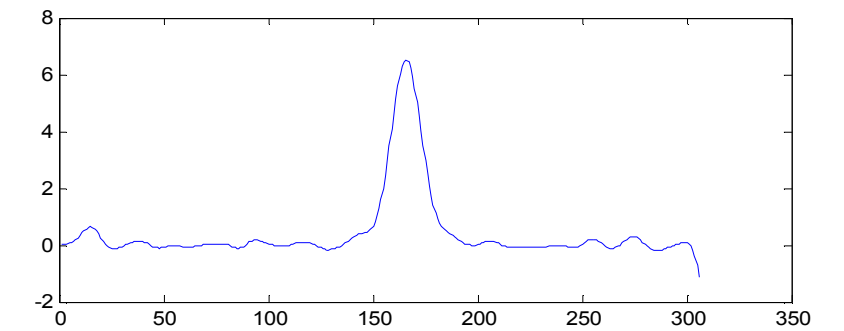
Συνέλιξη με $[1,0,-1]$



Συνέλιξη με 1^η παράγωγο γκαουσιανής, $\sigma=2$



Συνέλιξη με $[1,1,1,1,0,-1,-1,-1,-1]$



Συνέλιξη με 1^η παράγωγο γκαουσιανής, $\sigma=5$

Ακμές βάσει παραγώγων 2ης τάξης

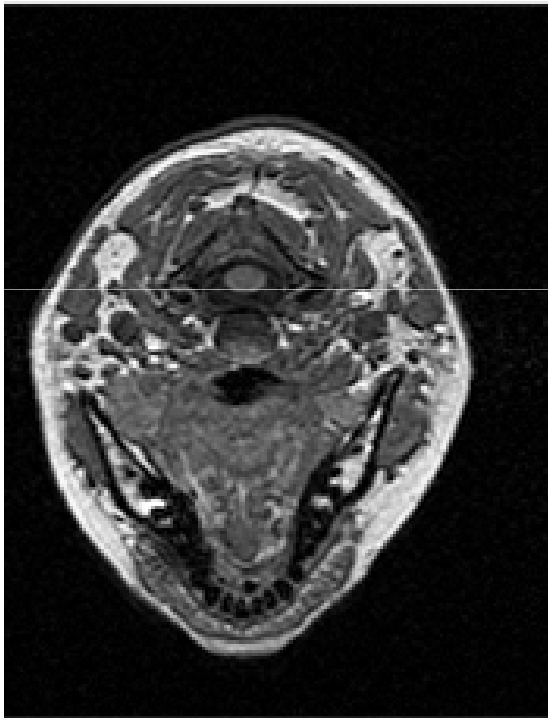
- Μαθηματικός ορισμός παραγώγου 2ης τάξης 2D συνάρτησης

$$L(I) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

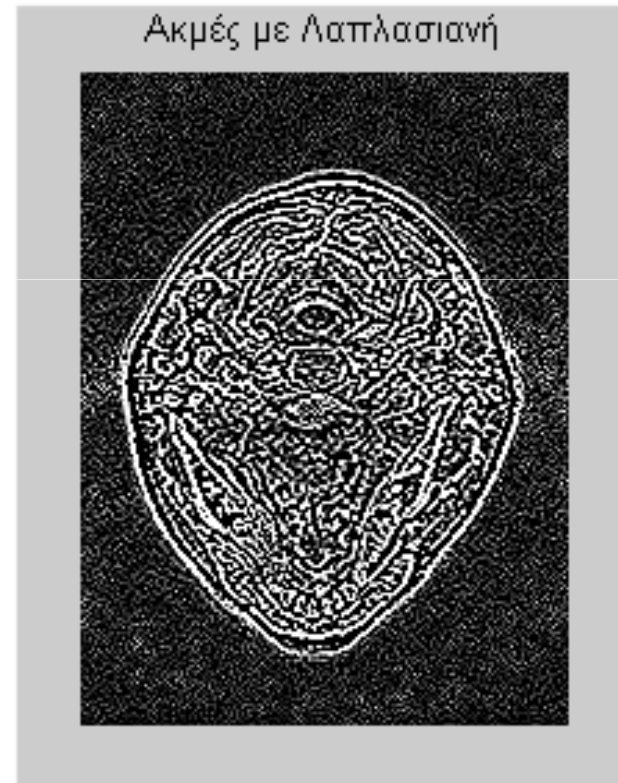
- Ο τελεστής L καλείται λαπλασιανή. Παρατηρείστε ότι η L δεν επιστρέφει διανυσματικό μέγεθος.
- Αποδεικνύεται ότι η λαπλασιανή μπορεί να προσεγγιστεί με συνέλιξη με πίνακα 3×3 :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Η Συνέλιξη μίας εικόνας με τους πίνακες της Λαπλασιανής L_1 ή L_2 εντοπίζει ριχελ ακμών, αλλά ταυτόχρονα ενισχύει το θόρυβο.



Αρχικά δεδομένα
(Raw data)



Κ. Δελήμπασης

- Αντί του προηγούμενου χρησιμοποιείται η Λαπλασιανή (L) της συνέλιξης της εικόνας I με την Γκαουσιανή G -Laplacian of Gaussian LoG:

$$L(G * I) = L(G) * I$$

Λόγω γραμμικότητας

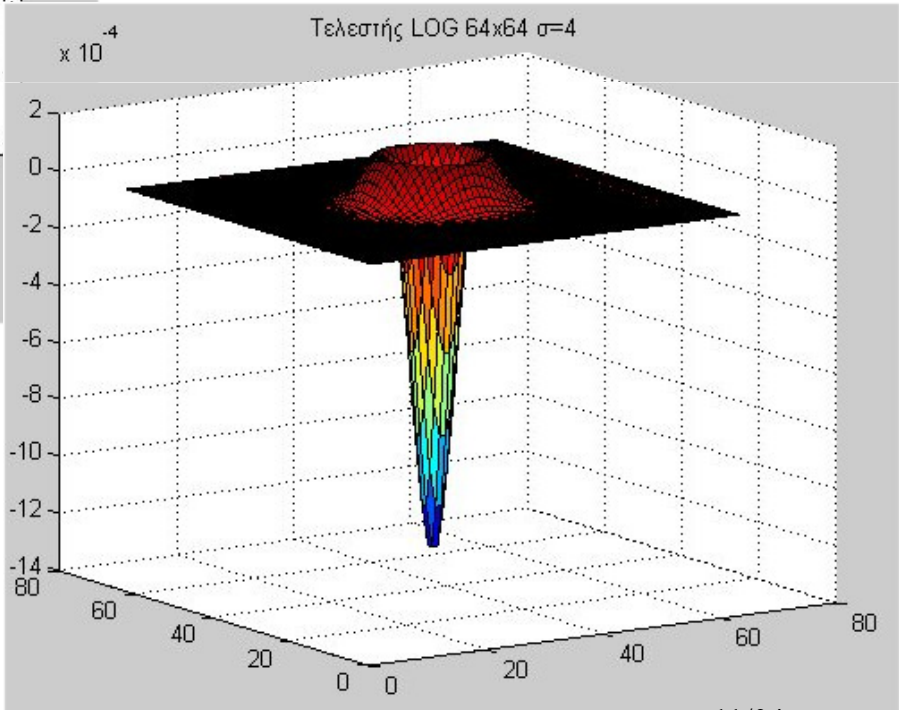
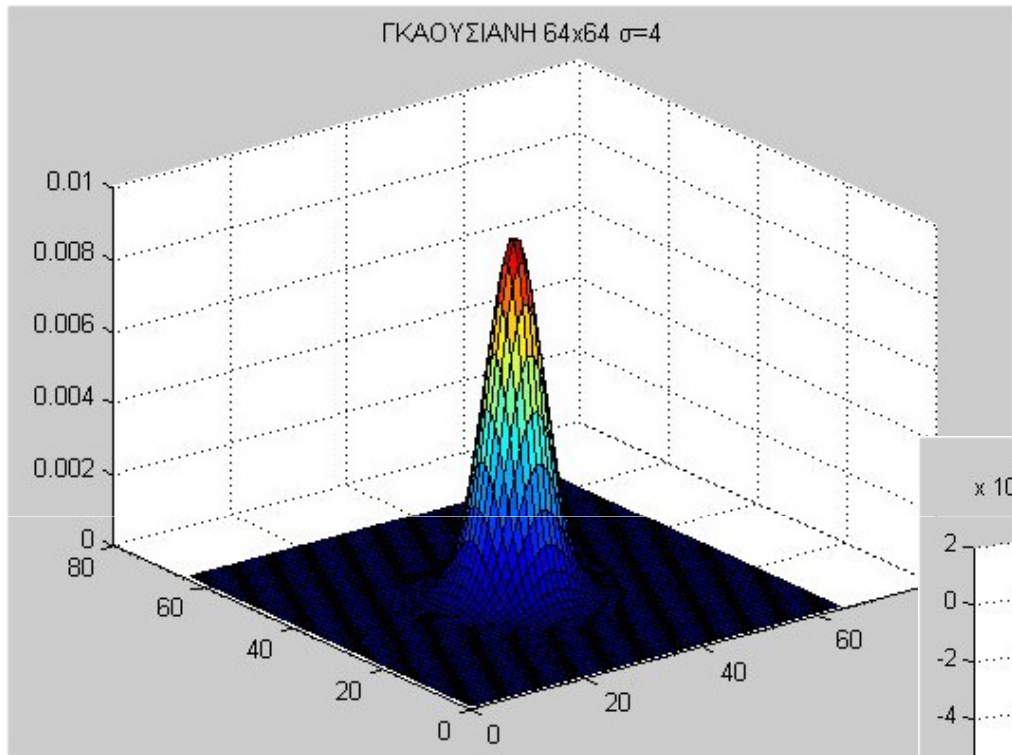
- Ο LoG υπολογίζεται αναλυτικά παραγωγίζοντας την μαθηματική έκφραση της γκαουσιανής G :

Για μάσκα $M(m,n)$, $m,n=-N \dots N$ ισχύει:

$$LG(m,n) = c \left(\frac{(m^2 + n^2)}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left(-\frac{m^2 + n^2}{2\sigma^2} \right)$$

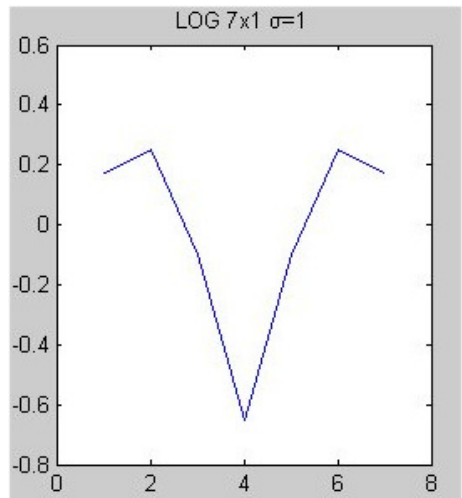
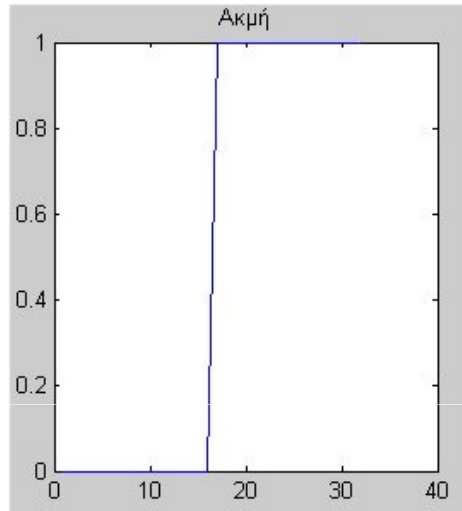
$$c : \sum_m \sum_n LG(m,n) = 1$$

- Μπορεί να επαληθευτεί ότι η συνέλιξη μίας γκαουσιανής με τον πίνακα L_1 ή τον L_2 προσεγγίζει την αναλυτική έκφραση της LoG.

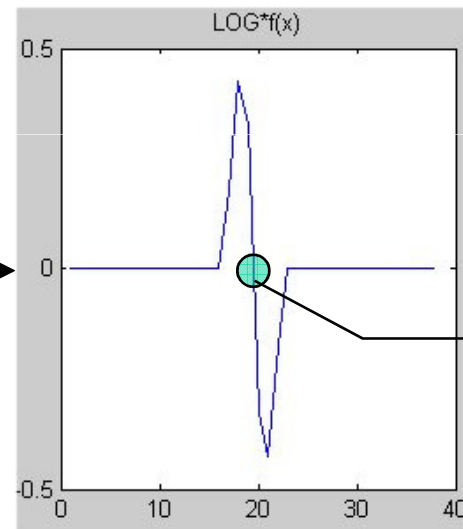


Εφαρμογή LoG σε μία διάσταση

Η συνέλιξη της εικόνας I σε pixel ακμών με την LoG παράγει μηδενισμό του αποτελέσματος στα σημεία των ακμών. Έτσι όπου παρατηρούμε 0 τιμές στα αποτελέσματα της συνέλιξης $LoG * I$ εντοπίζουμε σημεία ακμής.



συνέλιξη



Μηδενισμός LoG:
σημείο ακμής

Το πρόβλημα της εύρεσης των σημείων μηδενισμού της LoG

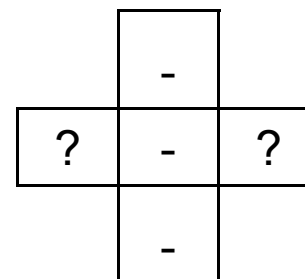
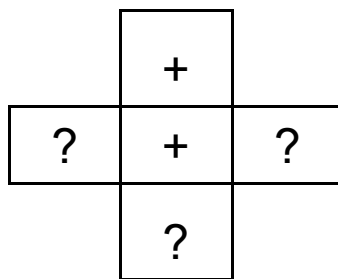
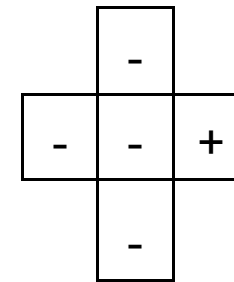
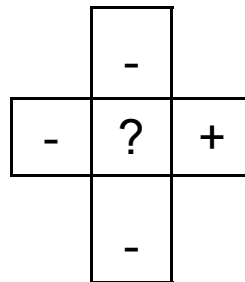
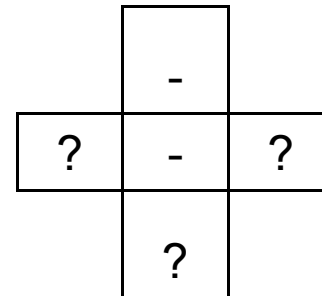
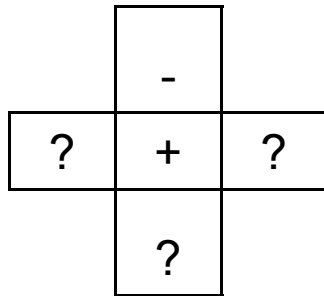
- Εν γένει, η συνέλιξη της LoG με την εικόνα I δεν δίνει ακριβώς μηδενικό αποτέλεσμα στα σημεία των ακμών.
- Εντοπίζουμε τα σημεία ακμών προσδιορίζοντας τα σημεία της εναλλαγής του προσήμου της $I * LoG$:
 - Έστω $I_2 = I * LoG$
 - Για κάθε pixel (i,j) της I_2
 - Το pixel (i,j) της I χαρακτηρίζεται ως ακμή της I αν $I_2(i,j) < 0$ AND
 - ένα τουλάχιστον από τα $[I_2(i,j+1), I_2(i,j-1), I_2(i-1,j), I_2(i+1,j)]$ είναι > 0 AND
 - $|I_2(i,j) - \max([I_2(i,j+1), I_2(i,j-1), I_2(i-1,j), I_2(i+1,j)])| > \text{κατώφλι}$

+: $I * LoG > 0$

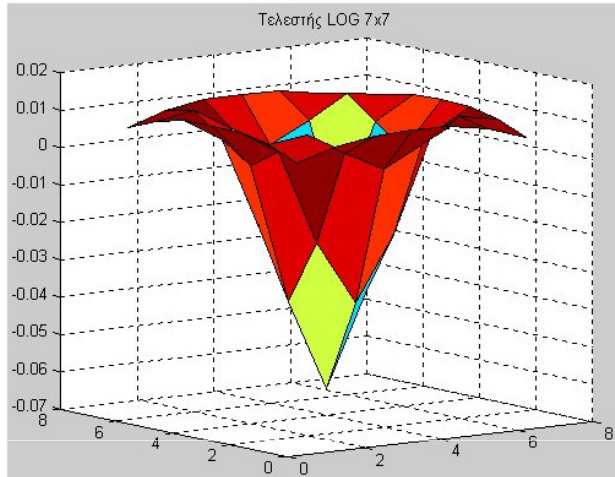
-: $I * LoG < 0$

?: οτιδήποτε

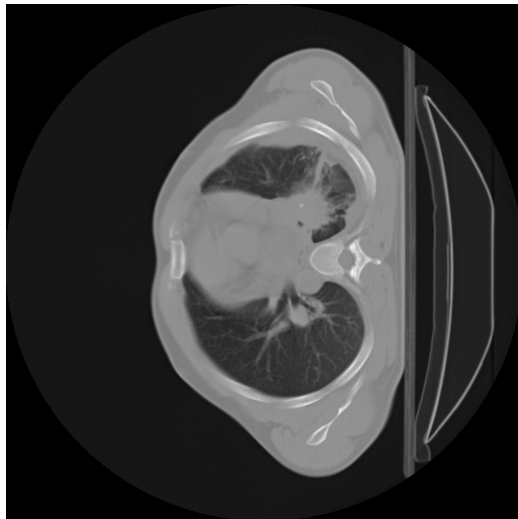
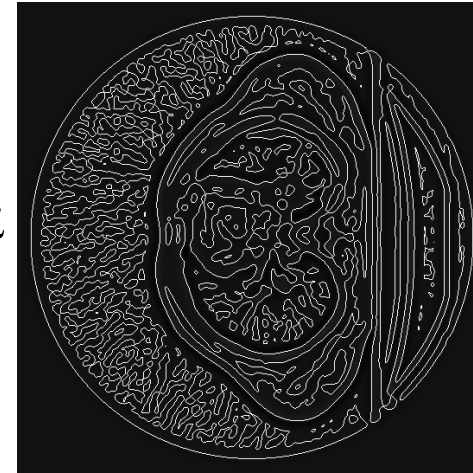
Ποιά από τα παρακάτω ρίχει ανήκουν σε ακμές ?



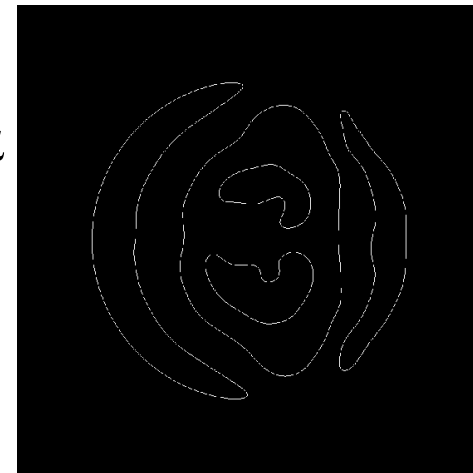
Εφαρμογή LoG σε δύο διαστάσεις



Αποτέλεσμα
για $\sigma=1$



Αποτέλεσμα
για $\sigma=7$



Παράδειγμα ανίχνευσης ακμών εικόνας I με χρήση της Λαπλασιανής μάσκας L

- καξηκ

Αρχική εικόνα I								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Αποτέλεσμα της συνέλιξης με Λαπλασιανή								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	1	-2	-1	-1	-2	1	0
4	0	1	-1	0	0	-1	1	0
5	0	1	-1	0	0	-1	1	0
6	0	1	-2	-1	-1	-2	1	0
7	0	0	1	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Λαπλασιανή			
	1	2	3
1	0	1	0
2	1	-4	1
3	0	1	0

Αποτέλεσμα της ανίχνευσης ακμών								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Ανίχνευση ακμών με τον τελεστή Canny Canny edge detector

- Τα βήματα του τελεστή ανίχνευσης ακμών Canny είναι τα ακόλουθα:
 - Υπολογισμός της κλίσης (gradient) της εικόνας μέσω συνέλιξης με την αναλυτικά υπολογισμένη παράγωγο της Gaussian για συμπίεση θορύβου

$$\frac{\partial(I * g)}{\partial x}(x, y) = \left(I * \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x, y) = I_{Gx}(x, y)$$

$$\frac{\partial(I * g)}{\partial y}(x, y) = \left(I * \frac{\partial g}{\partial y} \right)(x, y) = I_{Gy}(x, y)$$

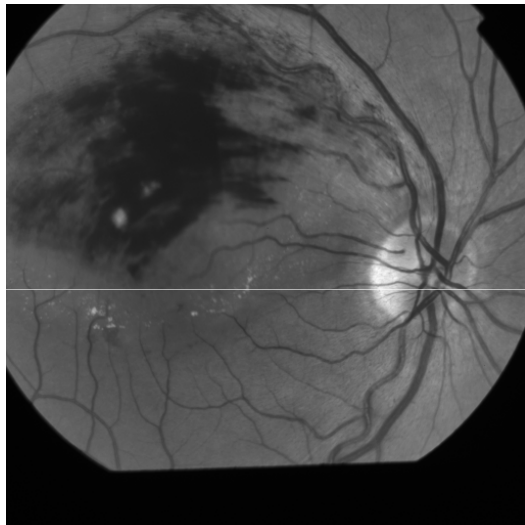
$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

$$|G| = \sqrt{I_{Gx}^2 + I_{Gy}^2}, G_{\Theta} = \tan^{-1} \left(\frac{I_{Gy}}{I_{Gx}} \right)$$

- Καταστολή των μη μέγιστων τιμών, ώστε να μην συνυπολογίζονται ψευδοακμές:
 - Για κάθε pixel ελέγχεται αν το μέτρο του διανύσματος κλίσης είναι μεγαλύτερο από το μέτρο του διανύσματος κλίσης στα δύο pixel εκατέρωθεν αυτού, σε διεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση του διανύσματος κλίσης (έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα).
 - Αν η παραπάνω συνθήκη δεν πληρείται, το pixel δεν θεωρείται pixel ακμής.
- Κατωφλίωση υστέρησης (Hysteresis thresholding)
 - Τα προηγούμενα βήματα έχουν δημιουργήσει ένα αριθμό από υποψήφια pixel ακμών.
 - Ορίζονται δύο κατώφλια (thresholds), T_L , T_H ($T_L < T_H$)
 - Εντοπίζεται ένα (αρχικό) pixel ακμής με μέτρο κλίσης $|G| > T_H$
 - Εντοπίζονται όλα τα pixel ακμής με μέτρο κλίσης $|G| > T_L$ τα οποία είναι συνδεδεμένα με το (αρχικό) pixel ακμής.

- Τα προηγούμενα δύο βήματα επαναλαμβάνονται όσο υπάρχουν pixel ακμής με μέτρο κλίσης $|G| > T_H$. Όσα pixel έχουν μέτρο κλίσης $|G| > T_L$ ή $T_H > |G| > T_L$ και δεν είναι συνδεδεμένα με αρχικό pixel ακμής με μέτρο κλίσης $|G| > T_H$ δεν θεωρούνται pixel ακμής.
- Ο τελεστής ανίχνευσης ακμών Canny αποτελεί έναν από τους πλέον ισχυρούς τελεστές και χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές.

Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή Canny για ανίχνευση αγγείων



Αρχική εικόνα



Ακμές μετά την
καταστολή των μη
μέγιστων τιμών



Ακμές μετά την
κατωφλίωση υστέρησης

Δυαδικές εικόνες: Μετασχηματισμός Απόστασης (Distance Transform)

- Έστω δυαδική εικόνα $I(i,j)$ η οποία περιέχει pixel ακμών με τιμή 0 (ενώ τιμή υποβάθρου θεωρείται η μέγιστη πχ 255). Σε περίπτωση που η εικόνα ακμών είναι δυαδική με τιμή 1 (ακμή) και 0 (υπόβαθρο), κάνουμε τον απαραίτητο μετασχηματισμό.
- Ο DT παράγει μία εικόνα της οποίας το κάθε pixel περιέχει την απόσταση του από το κοντινότερο pixel ακμών.
- Ο DT είναι χρήσιμος για την ταύτιση αντικειμένων με ψηφιακές εικόνες.
- Επισημαίνεται ότι ο αλγόριθμος που ακολουθεί δεν είναι ο βέλτιστος (χρειάζεται πολλαπλά περάσματα της εικόνας και δεν υπολογίζει ευκλείδεια απόσταση), αλλά παουσιάζεται λόγω απλότητας.

Αλγόριθμος Μετασχηματισμού απόστασης Manhattan

Εισοδος: I εικόνα ακμών (δυαδική)

Εξοδος: I εικόνα απόστασης (ακέραιες τιμές)

$k=0$

while (υπάρχουν pixel υποβάθρου)

$k=k+1$;

 Για κάθε pixel \mathbf{p} της εικόνας

 Αν \mathbf{p} είναι pixel υποβάθρου

 Για κάθε ένα από τους 4 γείτονες \mathbf{n} του \mathbf{p}

 Αν $I(\mathbf{n})=k-1$ then $I(\mathbf{p})=I(\mathbf{n})+1$;

 end

 end

 end

end

Κ. Δελήμπασης

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου DT

- εφελ

	1	2	3	4
1	0	255	255	255
2	255	255	255	255
3	255	255	255	255
4	255	255	255	0

Εικόνα I

	1	2	3	4
1	0	1	255	255
2	1	255	255	255
3	255	255	255	1
4	255	255	1	0

Εικόνα I μετά το
1^ο βήμα ($k=1$).

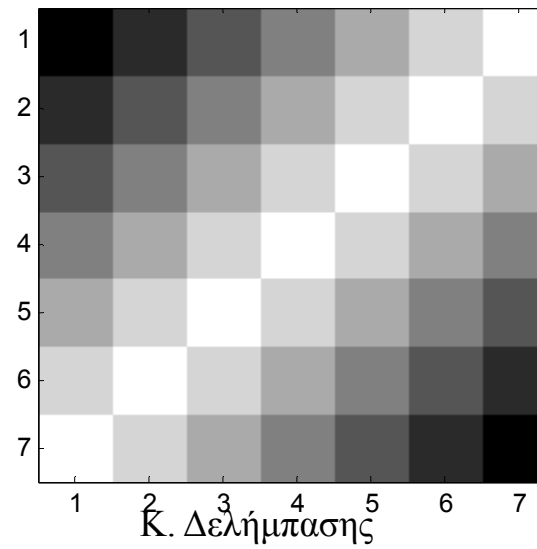
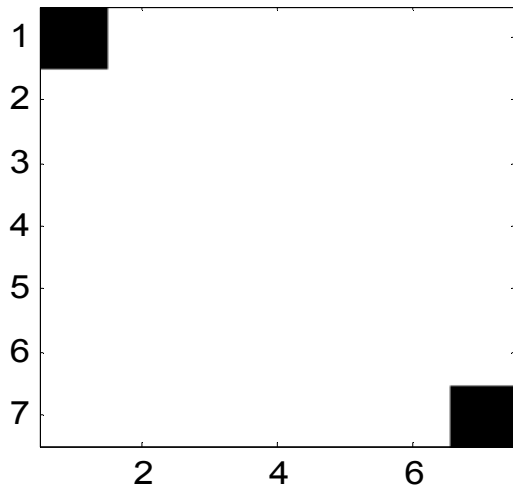
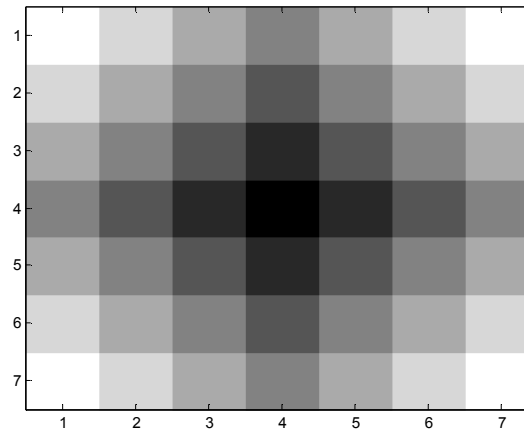
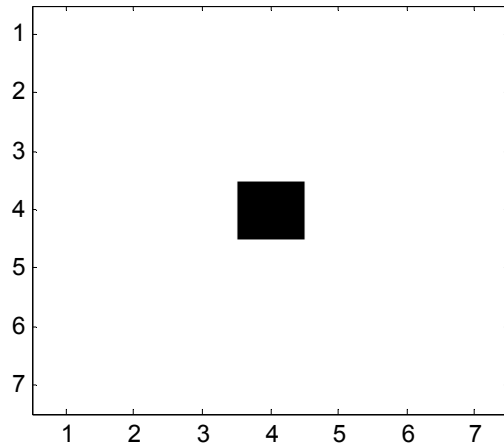
	1	2	3	4
1	0	1	2	255
2	1	2	255	2
3	2	255	2	1
4	255	2	1	0

Εικόνα I μετά το
2^ο βήμα ($k=2$).

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	2	3	2
3	2	3	2	1
4	3	2	1	0

Εικόνα I μετά το
3^ο βήμα ($k=3$).

Εφαρμογή του αλγόριθμου DT

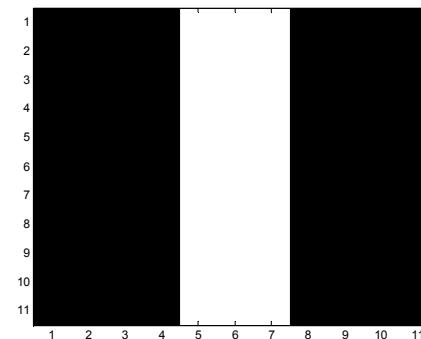
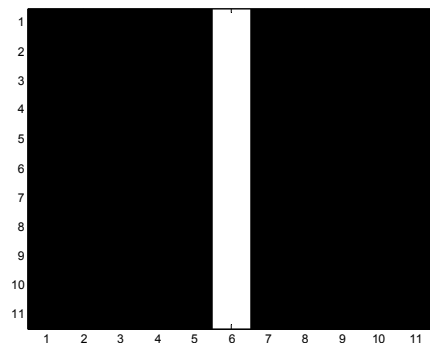


Κ. Δελήμπασης

Μορφολογικοί τελεστές: Διαστολή (Dilation)

- Ορίζουμε το δομικό στοιχείο (structuring element -B) σαν μία δυαδική μάσκα και λαμβάνομε το συμμετρικό του ως προς το κεντρικό του pixel. \hat{B}_z
- Το αποτέλεσμα του Dilation της δυαδικής εικόνας A με το B είναι μία δυαδική εικόνα της οποίας κάθε pixel p έχει τιμή 1, αν και μόνο αν: το κεντρικό pixel του συμμετρικού (ως προς το κεντρικό pixel) B τοποθετηθεί στο p και ένα τουλάχιστον από τα επικαλυπτόμενα pixels έχει τιμή 1 τόσο στο συμμετρικό SE, όσο και στην δυαδική εικόνα.

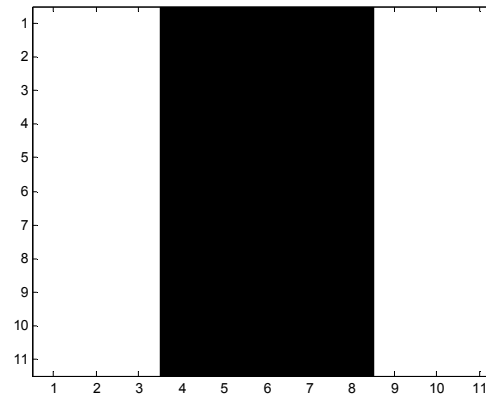
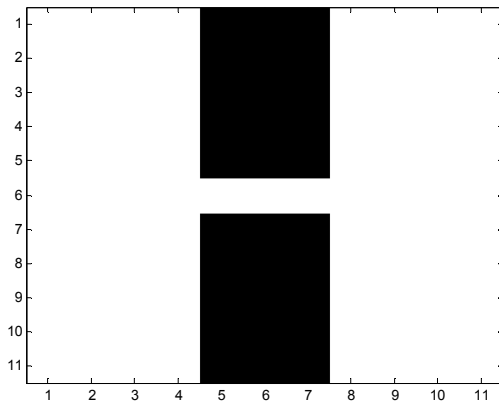
$$A \oplus B = \{z : \hat{B}_z \cap A \neq \emptyset\}$$



Μορφολογικοί τελεστές: Διάβρωση (Erosion)

- Ορίζουμε το δομικό στοιχείο (structuring element -B) σαν μία δυαδική μάσκα και **δεν** λαμβάνουμε το συμμετρικό του ως προς το κεντρικό του pixel.
- Το αποτέλεσμα του Dilation της δυαδικής εικόνας A με το B είναι μία δυαδική εικόνα της οποίας κάθε pixel p έχει τιμή 1, αν και μόνο αν: το κεντρικό pixel του B τοποθετηθεί στο p και όλα τα μη μηδενικά pixels του B_p βρίσκονται σε επικαλυπτόμενα pixels μη μηδενικά pixels της δυαδικής εικόνας A.

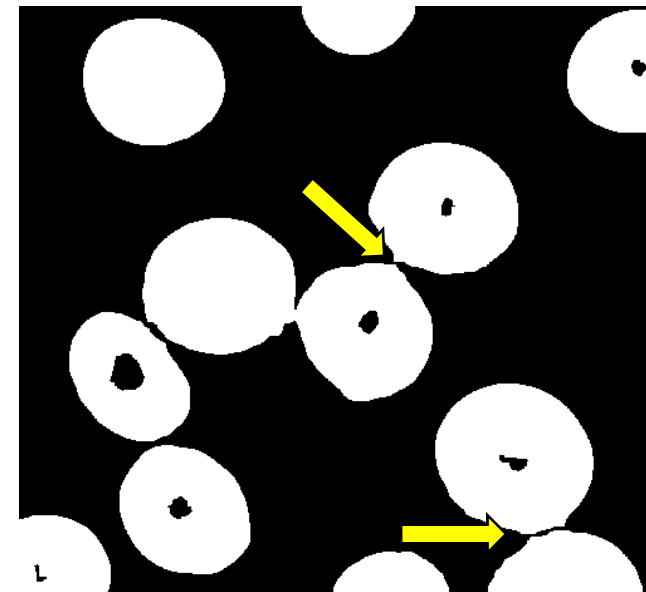
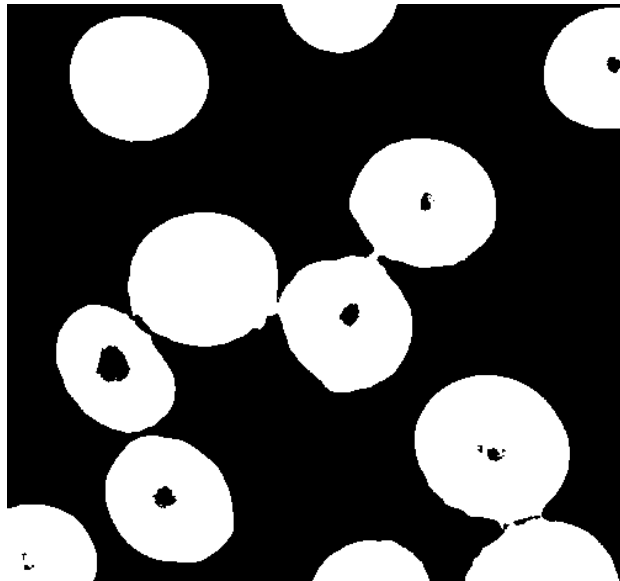
$$A \boxplus B = \{p : B_p \subseteq A\}$$



Κ. Δελήμπασης

Συνδυασμός Μορφολογικών τελεστών: Ανοιγμα (opening) – Κλείσιμο (closing) εικόνας

- Εστω εικόνα I και δομικό στοιχείο B . Ορίζονται οι ακόλουθοι τελεστές:
 - Κλείσιμο εικόνας: $I_1 = (I \oplus B) \sqcap B$
 - Ανοιγμα εικόνας: $I_1 = (I \sqcap B) \oplus B$

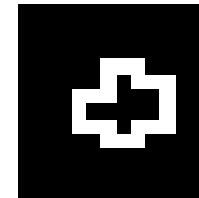


Μορφολογικός αλγόριθμος εξαγωγής περιγράμματος

Είσοδος: I δυαδική εικόνα με συμπαγή περιοχή μη μηδενικών pixel (8-connected)

Εξοδος: I δυαδική εικόνα με επισημασμένα τα pixel του περιγράμματος της περιοχής

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$I = I - (I \square B)$$



Αλγόριθμος Μορφολογικό γέμισμα περιοχής (region filling)

Είσοδος: I δυαδική εικόνα με **κλειστό περίγραμμα** (8-connected)

Συνταταγμένες σημείου p εντός περιγράμματος

Εξοδος: I δυαδική εικόνα με επισημασμένα τα pixel εντός του περιγράμματος

k=0

X_0 : δυαδική εικόνα $X_0(q) = \begin{cases} 1 & q = p \\ 0 & q \neq p \end{cases}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

While $X_k \neq X_{k-1}$

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I^c$$

k=k+1

end

$$I = X_k \cup I$$

Παράδειγμα μορφολογικού γεμίσματος περιοχής

- Εστω η αρχική εικόνα I και ένα αρχικό pixel εντός του περιγράμματος (επισημαίνεται με το βέλος). Η εξέλιξη του αλγόριθμου του μορφολογικού γεμίσματος περιοχής είναι η ακόλουθη:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0
4	0	1	1	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Αρχική εικόνα I

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	0	1	0

Δομικό στοιχείο B

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Εικόνα X0

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Διαστολή της X0 με το B

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

X1=τομή της (Διαστολή της X0 με το B) με την I^c

Συμπλήρωμα αρχικής εικόνας I^c

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	0	1	0

Δομικό στοιχείο B

Κ. Δελήμπασης

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Διαστολή της X1 με το B

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

X2=τομή της (Διαστολή της X1 με το B) με την I^c

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Διαστολή της X2 με το B

Συμπλήρωμα αρχικής εικόνας I^c

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	0	1	0

Δομικό στοιχείο B

Κ. Δελήμπασης

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

X2=τομή της (Διαστολή της X1 με το B) με την I^c

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	1	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Ενωση της X2 με την I.

Συμπλήρωμα αρχικής εικόνας I^c

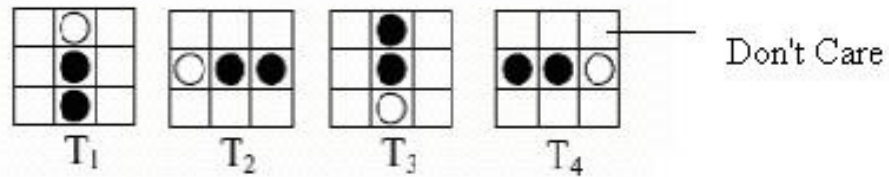
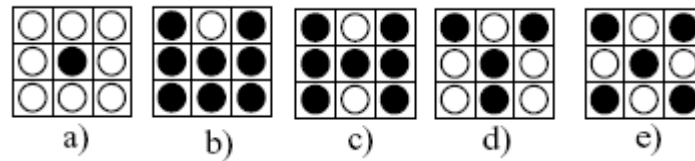
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

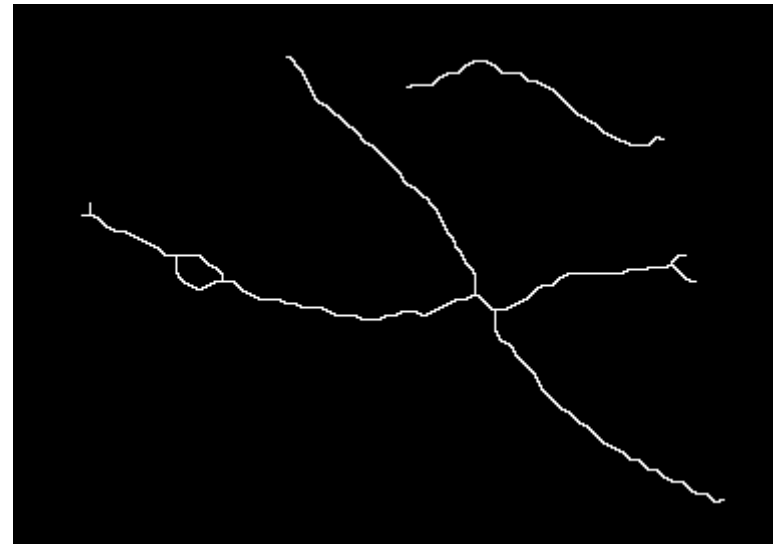
Αρχική εικόνα I

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0
4	0	1	1	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Κ. Δελήμπασης

Λέπτυνση – Εξαγωγή κεντρικού άξονα Thinning





Κ. Δελήμπασης

Απαρίθμηση αντικειμένων – Component labelling

- *Είσοδος*: δυαδική εικόνα I
- *Εξοδος*: εικόνα L με διαστάσεις ίσες με την είσοδο και τιμές $[0,n]$, 0: υπόβαθρο, n : πλήθος μη συνεδμεμένων στοιχείων

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	1	1	0
3	0	1	0	0	0	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	1	0	0
7	0	1	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Είσοδος αλγορίθμου

	1	2	3
1	0	p2	0
2	p1	p0	0
3	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	2	2	0
3	0	1	0	0	0	2	2	0
4	0	1	1	1	0	2	2	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	3	0	0	0	4	0	0
7	0	3	0	0	4	4	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Εξοδος αλγορίθμου

- Μεταβλητές
 - I: binary image
 - L: label image
 - Equiv_table: πίνακας ισοδυναμίας label
- Ο αλγόριθμος εκτελείται σε 2 περάσματα:
 - Σε κάθε τρέχον pixel ελέγχονται τα pixel που έχουν ήδη επεξεργαστεί.
 - Αν όλα έχουν Label=0, τότε
 - Αν έχουν κοινό Label>0 τότε
 - Αν έχουν διαφορετικά Label>0 τότε

```

current_label=0
for each pixel p of I
  if  $I(\mathbf{p}) \neq 0$ 
    if  $L(p_1) == 0$  AND  $L(p_2) == 0$ 
      current_label= current_label+1
       $L(p) = \text{current\_label}$ 
    else if  $L(p_1) == L(p_2)$  AND  $L(p_1) > 0$ 
      current_label=current_label+1
       $L(p) = \text{current\_label}$ 
    else if  $L(p_1) > 0$  AND  $L(p_2) > 0$  AND  $L(p_1) \neq L(p_2)$ 
       $L(p) = \min(L(p_1), L(p_2))$ 
       $\text{equiv\_table}(L(p_1), L(p_2)) = 1$ 
    end
  end
end
end

```

Παράδειγμα εφαρμογής Component labelling

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	1	1	1
3	0	0	0	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	1	0	0	0	1
6	0	1	1	1	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Αρχική δυαδική εικόνα

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	2	2	2
3	0	0	0	1	0	0	0	2
4	0	3	3	1	0	4	4	2
5	0	0	0	1	0	0	0	2
6	0	5	5	1	0	6	6	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Component labelling
(πρώτο πέρασμα)

- Παρατηρούμε ότι το label 1 είναι ισοδύναμο με το 3 και το label 3 είναι ισοδύναμο με το label 5. Ομοίως το label 2 είναι ισοδύναμο με το 4 και το label 4 είναι ισοδύναμο με το label 6. Ο πίνακας ισοδυναμίας A έχει την ακόλουθη μορφή:

		Label					
		1	2	3	4	5	6
Label	1	1	0	1	0	0	0
	2	0	1	0	1	0	0
	3	0	0	1	0	1	0
	4	0	0	0	1	0	1
	5	0	0	0	0	1	0
	6	0	0	0	0	0	1

Κ. Δελήμπασης

- Ο πίνακας A^*A υπολογίζει το κάθε χρώμα με ποια label είναι ισοδύναμο με έως και 2 βήματα ισοδυναμίας. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται ότι το label 1 είναι απευθείας ισοδύναμο με το label 5 και επίσης ισοδύναμο με το label 3 με 2 βήματα (μεσω του label 5).
- Γενικά ο A^n δείχνει αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ 3 label μέσω n βημάτων.

		Label					
		1	2	3	4	5	6
Label	1	1	0	2	0	1	0
	2	0	1	0	2	0	1
	3	0	0	1	0	2	0
	4	0	0	0	1	0	2
	5	0	0	0	0	1	0
	6	0	0	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	2	2	2
3	0	0	0	1	0	0	0	2
4	0	1	1	1	0	2	2	2
5	0	0	0	1	0	0	0	2
6	0	1	1	1	0	2	2	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Component labelling (2^ο πέρασμα) μετά την εφαρμογή του πίνακα ισοδυναμίας

Κ. Δελήμπασης

Μορφολογικός αλγόριθμος ανεύρεσης αντικειμένου σε δυαδική εικόνα (Hit and Miss)

Εισοδος: I δυαδική εικόνα με πολλά αντικείμενα (τιμή pixel αντικειμένου 1, τιμή υποβάθρου 0)

Εξοδος: I δυαδική εικόνα με επισημασμένα το pixel θέσης του αντικειμένου

Εστω B1 το δομικό στοιχείο που ταυτίζεται με το αντικείμενο που αναζητούμε. Εστω B2 το δομικό στοιχείο που είναι τουλάχιστον 2 pixel μεγαλύτερης διάστασης από το B1 και το περίγραμμά του έχει τιμή 1 ενώ το εσωτερικό του έχει τιμή 0.

Αν πχ αναζητούμε τη θέση ενός τετράγωνου αντικειμένου 3x3, τότε

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Κ. Δελήμπασης

- Ο μετασχηματισμός Hit and Miss εντοπίζει τη θέση του ζητούμενου αντικειμένου κάνοντας διάβρωση της I με το B_1 , διάβρωση της I^c με το B_2 και υπολογίζοντας την τομή των δύο αποτελεσμάτων.
(Θυμηθείτε ότι η τομή δύο δυαδικών εικόνων υπολογίζεται ως ο λογικός τελεστής ΚΑΙ pixel προς pixel.

$$I_1 = (I \square B_1) \cap (I^c \square B_2)$$

Παράδειγμα εφαρμογής Hit and Miss

- Εστω η εικόνα I στην οποία αναζητούμε τετράγωνο 3×3 αποτελούμενο από τιμές $=1$.

Αρχική εικόνα I										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
5	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
8	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
9	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
10	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Δομικό στοιχείο B_1		
1	1	1
1	1	1
1	1	1

Δομικό στοιχείο B_2				
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Αντίθετο της I, I^c										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
4	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Διάβρωση της I με το B_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Διάβρωση της I^c με το B_2										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(Διάβρωση της I με το B_1) τομή (Διάβρωση της I^c με το B_2)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κ. Δελήμπασης

Εξαγωγή διατεταγμένου περιγράμματος (contour tracing)

- Εστω δυαδική εικόνα I , η οποία περιέχει αντικείμενο τα pixel του οποίου έχουν τιμή 1 (ενώ του υποβάθρου έχουν τιμή 0).
- Αναζητούνται τα pixel που περικλείουν το αντικείμενο σε μορφή διατεταγμένου περιγράμματος.
- Ο όρος διατεταγμένο περίγραμμα αναφέρεται σε ακολουθία pixel με σειρά που τηρεί τη γειτονεία τους στην εικόνα I . Ετσι είναι δυνατός ο υπολογισμός κάθετων διανυσμάτων και άλλων γεωμετρικών χαρακτηριστικών του περιγράμματος.
- Παρατηρείστε ότι ο Μορφολογικός αλγόριθμος εξαγωγής περιγράμματος που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη διαφάνεια παράγει ως έξοδο τα pixel του περιγράμματος αλλά όχι διατεταγμένα.
- Θα περιγραφεί ο αλγόριθμος εξαγωγής περιγράμματος Teo Pavlidis (*Algorithms for Graphics and Image Processing*, 1982 Κεφ. 7).

Βασικές αρχές του αλγόριθμου του Pavlidi εξαγωγής διατεταγμένου περιγράμματος

- Είσοδος: δυαδική εικόνα
- Εξοδος: διατεταγμένο περίγραμμα
- Ο αλγόριθμος θεωρεί μία γραφίδα η οποία κινείται στα pixel της εικόνας και θέτει σε αυτά την τιμή 1 ή 0 ανάλογα αν αυτά ανήκουν ή όχι στο περίγραμμα.
- Αρχικοποίηση της θέσης της γραφίδας: ένα pixel p του αντικειμένου (τιμή 1) στα αριστερά του οποίου υπάρχει pixel του υποβάθρου (τιμή 0).
- Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μία μεταβλητή για να καθορίζει την «κατεύθυνση» την οποία έχει η γραφίδα. Ορίζουμε 4 κατευθύνσεις:
 - $K=1$: η γραφίδα βρίσκεται στο $p=(i,j)$ και «κοιτάζει» στο $(i-1,j)$
 - $K=2$: η γραφίδα βρίσκεται στο $p=(i,j)$ και «κοιτάζει» στο $(i,j+1)$
 - $K=3$: η γραφίδα βρίσκεται στο $p=(i,j)$ και «κοιτάζει» στο $(i+1,j)$
 - $K=4$: η γραφίδα βρίσκεται στο $p=(i,j)$ και «κοιτάζει» στο $(i,j-1)$

- Για κάθε τρέχον pixel p στο οποίο βρίσκεται η γραφίδα, ο αλγόριθμος ελέγχει τα εξής τρία pixel:
 - το pixel $p1$ που βρίσκεται μπροστά και αριστερά από τη γραφίδα
 - το pixel $p2$ που βρίσκεται μπροστά από τη γραφίδα και
 - το pixel $p3$ που βρίσκεται μπροστά και δεξιά από τη γραφίδα

p1	p2	p3
	p	

Κατεύθυνση $K=1$

		p1
	p	p2
		p3

Κατεύθυνση $K=2$

	p	
p3	p2	p1

Κατεύθυνση $K=3$

p3		
p2	p	
p1		

Κατεύθυνση $K=4$

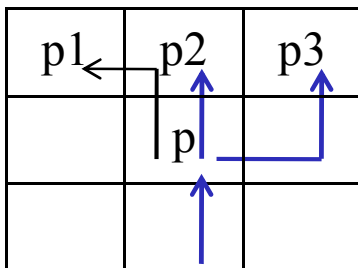
1. Αποθήκευσε το τρέχον pixel p .
2. IF $I(p1) == 1$
 1. $p = p1$
 2. ενημέρωσε την μεταβλητή K (κατεύθυνση)
3. ELSEIF $I(p2) == 1$
 1. $p = p2$
 2. % Η μεταβλητή K (κατεύθυνση) δεν αλλάζει
4. ELSEIF $I(p3) == 1$
 1. $p = p3$
 2. % Η μεταβλητή K (κατεύθυνση) δεν αλλάζει
5. ELSE % δηλ αν και τα 3 pixel $p1, p2, p3$ είναι 0
 1. $K = K + 1$ % περιστροφή 90° κατεύθυνσης clockwise
6. END

Συνθήκη τερματισμού του αλγόριθμου: αν η γραφίδα συναντήσει το αρχικό pixel στο οποίο αρχικοποιήθηκε η θέση της γραφίδας, ή αν το αρχικό pixel δεν έχει μη μηδενικούς γείτονες (είναι απομονωμένο).

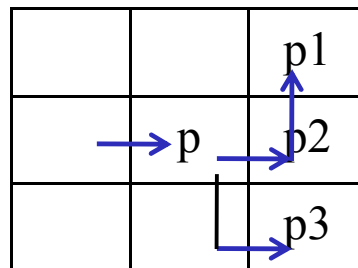
Κ. Δελήμπασης

Η ενημέρωση της μεταβλητής K (γραμμές 1.2, 2.2, 3.2) γίνεται ως εξής:

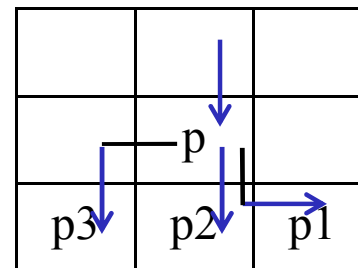
Αρχική Κατεύθυνση K	Νέα Κατεύθυνση K μετά την ενημέρωση του τρέχοντος pixel p σε:		
	$p1$	$p2$	$p3$
1	4	1	1
2	1	2	2
3	2	3	3
4	3	4	4



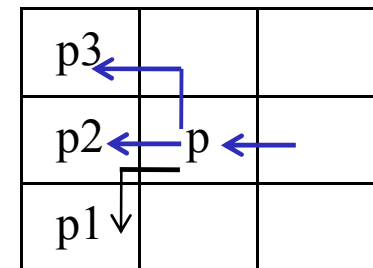
Κατεύθυνση $K=1$



Κατεύθυνση $K=2$

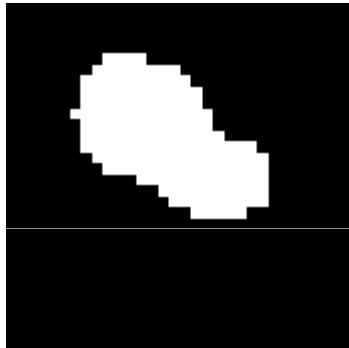


Κατεύθυνση $K=3$

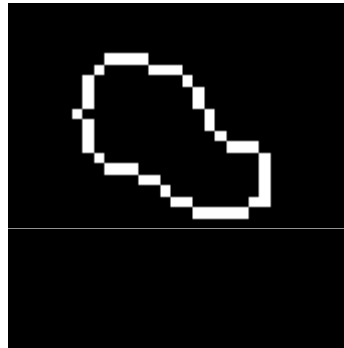


Κατεύθυνση $K=4$

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου εξαγωγής διατεταγμένου περιγράμματος



Αρχική εικόνα



Pixels περιγράμματος

Γραμμή / στήλη Pixels
διατεταγμένου περιγράμματος

18	20	10	6	24	15
17	19	10	6	24	15
16	19	11	6	24	16
15	18	12	6	24	17
14	17	13	6	24	18
13	17	14	7	24	19
12	16	15	7	24	19
11	16	16	7	23	19
10	16	17	8	22	20
9	15	18	9	22	20
8	14	18	9	21	20
8	14	18	10	20	20
8	13	19	11	19	20
8	12	19	11		
7	11	19	12		
7	11	20	13		
8	10	21	14		
8	9	22	14		
8	8	23	14		
9	7				

(8,4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=1
Επιλογή αρχικού σημείου

(8,4)
(7,4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=1

(8,4)
(7,4)
(6,4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=1

(8,4)
(7,4)
(6,4)
(5,3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=4
Απομονωμένο σημείο

(8,4)
(7,4)
(6,4)
(5,3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=1
Απομονωμένο σημείο

- συνδξ

(8,4)
(7,4)
(6,4)
(5,3)
(5,4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=2

- συνδξ

(8,4)
(7,4)
(6,4)
(5,3)
(5,4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=2

- συνδξ

(8,4)
(7,4)
(6,4)
(5,3)
(5,4)
(5,5)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Κατεύθυνση=1

Μορφολογικός αλγόριθμος: Λέπτυνση (Thinning)

Εισοδος: I δυαδική εικόνα με πολλά αντικείμενα (τιμή pixel αντικειμένου 1, τιμή υποβάθρου 0)

Εξοδος: I δυαδική εικόνα με επισημασμένα τα pixel θέσης του αντικειμένου

```
c=0
```

```
while c>0
```

```
    find pixels p: that satisfy condition_1
```

```
    I(p)=0
```

```
    c=number of {p}
```

```
    if c==0 break
```

```
    else
```

```
        find pixels p: that satisfy condition_2
```

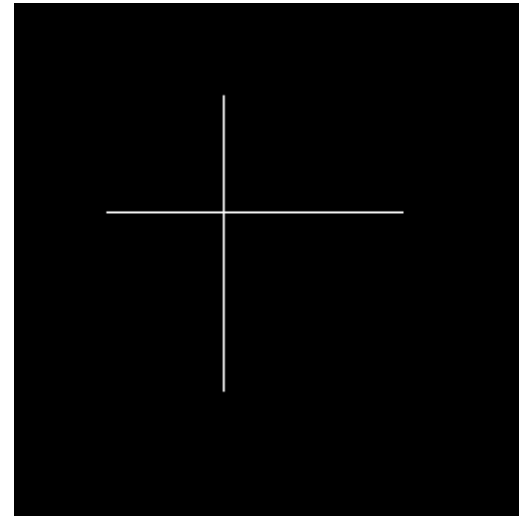
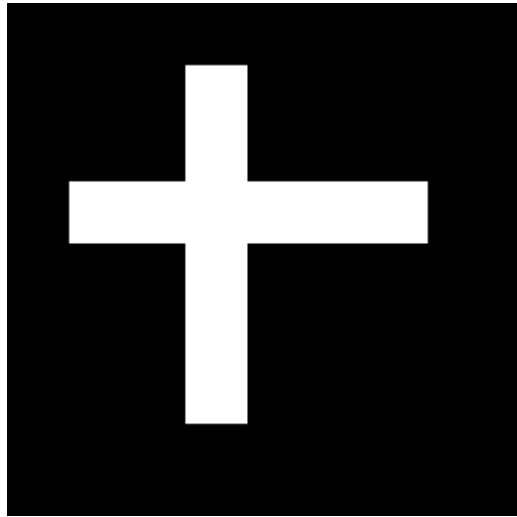
```
        I(p)=0
```

```
        c=number of {p}
```

```
end
```

Κ. Δελήμπασης

- **Condition_1** for current pixel p :
 1. p has from 2 to 6 neighbours with value 1
 2. $I(p)=1$
 3. Transversing the 8- neighbours of p there is only 1 $0 \rightarrow 1$ value transition
 4. At least one of the North, East and South neighbours of p has 0 value
 5. At least one of the East, South and West neighbours of p has 0 value
- **Condition_2** for current pixel p :
 - Conditions 1, 2 and 3 same
 - 1. At least one of the North, East and West neighbours of p has 0 value
 - 2. At least one of the North, South and West neighbours of p has 0 value



Παράδειγμα μετασχηματισμού λέπτυνσης

Κ. Δελήμπασης

Τμηματοποίηση εικόνας - *Segmentation*

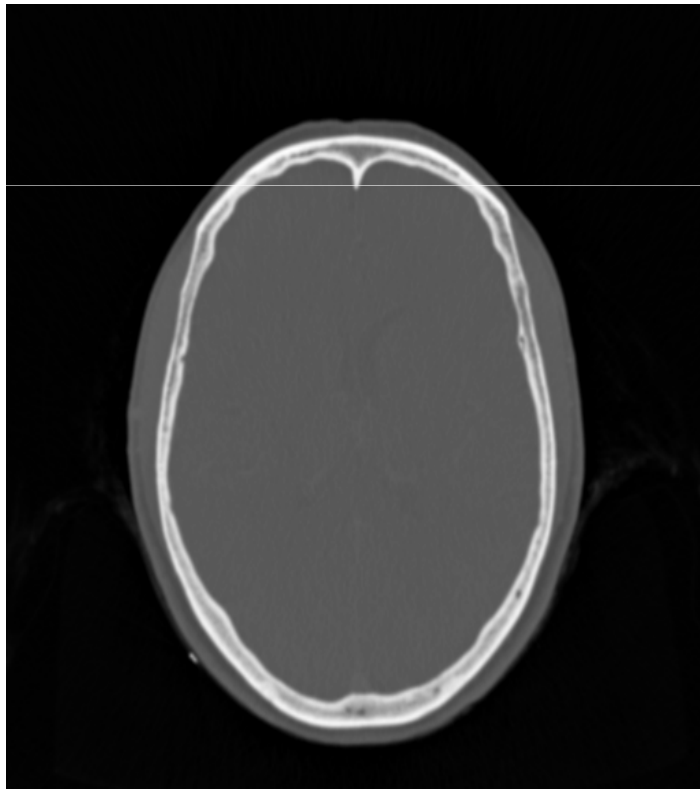
- Τμηματοποίηση: ανεύρεση του αντικειμένου ενδιαφέροντος
- Πρόβλημα άλυτο στη γενική του μορφή λόγω:
 - ποικιλίας αντικειμένων
 - διαφορετικές συνθήκες φωτεινότητας - αντίθεσης
 - σχετικής γεωμετρίας αντικειμένου - ανιχνευτή

Τμηματοποίηση με ολική κατωφλίωση – *total thresholding*

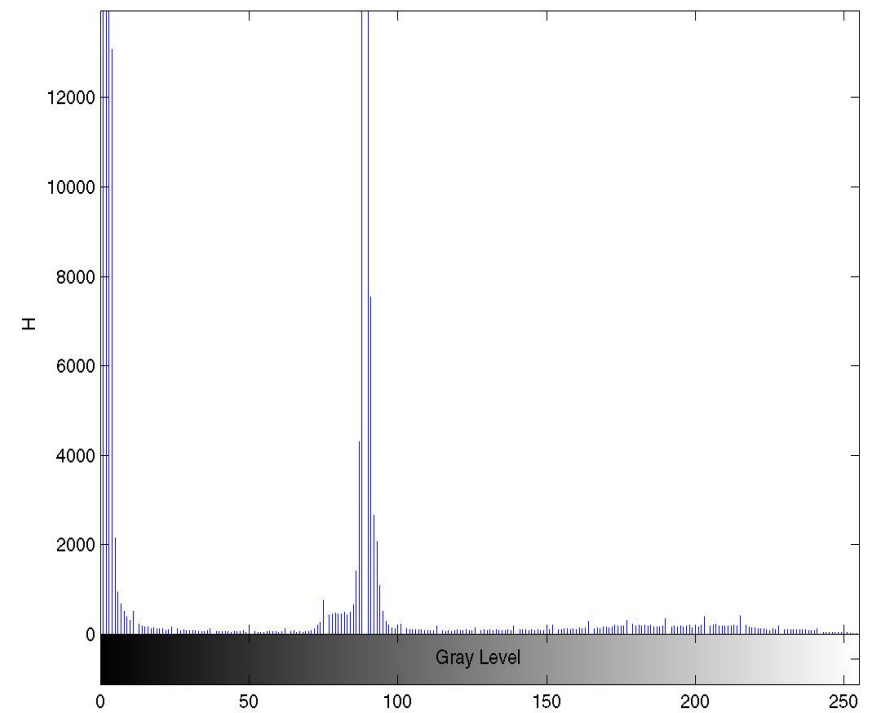
- Η μέθοδος βασίζεται στην ύπαρξη 2 κλάσεων pixels με διαφορετικές τιμές που κατανέμονται γύρω από διαφορετικές μέσες τιμές.
- Επιλέγεται κατώφλι (threshold) T και εφαρμόζεται κατωφλίωση (thresholding):
 - Για κάθε pixel (i,j) ελέγχεται η τιμή του
 - Αν είναι $I(i,j) \geq T$, τότε θεωρείται ότι ανήκει στο αντικείμενο A , αλλιώς στα άλλα αντικείμενα της εικόνας ή το υπόβαθρο (background).

Τμηματοποίηση Ιατρικών Εικόνων

■ Παράδειγμα ολικής Κατωφλίωσης



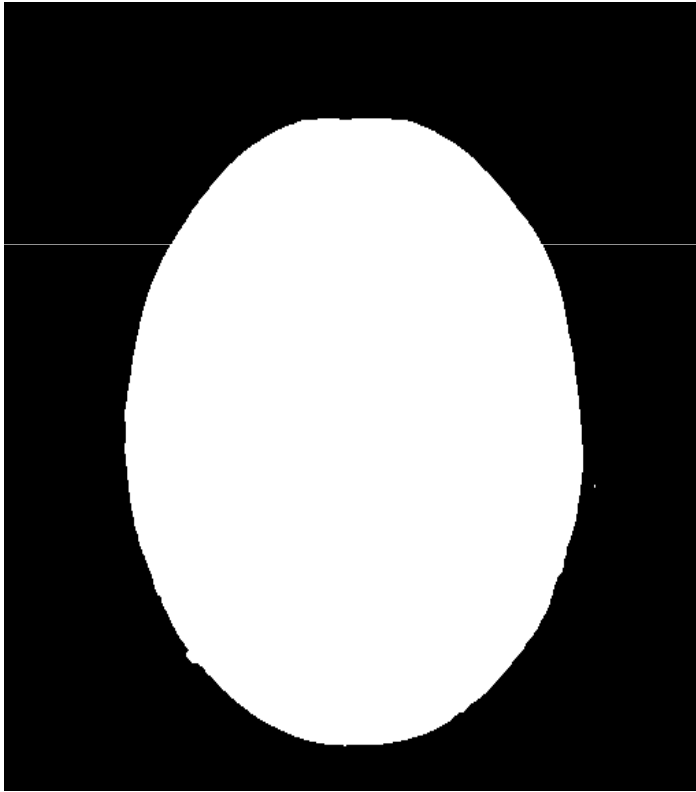
151



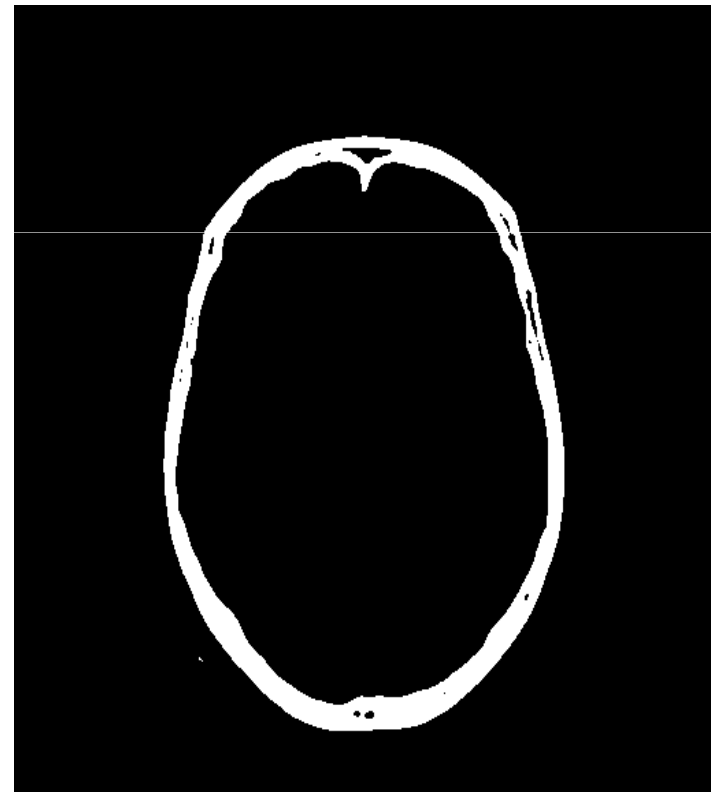
Κ. Δελήμπασης

Τμηματοποίηση Ιατρικών Εικόνων

■ Παράδειγμα Κατωφλίωσης



Κατώφλι 35

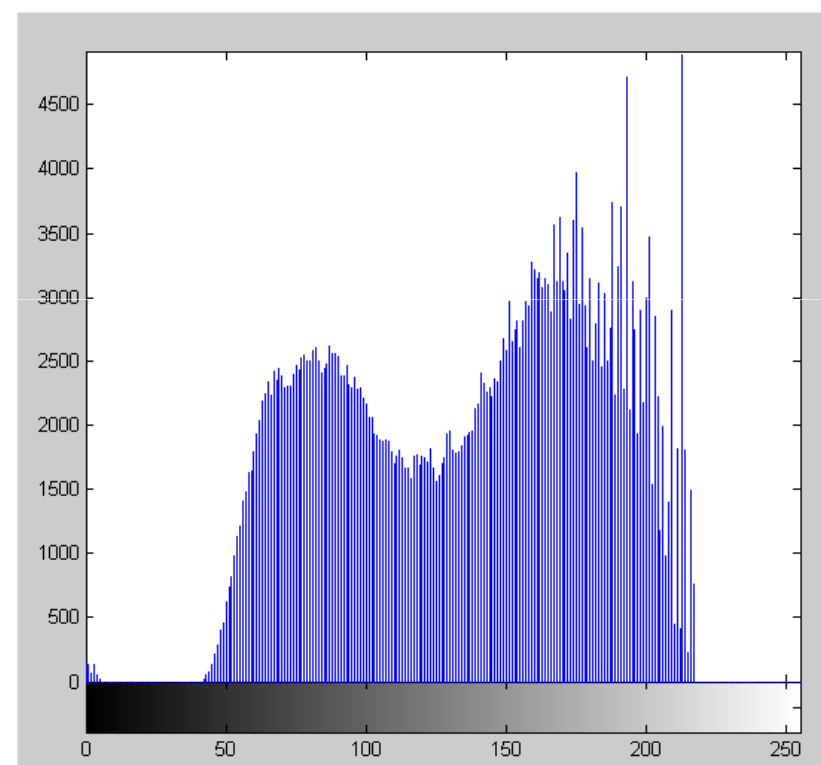


Κατώφλι 135
Κ. Δελήμπασης

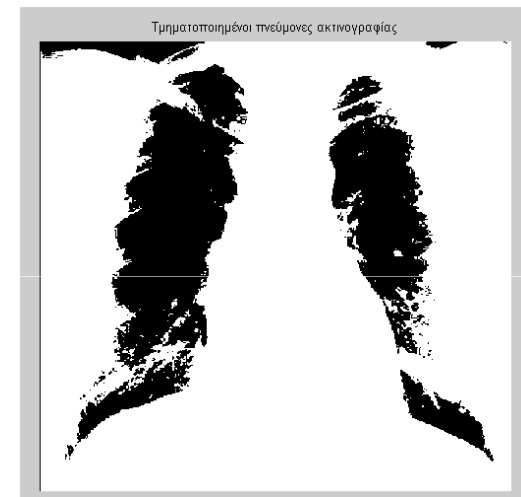
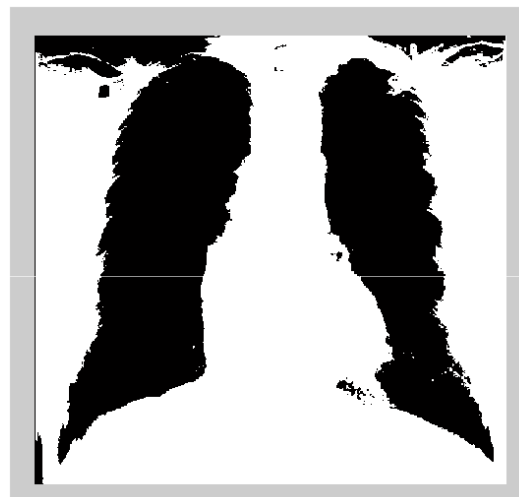
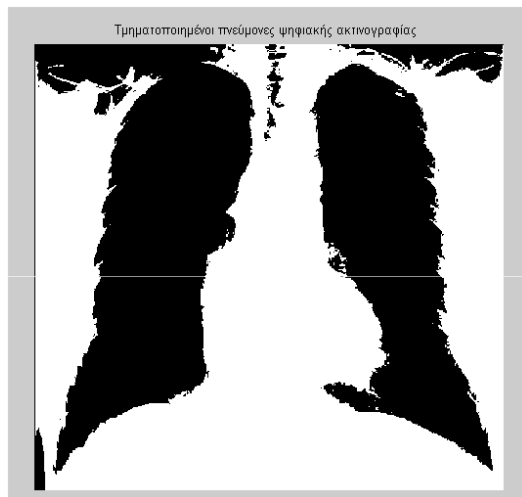
Παράδειγμα εικόνας με δύο κατανομές pixel: αντικείμενο (πνεύμονες) και υπόβαθρο



Αρχική εικόνα



Ιστόγραμμα



Ολική Κατωφλίωση της προηγούμενης εικόνας και εξαγωγή του αντικειμένου ενδιαφέροντος (πνεύμονες) για τρεις διαφορετικές φθίνουσες τιμές του ολικού κατωφλίου.

Τμηματοποίηση με Κατωφλίωση: Η μέθοδος Ridler Calvard

- Επιλέγεται ως κατώφλι η μέση τιμή της εικόνας I .
- Επανάλαβε
 - Υπολογίζονται οι μέσες τιμές μ_0 και μ_1 των 2 κλάσεων pixel που δημιουργούνται από το κατώφλι.
 - Ενημερώνεται η τιμή του κατωφλίου:

$$\tau = \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1)$$

- Όσο η τιμή του κατωφλίου είναι διάφορη της προηγούμενης τιμής κατωφλίου

Τμηματοποίηση με την μέθοδο Ridler Calvard: Επανάληψη 1

Τρέχον κατόφλι	3.5625
Μέση τιμή pixels > Τρέχον κατόφλι	6.667
Μέση τιμή pixels ≤ Τρέχον κατόφλι	1.7
Νέο κατόφλι	4.1833

1	2	3	1
4	6	8	2
1	8	10	2
4	1	3	1

Τμηματοποίηση με την μέθοδο Ridler Calvard: Επανάληψη 2

Τρέχον κατόφλι	4.1833
Μέση τιμή pixels > Τρέχον κατόφλι	8
Μέση τιμή pixels ≤ Τρέχον κατόφλι	2.083
Νέο κατόφλι	5.0417

1	2	3	1
4	6	8	2
1	8	10	2
4	1	3	1

Τμηματοποίηση με την μέθοδο Ridler Calvard: Επανάληψη 3

Τρέχον κατόφλι	5.0417
Μέση τιμή pixels > Τρέχον κατόφλι	8
Μέση τιμή pixels ≤ Τρέχον κατόφλι	2.083
Νέο κατόφλι	5.0417

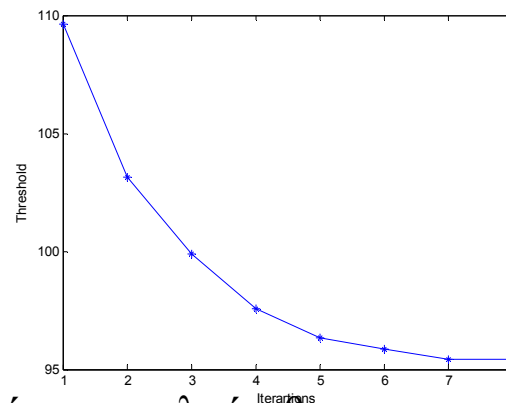
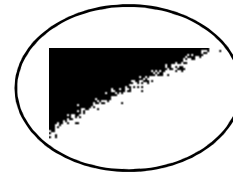
1	2	3	1
4	6	8	2
1	8	10	2
4	1	3	1

Τμηματοποίηση με την μέθοδο Ridler Calvard: Επανάληψη 3

Τρέχον κατόφλι	5.0417
Μέση τιμή pixels > Τρέχον κατόφλι	8
Μέση τιμή pixels ≤ Τρέχον κατόφλι	2.083
Νέο κατόφλι	5.0417

1	2	3	1
4	6	8	2
1	8	10	2
4	1	3	1

Παρατηρείστε ότι ο ουρανός δεν έχει τμηματοποιηθεί σωστά.



Εφαρμογή του προηγούμενου αλγόριθμου και η εξέλιξη της αριθμητικής τιμής του κατωφλίου σε συνάρτηση των επαναλήψεων.

Κ. Δελήμπασης

Τμηματοποίηση με Κατωφλίωση: Η μέθοδος Otsu

- Εστω εικόνα με L δυνατές τιμές, ιστόγραμμα n και κανονικοποιημένο ιστόγραμμα p .
- Η εικόνα περιέχει δύο κατανομές pixel που αντιστοιχούν στο αντικείμενο προς τμηματοποίηση και στο υπόβαθρο. Οι δύο κατανομές C_0, C_1 χωρίζονται από ένα κατώφλι k .

Πιθανότητα να ανήκει ένα pixel στις κλάσεις C_0, C_1 :

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^k p_i = \omega(k), \omega_1 = \sum_{i=k+1}^L p_i = 1 - \omega(k)$$

Μέση τιμή των pixel των κλάσεων C_0, C_1 :

$$\mu_0 = \frac{1}{\omega_0} \sum_{i=1}^k ip_i = \frac{\mu(k)}{\omega(k)}, \mu_1 = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=k+1}^L ip_i = \frac{\mu_L - \mu(k)}{1 - \omega(k)}$$

Διασπορά των pixel των κλάσεων C_0, C_1 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\omega_0} \sum_{i=1}^k (i - \mu_0)^2 p_i,$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=k+1}^L (i - \mu_1)^2 p_i$$

- Αθροισμα της διασποράς των δύο κλάσεων (ξεχωριστά)

$$\sigma_w = \omega_0 \sigma_0^2 + \omega_1 \sigma_1^2$$

- Διασπορά μεταξύ των δύο κλάσεων

$$\sigma_B^2 = \omega_0 (\mu_0 - \mu_T)^2 + \omega_1 (\mu_1 - \mu_T)^2 = \omega_0 \omega_1 (\mu_1 - \mu_0)^2$$

- Ως κατόφλι επιλέγεται η τιμή του k που μεγιστοποιεί την ποσότητα σ_B^2 .

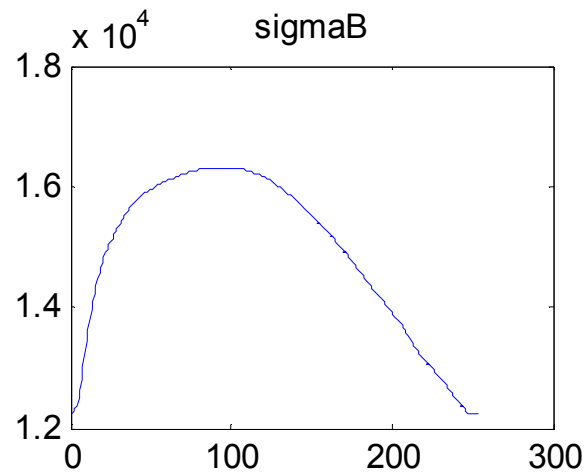
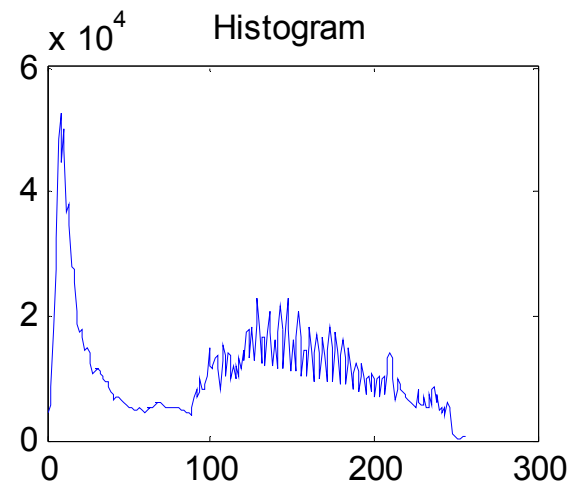
Παράδειγμα εκτέλεσης της μεθόδου Otsu

Τιμή	ω_0	ω_1	μ_0	μ_1	σ_B
1	0.3125	0.6875	1.0000	4.7273	2.9847
2	0.5000	0.5000	1.3750	5.7500	4.7852
3	0.6250	0.3750	1.7000	6.6667	5.7815
4	0.7500	0.2500	2.0833	8.0000	6.5638
5	0.7500	0.2500	2.0833	8.0000	6.5638
6	0.8125	0.1875	2.3846	8.6667	6.0121
7	0.8125	0.1875	2.3846	8.6667	6.0121
8	0.9375	0.0625	3.1333	10.000	2.7628
9	0.9375	0.0625	3.1333	10.000	2.7628

Μέγιστο σ_B για
κατόφλι=4

1	2	3	1
4	6	8	2
1	8	10	2
4	1	3	1

Initial Image



thresholded image



- Παράδειγμα κατωφλίωσης με τη μέθοδο Otsu.

Δυναμικός υπολογισμός κατωφλίου

- Σε περίπτωση που το υπόβαθρο μεταβάλλεται, είναι αδύνατο να βρεθεί ένα κατώφλι που αν εφαρμοστεί σε όλη την εικόνα να τμηματοποιεί το αντικείμενο. Σε αυτή την περίπτωση:
 - Ορίζεται μία περιοχή μεγέθους $(2w+1) \times (2w+1)$.
 - Για κάθε pixel \mathbf{p} της εικόνας
 - Υπολογίζεται το κατώφλι ως συνάρτηση ενός ή περισσότερων στατιστικών μεγεθών των τιμών της εικόνας εντός του τρέχοντος παραθύρου, όπως: μέση τιμή (mean), ενδιάμεση τιμή (median), μέγιστη (max), ελάχιστη τιμή (min), τυπική απόκλιση (σ), υπολογισμένων τοπικά. Ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού του κατωφλίου:

$$T = \frac{\max(R) + \min(R)}{2}$$

$$T = \text{mean}(R) + w\sigma(R)$$

- Αν $I(\mathbf{p}) > T \rightarrow I_1(\mathbf{p}) = 1$ ELSE $I_1(\mathbf{p}) = 0$

- Δυναμική κατωφλίωση με διαφορετικά μεγέθη παραθύρου $(2w+1) \times (2w+1)$.
- Το μέγεθος w πρέπει να είναι ανάλογο του μεγέθους του αντικειμένου που πρέπει να τμηματοποιηθεί.

Αποτέλεσμα κατωφλίωσης με μικρό μέγεθος παραθύρου (w).



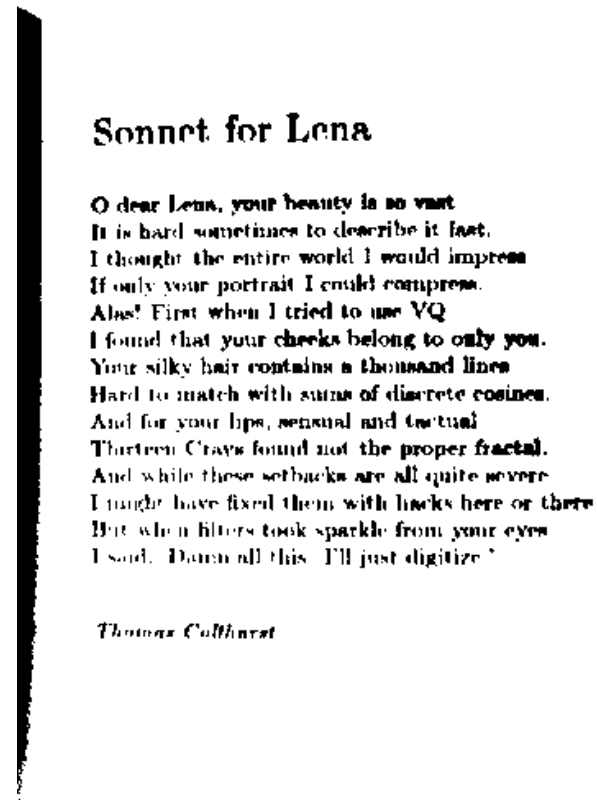
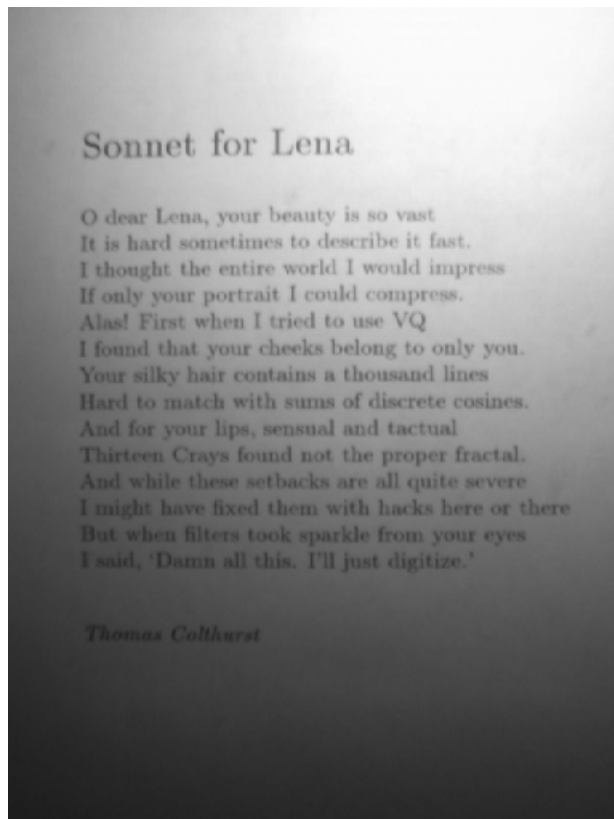
Initial Image



Αποτέλεσμα κατωφλίωσης με κατάλληλο μέγεθος παραθύρου (w). Παρατηρείστε ότι ο ουρανός έχει τμηματοποιηθεί σωστά.



Initial Image



Εφαρμογή δυναμικής κατωφλίωσης σε εικόνα με ανομοιογενή φωτισμό, $w=9$. Η εικόνα αυτή δεν είναι δυνατό να τμηματοποιηθεί με την ίδια αποτελεσματικότητα με ολική κατωφλίωση.

Υπολογισμός Κατωφλίου: $T = \text{mean}(\text{περιοχής}) - \sigma(\text{περιοχής})$

Κ. Δελήμασης

Τμηματοποίηση Ιατρικών Εικόνων

- Μέθοδος ανάπτυξης περιοχών (region growing):
 - Έστω εικόνα $I(x,y)$ και σημείο (x_s,y_s)
 - Στόχος: εύρεση pixels που ανήκουν στην ίδια περιοχή με το (x_s,y_s)
 - Κριτήριο: pixels που ανήκουν στην ίδια περιοχή έχουν παρόμοιο χρώμα

Υλοποίηση της μεθόδου ανάπτυξης περιοχών

Η μέθοδος ανάπτυξης περιοχών τμηματοποιεί ένα αντικείμενο σε μία εικόνα υπό την προϋπόθεση ότι:

Δίδεται ένα pixel εντός του αντικειμένου (x_0, y_0)

Καθορίζεται ένα κριτήριο ομοιότητας των pixel του αντικειμένου

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μία ουρά Q η οποία αρχικοποιείται με το (x_0, y_0) .

- **Αλγόριθμος RGROW**
 - **Είσοδος: I, x0, y0, tolerance**
 - **Εξοδος: BW**
1. $BW = \text{zeros}(\text{size}(I))$
 2. Αρχικοποίησε Q με (x_0, y_0)
 3. Χαρακτήρισε το (x_0, y_0) ως αντικείμενο: $BW(x_0, y_0) = 1$
 4. Αρχικοποίησε τη μεταβλητή μέση_τιμη_αντικειμένου
 5. ΟΣΟ η Q δεν είναι άδεια
 1. Εξαγωγή του 1^{ου} pixel από την Q και ανάθεση των συντεταγμένων του στο τρέχον pixel (x_0, y_0)
 2. Ενημέρωση της μεταβλητής μέση_τιμή_αντικειμένου
 3. ΓΙΑ κάθε γειτονικό pixel **p** του (x_0, y_0)
 1. ΑΝ **p** βρίσκεται εντός της I ΚΑΙ
 $\text{abs}(I(\mathbf{p}) - \text{μέση_τιμη_αντικειμένου}) \leq \text{tolerance}$
ΚΑΙ το $BW(\mathbf{p}) == 0$ ΤΟΤΕ
Τοποθέτησε το **p** στην Q
Χαρακτήρισε το **p** αντικείμενο: $BW(\mathbf{p}) = 1$
- ΤΕΛΟΣ
- ΤΕΛΟΣ
- ΤΕΛΟΣ

- Συνήθως το κριτήριο $F(\mathbf{p})$ ορίζεται ως εξής:
 - Το \mathbf{p} δεν έχει ήδη επιλεγεί και δεν περιέχεται στην ουρά
 - Η τιμή $I(\mathbf{p})$ ικανοποιεί κάποια συνθήκη, όπως μία από τις ακόλουθες:
 - $\text{abs}(I(\mathbf{p})-I(\mathbf{p}_0)) < T$.
 - Η απόλυτη τιμή της διαφοράς του $I(\mathbf{p})$ και της μέσης τιμής των pixel που περιέχονται στην ουρά Q είναι μικρότερη από ένα κατώφλι που είναι ανάλογο της τυπικής απόκλισης των τιμών της Q .

Q στήλη	Q γραμμή

Μέση τιμή pixel αντικειμένου

0

Πλήθος pixel αντικειμένου

0

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
4	4

Μέση τιμή pixel αντικειμένου
9

Πλήθος pixel αντικειμένου
1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
4	4
3	4
4	5
4	3
5	4

Μέση τιμή pixel αντικειμένου
9

Πλήθος pixel αντικειμένου
1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,5

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,33

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,25

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,40

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,1667

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

6

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2
2	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,2857

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

7

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2
2	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**
9,125

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**
8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2
2	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,66

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

9

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2
2	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**
9,66

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**
10

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

Q στήλη	Q γραμμή
3	4
4	5
4	3
5	4
3	3
3	5
5	5
5	3
4	2
2	5

**Μέση τιμή pixel
αντικειμένου**

9,66

**Πλήθος pixel
αντικειμένου**

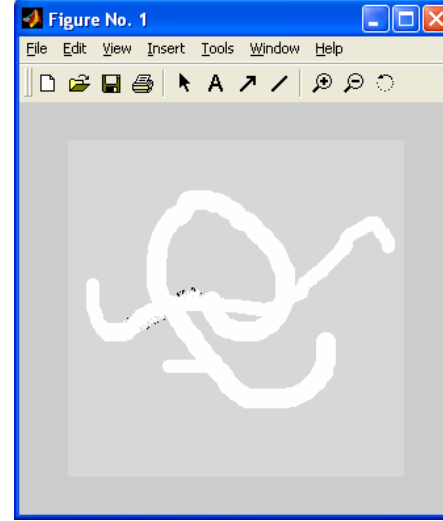
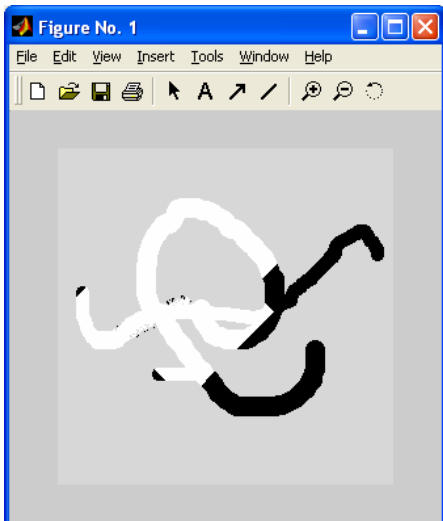
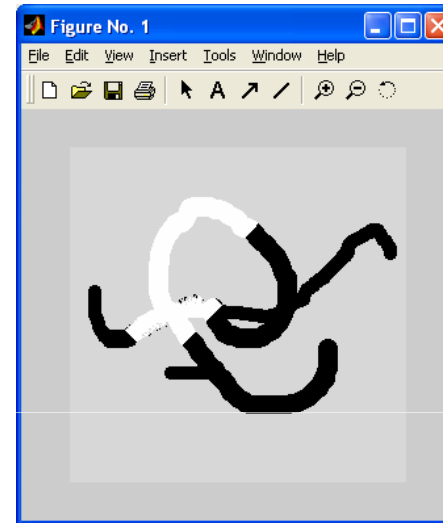
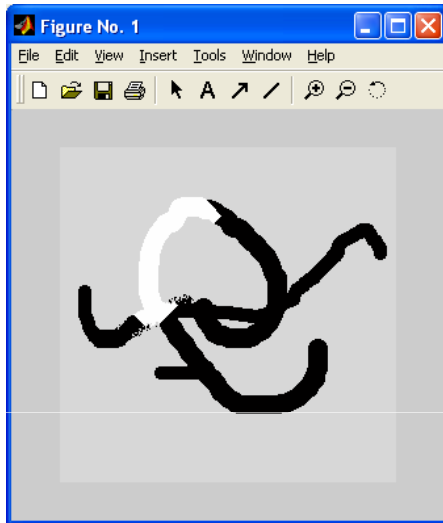
11

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	4	3	12	0	2	0
3	0	0	8	10	10	0	3	0
4	0	10	9	9	9	0	1	0
5	0	0	10	10	8	0	2	0
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	2	0	2	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0

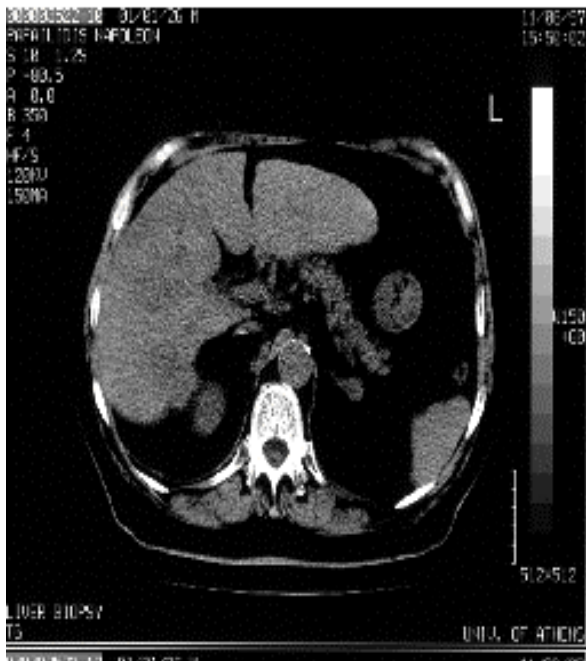
- Το αποτέλεσμα της τμηματοποίησης

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1	0	0	0
5	0	0	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

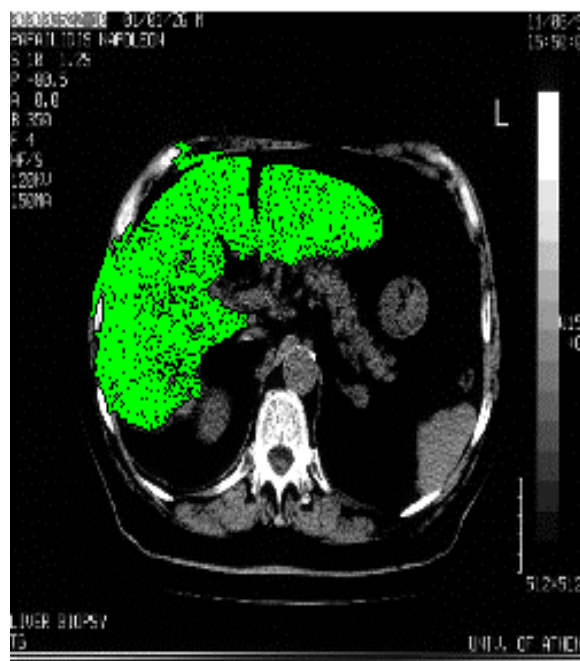
Εφαρμογή του αλγόριθμου ανάπτυξης περιοχών σε συνθετική εικόνα



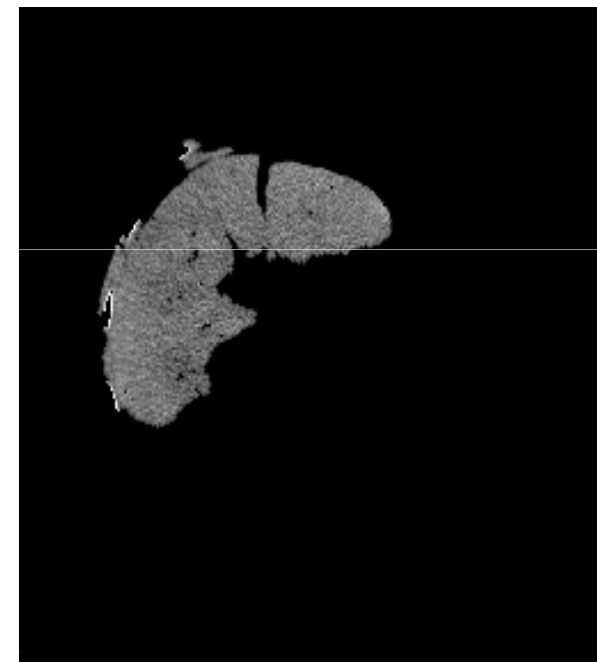
Εφαρμογή του αλγόριθμου ανάπτυξης περιοχών σε πραγματική εικόνα



Αρχική Εικόνα CT



Μέθοδος Ανάπτυξης
Περιοχών



Τμηματοποίηση Ήπατος

Τμηματοποίηση γνωστών γεωμετρικών σχημάτων σε εικόνες: Μετασχηματισμός Hough (HT)

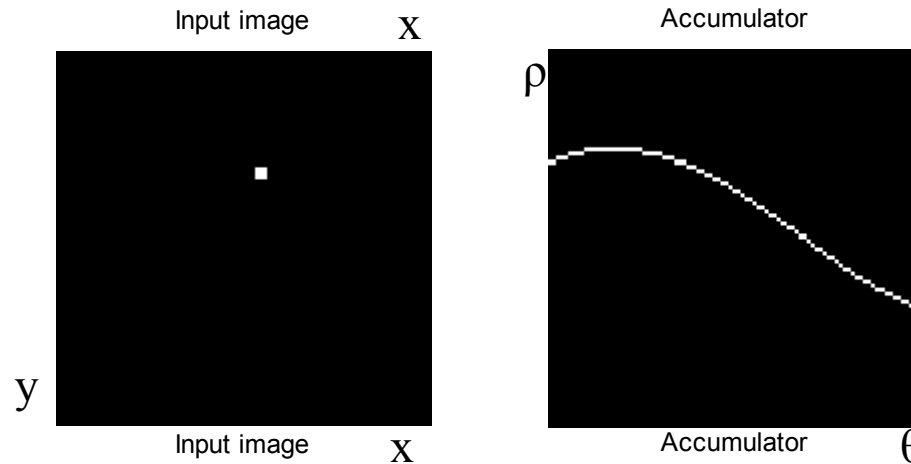
- Εστω ότι αναζητούμε σχήμα με γνωστή εξίσωση, πχ ευθεία με εξίσωση:
$$y = mx + c$$
- Ο HT ανιχνεύει γραμμές με τον ακόλουθο τρόπο:
 - Κατασκευάζεται ένας πίνακας (Accumulator) με διάσταση ίση με τον αριθμό παραμέτρων της εξίσωσης του υπό αναζήτηση σχήματος (πχ 2D πίνακας)
 - Ανιχνεύονται τα pixel ακμών \mathbf{p} της εικόνας για κάθε ένα από τα οποία:
 - Κατασκευάζεται το αντίστοιχο σχήμα στον παραμετρικό χώρο (για ευθεία, κατασκευάζεται η ευθεία στον παραμετρικό χώρο m, c που ικανοποιεί τη σχέση της ευθείας) και κάθε pixel του Accumulator από όπου περνά η ευθεία αυξάνει την τιμή του κατά 1
 - Η θέση του pixel με τη μέγιστη τιμή καθορίζει τις παραμέτρους της εξίσωσης του σχήματος που αναζητείται

Μετασχηματισμός Hough (HT): η περίπτωση της ευθείας

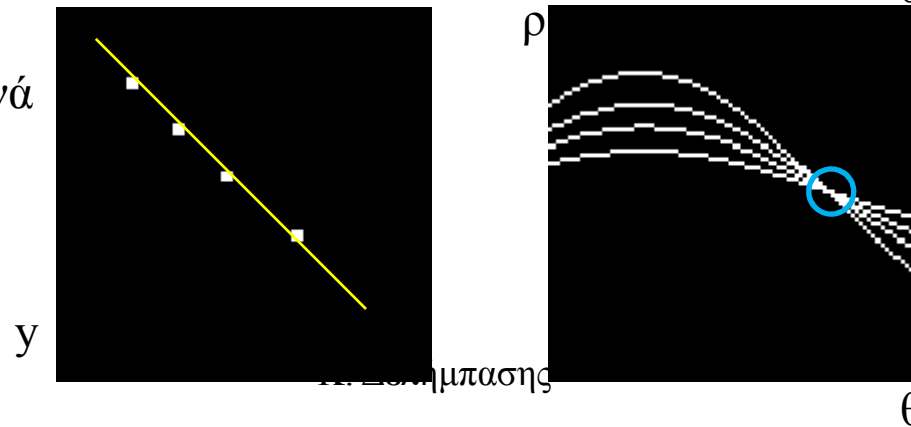
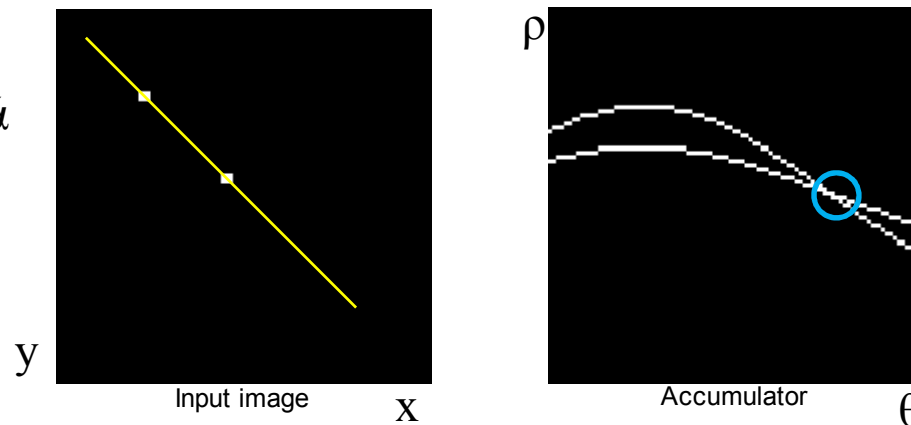
- Εστω εικόνα $I N \times M$ στην οποία αναζητάμε ευθείες με εξίσωση
$$y = mx + c$$
- Επειδή ο Accumulator αποτελεί πίνακα με όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων της ευθείας m, c , καθίσταται απαραίτητη μία αναπαράσταση της ευθείας με παραμέτρους που έχουν φραγμένες τιμές (πχ η παράμετρος m δεν είναι φραγμένη, γιατί αν η κλίση της ευθείας $\rightarrow \pi/2$, τότε η m απειρίζεται).
- Εναλλακτική αναπαράσταση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες:
$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$$
- Ορίζουμε τον αριθμό των τιμών της γωνίας θ από $-\pi$ ως π . Αυτός αποτελεί τις στήλες του Accumulator. Οι γραμμές του πίνακα Accumulator ορίζονται από $-\delta$ ως δ , όπου δ η μέγιστη δυνατή τιμή της παραμέτρου ρ :
$$\delta = \text{ceil}(\sqrt{N^2 + M^2})$$

- για κάθε pixel (x, y) της I : $I(x, y) > 0$
 - για κάθε θ
 - Υπολόγισε το $\rho(\theta) = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$
 - $A(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) + 1$
 - end
- end
- Κατά συνέπεια: ένα σημείο ακμής στην I παράγει μία καμπύλη στον πίνακα A .
- Αν υπάρχουν k συνευθειακά σημεία, τότε παράγονται k καμπύλες οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο του A . Το σημείο αυτό θα έχει τη μέγιστη τιμή από όλα τα pixel του A και οι συντεταγμένες του καθορίζουν τις παραμέτρους της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία της I .

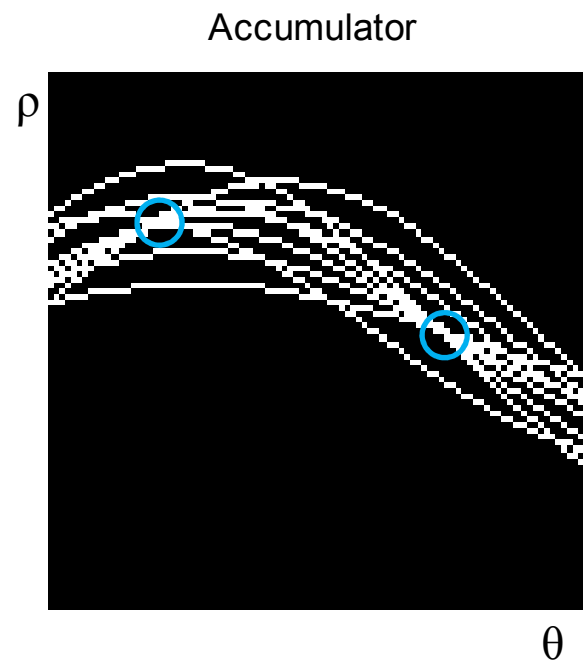
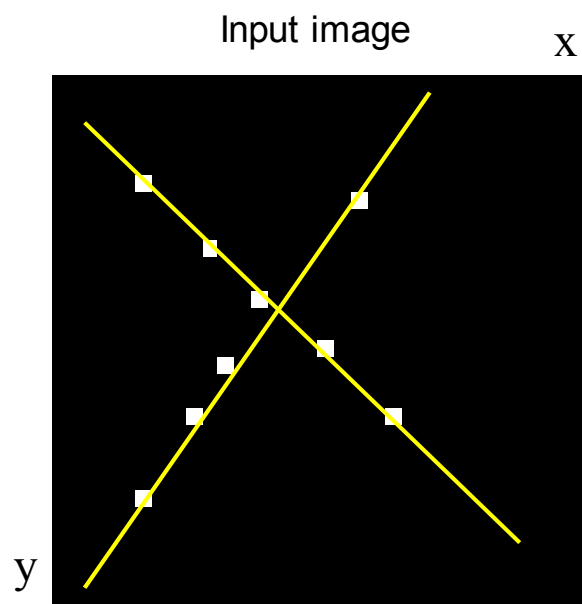
Αρχική εικόνα με 1 σημείο >0
και η αναπαράσταση του στον
Accumulator



Αρχική εικόνα με 2 και 4 συνευθειακά
σημεία >0 και η αναπαράσταση
τους στον Accumulator. Η τομή
των αντίστοιχων ημιτονοειδών
καμπύλων ορίζει το pixel με
μέγιστη τιμή=2 και 4<αντίστοιχα.
Οι συντεταγμένες του ορίζουν τις
παραμέτρους της ευθείας που περνά
από τα σημεία.



Επιλογή σημείων



Μέθοδος Διαχωρισμού – Συνένωσης Περιοχών (Split & Merge)

■ Διαχωρισμός (split):

- Η εικόνα διαχωρίζεται σε μη επικαλυπτόμενες τετραγωνικές περιοχές συγκεκριμένου μεγέθους (π.χ. 64×64)
- Αν μια περιοχή δεν έχει ομοιογενή κατανομή επιπέδων του γκρι, διαχωρίζεται σε 4 νέες τετραγωνικές περιοχές του μισού μεγέθους (32×32)
- Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να δημιουργηθούν είτε ομοιόμορφες περιοχές ή το μέγεθος των περιοχών να λάβει μια προκαθορισμένη ελάχιστη τιμή (π.χ. 4×4)

Μέθοδος Διαχωρισμού – Συνένωσης Περιοχών (Split & Merge)

■ Συνένωση (merge)

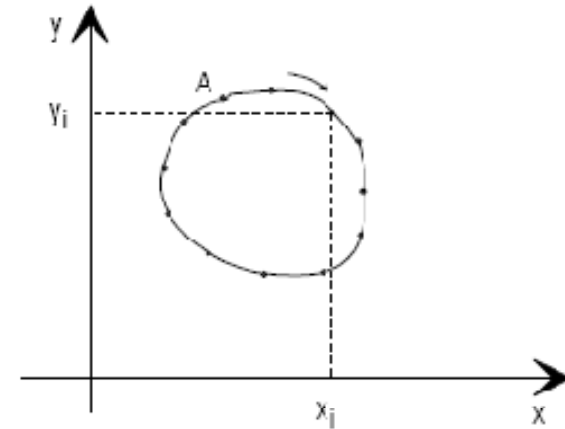
- Γειτονικές περιοχές με παρόμοια επίπεδα του γκρι συνενώνονται για το σχηματισμό μεγαλύτερων περιοχών
- Η διαδικασία σταματάει αν δεν μπορούν να γίνουν άλλες συνενώσεις περιοχών

Μέθοδος Διαχωρισμού – Συνένωσης Περιοχών (Spilt & Merge)



Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Μια ισχυρή μέθοδος για την περιγραφή περιγραμμάτων αλλά και για την εξαγωγή χαρακτηριστικών των αντικειμένων είναι οι περιγραφείς Fourier.



- Έστω ότι η καμπύλη του σχήματος αντιστοιχεί στο όριο ενός αντικειμένου. Ξεκινώντας από ένα σημείο A, το οποίο θεωρούμε ως αρχή και με ωρολογιακή φορά παίρνουμε μια ακολουθία σημείων (x_n, y_n) , $n=0,1,\dots,N-1$, με N το πλήθος των εικονοστοιχείων του ορίου.

Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Μπορούμε τώρα να καθορίσουμε την μιγαδική ακολουθία:

$$z(n) = x(n) + jy(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Από τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της $z(n)$ προκύπτει ότι:

$$a(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

- Με τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (IDFT) μπορούμε να ξαναπάρουμε την μιγαδική ακολουθία $z(n)$:

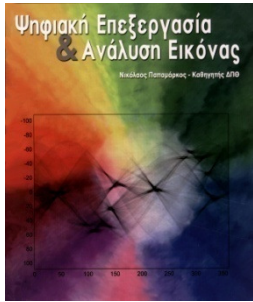
$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a(k) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Οι μιγαδικοί συντελεστές $a(k)$ καλούνται περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors – FD). Όσοις περισσότερους συντελεστές γνωρίζουμε, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση και η αναπαράσταση της καμπύλης.
- Με την βοήθεια των FD μπορούμε να εκτελέσουμε ορισμένους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σχημάτων. Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται βασικές ιδιότητες των FD.

Πίνακας 5.3 Ιδιότητες των Fourier Descriptors.

Μετασχηματισμός	Περιγράμματα	Περιγραφείς Fourier
	$u(n)$	$a(k)$
Μετατόπιση	$\tilde{u}(n) = u(n - n_0)$	$\tilde{a}(k) = a(k) e^{-j2\pi n_0 k / N}$
Μετόθεση	$\tilde{u}(n) = u(n) + u_0$	$\tilde{a}(k) = a(k) + u_0 \delta(k)$
Κλιμάκωση	$\tilde{u}(n) = \beta u(n)$	$\tilde{a}(k) = \beta a(k)$
Περιστροφή	$\tilde{u}(n) = u(n) e^{j\theta_0}$	$\tilde{a}(k) = a(k) e^{j\theta_0}$



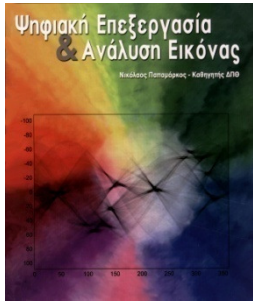
Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Αν κάποια καμπύλη μετατεθεί κατά $u_0 = x_0 + jy_0$ τότε οι FD παραμένουν ίδιοι εκτός της περιπτώσεως που $k=0$ οπότε:

$$\tilde{a}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (u(n) + u_0) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right) = a(k) + u_0 \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

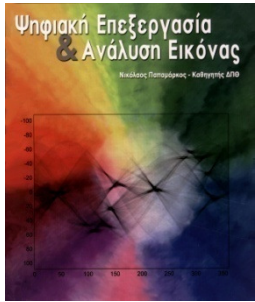
δηλαδή

$$\tilde{a}(k) = a(k) + u_0 \delta(k)$$



Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Ο απαιτούμενος αριθμός FDs για την αναδημιουργία ενός σχήματος εξαρτάται από την ίδια την μορφή του σχήματος αλλά και από την επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης.
- Οι συντελεστές $|a(k)|$, $k=1,2,\dots,N-1$ είναι ανεξάρτητοι της αρχής των αξόνων καθώς και της περιστροφής του σχήματος.
- Οι μεταβλητές $a(k)/|a(k)|$ είναι ανεξάρτητες της κλιμάκωσης.
- Οι ιδιότητες αυτές είναι σημαντικές όταν ενδιαφερόμαστε να αναγνωρίσουμε σχήματα ανεξάρτητα από την μετατόπιση, την περιστροφή ή την κλιμάκωση τους.



Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)

- Η σύγκριση δύο σχημάτων, δηλαδή δύο αντικειμένων για τα οποία έχουν προσδιοριστεί οι FDs μπορεί να γίνει με την άμεση σύγκριση των FDs.
- Αν $a(k)$ και $b(k)$ είναι οι FDs δύο σχημάτων u και v , τότε τα δύο σχήματα θεωρούνται παρόμοια αν η απόσταση:

$$d(u_0, c, \theta_0, n_0) = \min_{u_0, c, \theta_0, n_0} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |u(n) - cv(n + n_0)e^{j\theta_0} - u_0|^2 \right\}$$

είναι ικανοποιητικά μικρή.

- Οι παράμετροι u_0 , c , θ_0 και n_0 επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι επιπτώσεις της μετάθεσης, της κλιμάκωσης, του αρχικού σημείου, της περιστροφής αντίστοιχα.

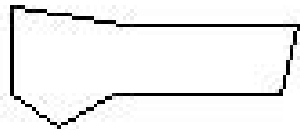
Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors)



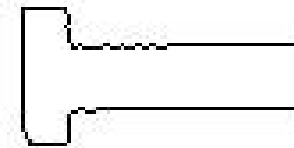
(α) Αρχική Εικόνα



(β) 5 συντελεστές



(γ) 10 συντελεστές



(δ) 100 συντελεστές

Αναγνώριση αντικειμένων

Image descriptors

- After Hu presented moment invariants in 1962, they are widely used in many applications. Subsequently, Resis revised and Li reviewed and re-formulated, also produced higher order invariants. However, increasing complexity with increasing order and having redundant information because of not being derived from a family of orthogonal functions are the two main drawbacks of Hu moment invariants.
- Afterwards, in term of noise sensitivity, image description capability and redundancy of information Legendre moments, ortogonal moments, geometrical moments, Zernike moments, pseudo-Zernike moments and Orthogonal Fourier-Mellin moments are evaluated

Αναγνώριση αντικειμένων σε εικόνες

- Ροπές τάξης $p+q$ μίας 2D συνάρτησης $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού

D:

$$M_{pq} = \iint_D p_{pq}(x,y) f(x,y) dx dy$$

- Οι ροπές υπάρχουν αρκεί το D να είναι φραγμένο
- Αν $p_{pq}(x,y)=x^p y^q$, τότε προκύπτουν οι γεωμετρικές ροπές

$$M_{pq} = \iint_D x^p y^q f(x,y) dx dy$$

- Τα μονώνυμα αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης. Αν η ταξη είναι $n=p+q$: $p+q \leq n$, πλήθους $(n+1)(n+2)/2$.

- Κεντρικές ροπές: αμετάβλητες κατά την μετατόπιση (translation invariant)

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y), \bar{x} = \frac{M_{10}}{M_{00}}, \bar{y} = \frac{M_{01}}{M_{00}}$$

- Ροπές αματάβλητες κατά την αλλαγή κλίμακας (scale invariant)

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\gamma}, \quad \gamma = \frac{p+q}{2} + 1$$

- Ροπές Hu (1962) αμετάβλητες (affine invariant) they are widely used in many applications

$$\varphi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\varphi_2 = (\eta_{20} + \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\varphi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\varphi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\varphi_5 = (\eta_{03} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12}) \left[(\eta_{03} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right] +$$

$$(3\eta_{21} + \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03}) \left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right]$$

$$\varphi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02}) \left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right] +$$

$$4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

- Six of these invariants are invariable if the image is mirrored. But the last changes its sign. There were no two patterns those are the mirror of each other. Thus, the first six moments are used for object recognition

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί εικόνας

- Παρεμβολή
- Εφαρμογή Συσχετισμένων μετασχηματισμών

Κ. Δελήμπασης

Παρεμβολή εικόνας

- Παρεμβολή ονομάζεται η διαδικασία μεταβολής του αριθμού των γραμμών και στηλών της εικόνας με ταυτόχρονη μεταβολή των τιμών τους.
- Εστω ότι δεδομένης μίας εικόνας $I1$ $N \times M$ θέλουμε να δημιουργήσουμε εικόνα $I2$ διαστάσεων $2N \times 2M$. Οι τιμές των νέων pixel της $I2$ υπολογίζονται βάσει των τιμών των pixel της $I1$.
- Δύο είναι οι απλούστεροι τρόποι υπολογισμού των τιμών pixel της $I2$:
 - αναδιπλασιασμό (replication) τιμών (zero order hold κράτηση μηδενικής τάξης)
 - γραμμική παρεμβολή –linear interpolation– τιμών (first order hold κράτηση πρώτης τάξης)

Μεταβολή αριθμού pixel της εικόνας με αντιγραφή (replication) των τιμών

- Έστω διπλασιασμός της διάστασης της εικόνας: $I_1: M \times N \rightarrow I_2: 2M \times 2N$:
- Διπλασιάζουμε τις διαστάσεις της εικόνας συμπληρώνοντας τα νέα pixel με μηδενικές τιμές, δηλ. θέτουμε:

$$I_2(i, j) = \begin{cases} I_1\left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}\right), & i \text{ και } j : \text{άρτια} \\ 0 & i \text{ ή } j : \text{περιττό} \end{cases}$$

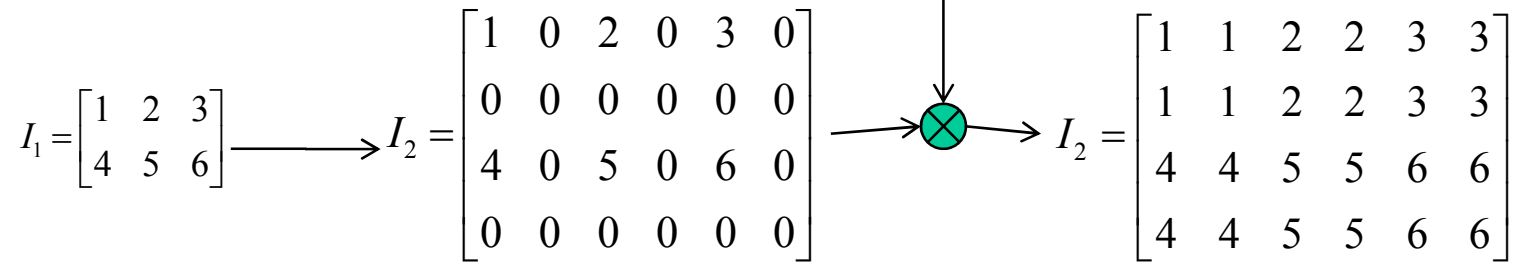
- Για κάθε ένα από τα 3 μηδενικά γειτονικά pixel του (i, j) με i, j άρτια, θέτουμε τιμή ίση με $I_1(i, j)$, σύμφωνα με τον παρακάτω ψευδοκώδικα:
- ```
for i=0:M-1
 - for j=0:N-1
 • I2(2i, 2j)=I1(i, j)
 • I2(2i+1, 2j)=I1(i, j)
 • I2(2i, 2j+1)=I1(i, j)
 • I2(2i+1, 2j+1)=I1(i, j)
 - end
• end
```

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος γενικεύεται για νέα διάσταση τυχαίο ακέραιο πολλαπλάσιο των  $M \times N$ .

- Ισοδύναμα, τα προηγούμενα βήματα ισοδυναμούν με συνέλιξη της  $I_2$  με την μάσκα  $H$ , όπου

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Παράδειγμα:



## Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής σε εικόνες

- Εστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε την τιμή μίας δεδομένης εικόνας σε ένα σημείο της με μη ακέραιες συντεταγμένες  $(y,x) = ([y] + \alpha, [x] + \beta)$ , όπου  $[x], [y]$  το ακέραιο μέρος των  $x, y$  και  $\alpha, \beta$  το κλασματικό τους μέρος.

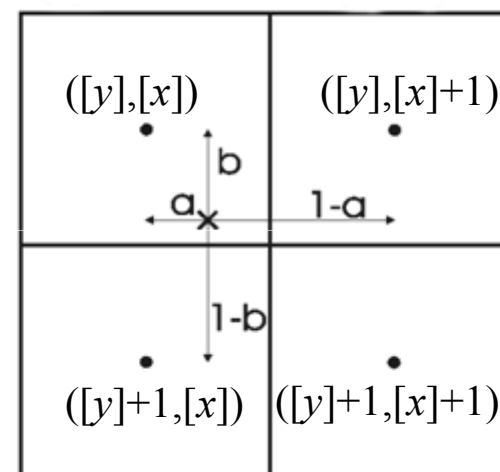
$$x = [x] + b$$

$$y = [y] + a$$

$$[x], [y] \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Q}^+, 0 < a, b < 1$$

- Η τιμή της  $I$  στη θέση  $(y,x)$  είναι ο μέσος όρος των 4 γειτονικών pixel που το περικλείουν, σταθμισμένος με τον αντίστροφο της απόστασής του  $(y,x)$  από τα κέντρα τους:

$$I([y] + a, [x] + b) = (1-a)(1-b)I([y], [x]) + a(1-b)I([y], [x] + 1) \\ + (1-a)bI([y] + 1, [x]) + abI([y] + 1, [x] + 1)$$



## Μεταβολή αριθμού pixel της εικόνας με γραμμική παρεμβολή –linear interpolation- τιμών

- Βήμα 1: Δημιουργείται μία νέα εικόνα με το ζητούμενο μέγεθος, σύμφωνα με τα προηγούμενα. Τα επιπλέον pixel έχουν τιμή 0.

$$I_2(i, j) = \begin{cases} I_1\left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}\right), & \text{i και j : άρτια} \\ 0 & \text{i ή j : περιττό} \end{cases}$$

- Βήμα 2: Γραμμική παρεμβολή κατά γραμμές:

$$I_2(2i+1, 2j) = \frac{1}{2}(I_1(i+1, j) + I_1(i, j))$$

- Βήμα 3: Γραμμική παρεμβολή κατά στήλες:

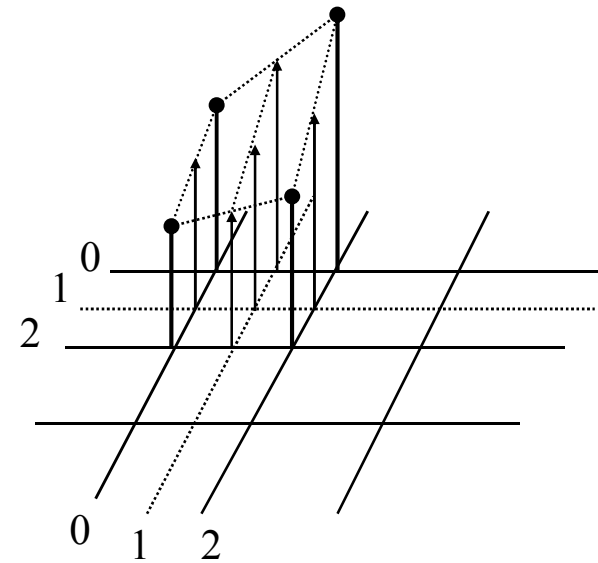
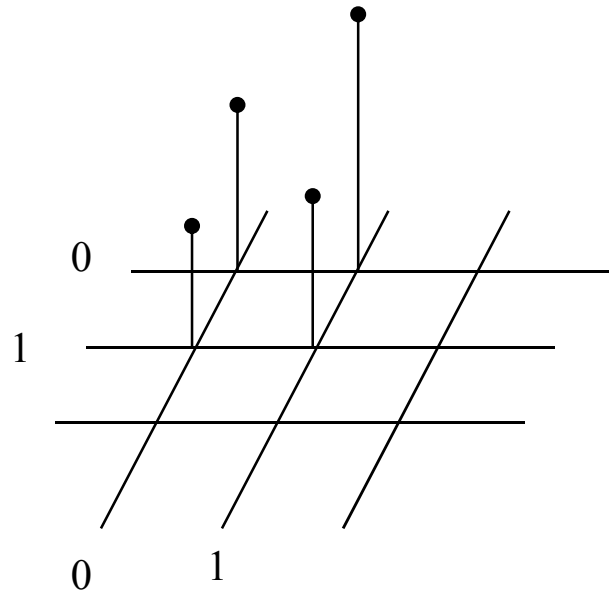
– Προσοχή: η παρεμβολή κατά στήλες γίνεται και για τις νέες στήλες που δημιουργήθηκαν από το βήμα 1.  $I_2(2i, 2j+1) = \frac{1}{2}(I_1(i, j+1) + I_1(i, j))$

- Ισοδύναμα, τα βήματα 1 και 2 αντικαθίστανται από συνέλιξη της I με μάσκα H όπου:

$$H = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

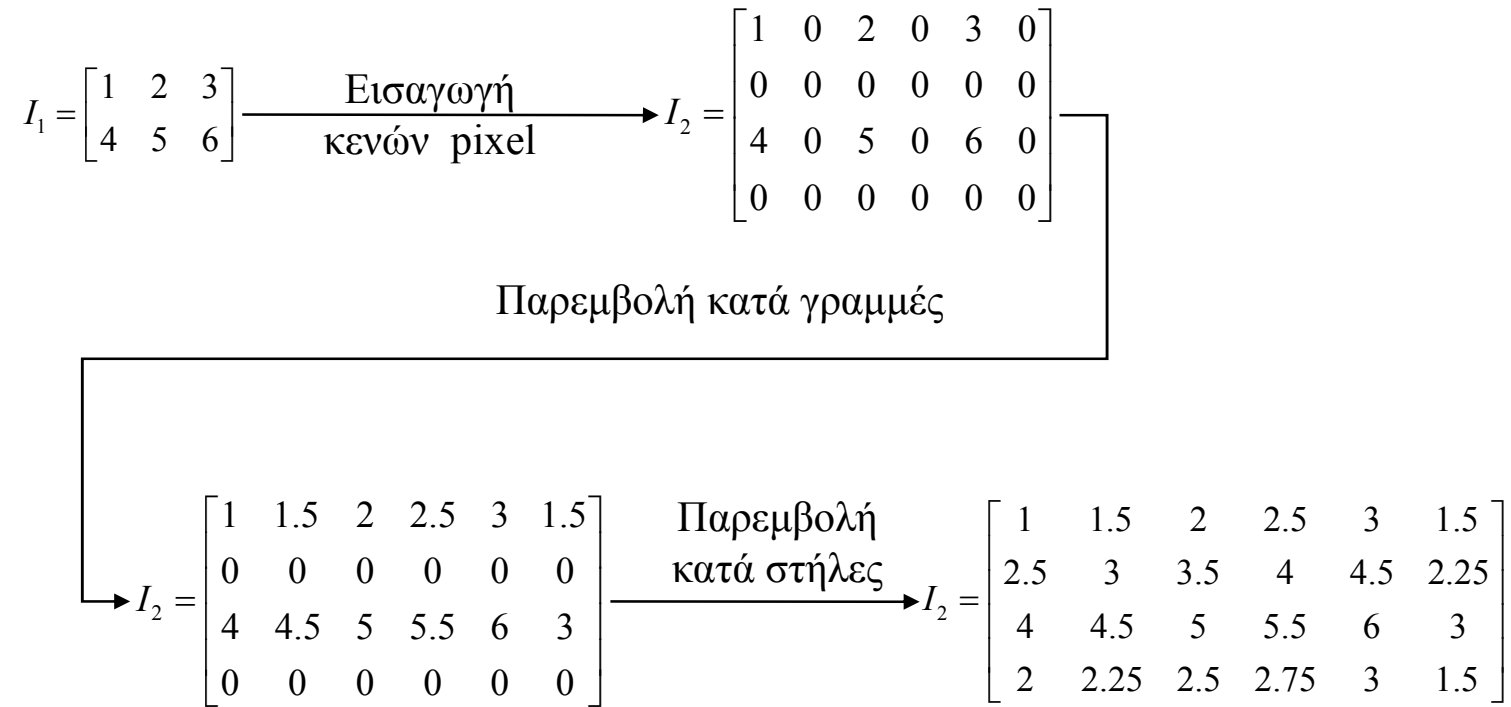
Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος γενικεύεται για νέα διάσταση τυχαίο ακέραιο πολλαπλάσιο των MxN.

# Η έννοια της γραμμικής παρεμβολής



- | Αρχική τιμή εικόνας
- ↑ Τιμή εικόνας από παρεμβολή

# Παράδειγμα γραμμικής παρεμβολής





# Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

- Ορισμός σημείου στον Ευκλείδειο χώρο:  $\mathbf{p}=[x_p, y_p, z_p]^T$ , όπου  $x_p, y_p, z_p$  πραγματικοί αριθμοί.
- Εστω  $E^3$  το σύνολο των  $\mathbf{p}$ .
- Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός  $T(\boldsymbol{\pi})$ , με διάνυσμα παραμέτρων  $\boldsymbol{\pi}$ , ορίζεται ως:  $T: E^3 \rightarrow E^3$
- Οι μετασχηματισμοί σε 2D αποτελούν υποπερίπτωση των 3D.
- Παραδείγματα: Μεταφορά (translation), περιστροφή (rotation), αλλαγή κλίμακας (scaling).
- Κάθε γεωμετρικός μετασχηματισμός που μπορεί να περιγραφεί σαν συνδυασμός μεταφορών, περιστροφών, ή αλλαγής κλίμακας λέγεται γενικευμένος συσχετισμένος μετασχηματισμός (affine).

# Ομογενείς συντεταγμένες

- Σύνθεση μετασχηματισμών
  - Ακολουθία μετασχηματισμών εκφράζεται σαν γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων, με τον πίνακα του 1ου μετασχηματισμού αριστερά
  - Η μετατόπιση είναι ο μόνος μετασχηματισμός ο οποίος απαιτεί πρόσθεση
- Ομογενείς συντεταγμένες: για κάθε σημείο  $P(x,y)$ , εισάγουμε μία επιπλέον συντεταγμένη  $w$ ,  $P(x,y,w_0)$ ,
  - Το σημείο  $P'(x/w_0, y/w_0, 1)$  αποτελεί την αναπαράσταση ομογενών συντεταγμένων στο επίπεδο  $w=w_0$
  - Συνήθως χρησιμοποιείται η βασική αναπαράσταση με  $w_0=1$
- Με την εφαρμογή των ομογενών συντεταγμένων η μετατόπιση γίνεται με πολλαπλασιασμό πινάκων και έτσι είναι δυνατή η σύνθεση πολλών διαδοχικών μετασχηματισμών σε ένα μόνο πίνακα μετασχηματισμού.

- Συχνά είναι απαραίτητο να εφαρμόσουμε ένα συσχετισμένο μετασχηματισμό σε μία εικόνα,  $\pi\chi$ 
  - Περιστροφή της εικόνας γύρω από το κέντρο μάζας της
  - Αλλαγή κλίμακας της εικόνας (ισοδύναμα interpolation).
- Εστω  $T$  ο μετασχηματισμός  $T: E^3 \rightarrow E^3$  εικόνας που μετρέπει μία εικόνα  $I$  στην εικόνα  $I_1$ .

$$I_1(T(x, y)) = I(x, y)$$

$$T(x, y) = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{T}$  είναι ο πίνακας του μετασχηματισμού (σε ομογενείς συντεταγμένες), ο οποίος εφαρμοζόμενος στις συντεταγμένες ενός pixel παράγει τις συντεταγμένες του αντίστοιχου pixel της μετασχηματισμένης εικόνας.

- Μετατόπιση (Translation):
- Αλλαγή κλίμακας (ανεξάρτητα σε κάθε διάσταση), ως προς την αρχή των αξόνων.
- Περιστροφή (Rotation) γύρω από τον άξονα των  $z$ , ως προς την αρχή των αξόνων.
- Οποιοσδήποτε συσχετισμένος μετασχηματισμός (στις 2 διαστάσεις) μπορεί να περιγραφεί από ένα πίνακα της μορφής:

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ο μετασχηματισμός Affine εφαρμόζεται ως εξής:
  - Για κάθε pixel  $(x_1, y_1)$  της  $I_1$ , υπολογίζονται οι νέες συντεταγμένες  $(x_2, y_2)$  ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Επισημαίνεται ότι:
  - Τα  $(x_2, y_2)$  δεν είναι πάντα ακέραια, μπορεί να πάρουν και αρνητικές τιμές, ή τιμές μεγαλύτερες από τον αριθμό γραμμών και στηλών της  $I_1$ .
  - Εφαρμογή του μετασχηματισμού σε Matlab:
  - `I2=imtransform(I1, T, 'nearest', 'XData', XData, 'YData', YData, 'FillValues', 0);`

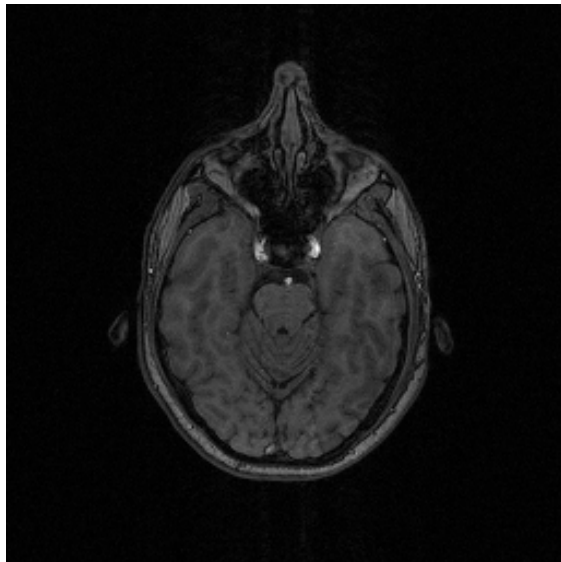
# Παράδειγμα

- Εστω ότι επιθυμούμε να μετατοπίσουμε μία εικόνα μεγέθους 256x256 κατά 10,-8 στους δύο άξονες, να την περιστρέψουμε κατά  $\theta=6^\circ$  και να αλλάξουμε την κλίμακα στον άξονα  $X$  και  $Y$  κατά 1.2 και 0.8 αντίστοιχα.

$$T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης (0,0) \to \text{κέντρο μάζας}}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας αλλαγής κλίμακας}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας περιστροφής}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης dx, dy}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης κέντρου μάζας \to (0,0)}}$$

$$T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & 128 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης (0,0) \to \text{κέντρο μάζας}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας αλλαγής κλίμακας}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{6\pi}{180}\right) & -\sin\left(\frac{6\pi}{180}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{6\pi}{180}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{180}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας περιστροφής +6 μοιρών}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης dx, dy}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -128 \\ 0 & 1 & -128 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Πίνακας μετατόπισης κέντρου μάζας \to (0,0)}}$$

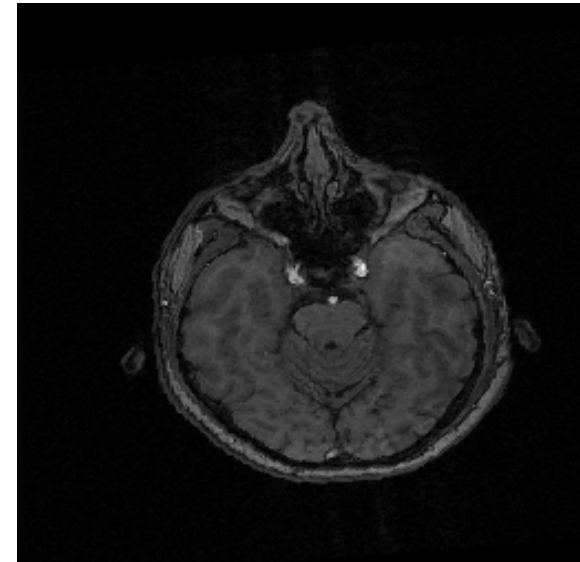
- Εφαρμογή του μετασχηματισμού του προηγούμενου παραδείγματος



Αρχική εικόνα

$$P = \begin{bmatrix} 1.1934 & -0.1254 & -8.7030 \\ 0.0836 & 0.7956 & 15.4572 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας  
Μετασχηματισμού



Μετασχηματισμένη  
εικόνα

# Απλός αλγόριθμος εφαρμογής συσχετισμένου μετασχηματισμού: μη ενδεικνυόμενος

Εστω ότι θέλουμε να μετασχηματίσουμε γεωμετρικά δοθείσα εικόνα  $I_1$ , βάσει συσχετισμένου μετασχηματισμού με πίνακα  $A$ .

Βήμα 1ο: Προσδιορίζουμε τη προβολή (απεικόνιση) του κέντρου του κάθε pixel  $(x,y)$  της αρχικής εικόνας  $I_1$  στη νέα εικόνα  $I_2$ :  
 $(x_1,y_1,1)^T = A * (x,y,1)^T$ .

Βήμα 2ο: Βρίσκουμε το pixel της νέας εικόνας  $I_2$  του οποίου το κέντρο βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο της προβολής (στρογγυλοποίηση συντεταγμένων)

Βήμα 3ο: Θέτουμε τη φωτεινότητα του ζητούμενου pixel της τελικής εικόνας ίση με τη φωτεινότητα του pixel, από το βήμα 2, της αρχικής εικόνας:

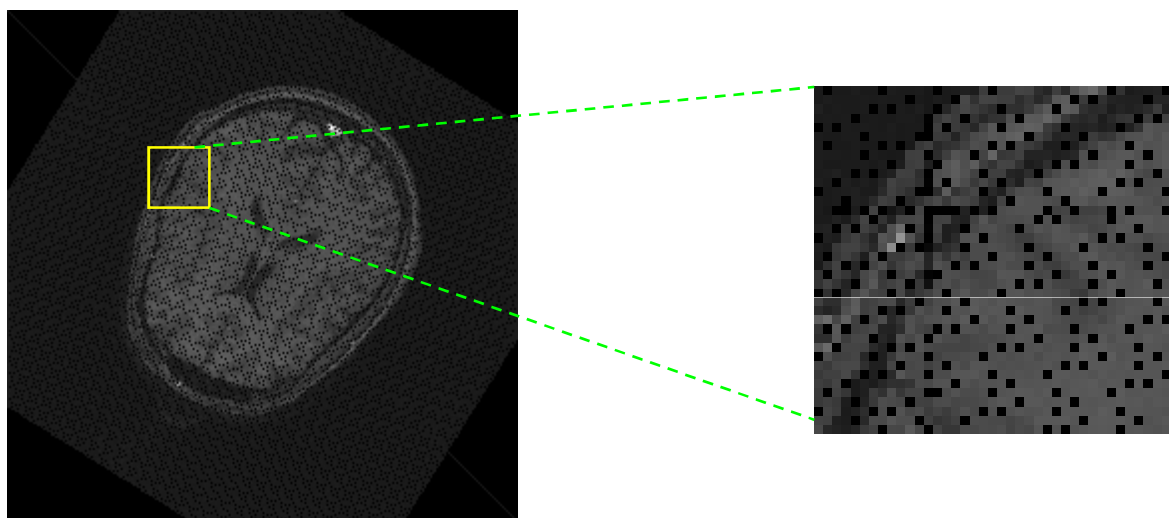
$$I_2(\text{round}(x_1), \text{round}(y_1)) = I_1(x,y) .$$



Παράδειγμα ψευδοκώδικα του προηγούμενου αλγόριθμου για περιστροφή εικόνας κατά γωνία  $\theta$  γύρω από το κέντρο μάζας της CM.

```
A=T (-CM) R (θ) T (CM)
for i=1:256
 for j=1:256
 [i1,j1]T=A* [i,j]T
 if i1>256 →i1=256;
 if i1<=1→i1=1;
 if j1>256 →j1=256;
 if j1<=1→j1=1;
 IM(round(i1),round(j1))=I(i,j);
 end;
end;
```

## Παράδειγμα περιστροφής εικόνας με χρήση του προηγούμενου αλγόριθμου



Παρατηρούμε το artifact των μηδενικών Pixel (τα οποία δεν έχουν πάρει τιμές). Η χρήση της παρεμβολής βάσει του κοντινότερου γείτονα είναι πολύ απλή στην υλοποίηση αλλά έχει το μειονέκτημα ότι θολώνει την περιστραμμένη εικόνα. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διγραμμική παρεμβολή.

# Γενικός αλγόριθμος εφαρμογής συσχετισμένου μετασχηματισμού

- Βήμα 1ο: Προσδιορίζουμε τη προβολή (απεικόνιση) του κέντρου του κάθε pixel  $(x,y)$  της νέας εικόνας  $I_2$  στην αρχική εικόνα  $I_1$ :  
 $(x_1,y_1,1)^T = A^{-1} * (x,y,1)^T$ .

Υπολογίζουμε την τιμή του  $(x,y)$  της νέας εικόνας  $I_2$  με 2 τρόπους:

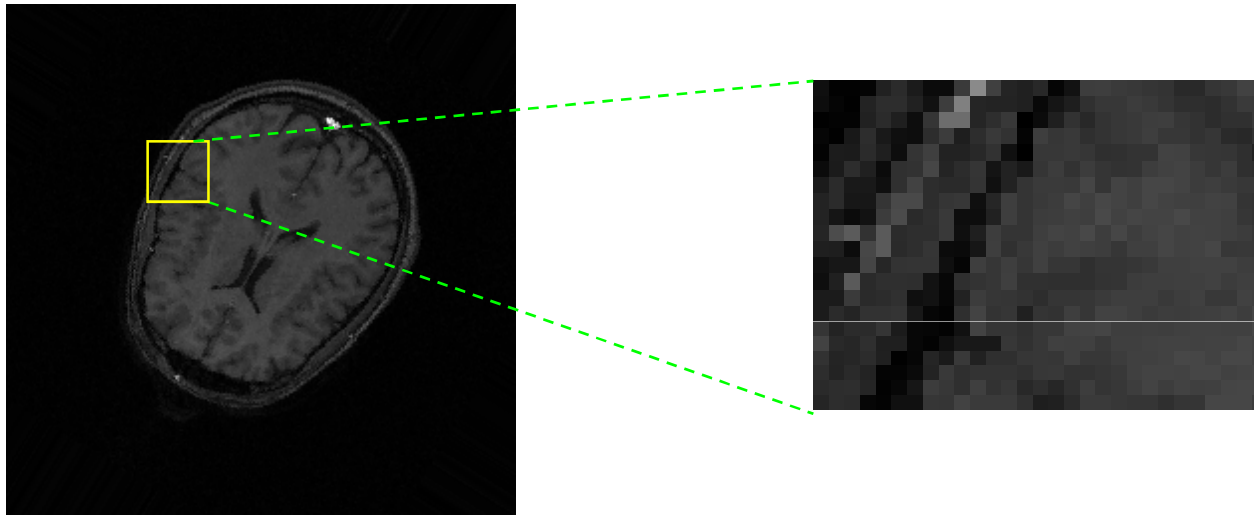
- Βήμα 2α: **Παρεμβολή κοντινότερου γείτονα**: Βρίσκουμε το pixel της αρχικής εικόνας του οποίου το κέντρο βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο της προβολής με στρογγυλοποίηση:  $I_2(x,y) = I_1(\text{round}(x_1), \text{round}(y_1))$
- Βήμα 2β: **Διγραμμική Παρεμβολή**: Θέτουμε την τιμή του  $(x_1,y_1)$  ζητούμενου pixel της τελικής εικόνας  $I_2$ , ίση με την τιμή της αρχικής εικόνας  $I_1$  στη θέση  $(x,y)$ . Επειδή τα  $(x_1,y_1)$  είναι εν γένει πραγματικοί αριθμοί, εφαρμόζουμε διγραμμική παρεμβολή:

$$I_2(y,x) = I_1(y_1,x_1) = I_1([y_1] + a, [y_1] + b) = \\ (1-a)(1-b)I([y_1],[x_1]) + a(1-b)I([y_1],[x_1]+1) + (1-a)bI_1([y_1]+1,[x_1]) + abI_1([y_1]+1,[x_1]+1)$$

## Αλγόριθμος περιστροφής εικόνας για διόρθωση artifact, βάσει του κοντινότερου γείτονα

```
A=T (-CM) R (θ) T (CM) // Υπολογισμός του πίνακα περιστροφής A
for i=1:256 // Για κάθε pixel της νέας εικόνας I2
 for j=1:256
 [i1, j1]T = (A-1) * [i, j]T // Υπολογισμός του pixel της I1 από το οποίο
 // προέρχεται με χρήση του αντίστροφου του A
 if i1 > 256 → i1 = 256;
 if i1 <= 1 → i1 = 1; // Έλεγχος αν το (i1, j1) είναι εντός
 if j1 > 256 → j1 = 256; // της αρχικής εικόνας
 if j1 <= 1 → j1 = 1;
 IM2 (i, j) =
 IM (round (i1) , round (j1)) ; // Μέθοδος του κοντινότερου γείτονα
 end;
end;
```

## Παράδειγμα περιστροφής εικόνας χωρίς artifacts με χρήση του προηγούμενου αλγόριθμου

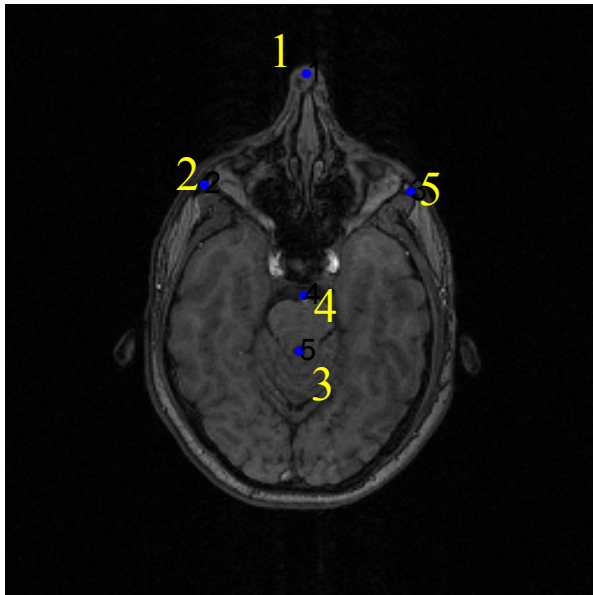


Παρατηρούμε ότι το artifact των μηδενικών Pixel έχει διορθωθεί. Η χρήση της παρεμβολής βάσει του κοντινότερου γείτονα είναι πολύ απλή στην υλοποίηση αλλά έχει το μειονέκτημα ότι θολώνει την περιστραμμένη εικόνα. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διγραμμική παρεμβολή.

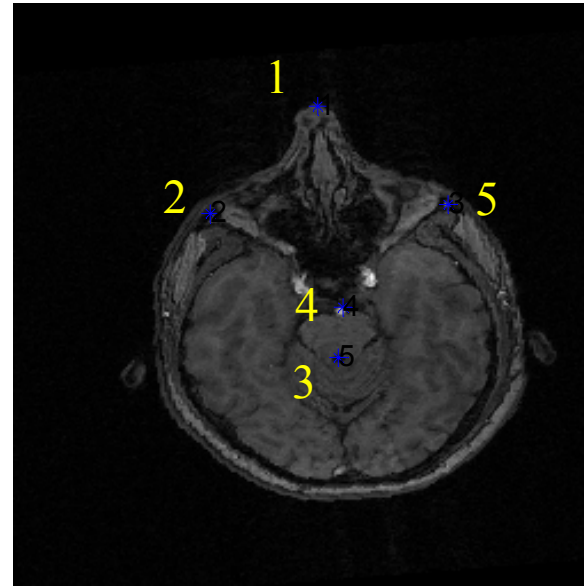
# Χωρική ταύτιση εικόνων: Καθορισμός του πίνακα μετασχηματισμού βάσει ομόλογων σημείων

- Το πρόβλημα της χωρικής ταύτισης θεωρεί ότι υπάρχουν 2 εικόνες  $I_1, I_2$  του ίδιου αντικειμένου, που έχουν συλλεχθεί υπό διαφορετική γεωμετρία. Εστω ότι υπάρχει ένας αριθμός από ζεύγη **ομόλογων** σημείων μεταξύ δύο εικόνων  $I_1, I_2$ :  $\{p_i^A\}$  στην  $I_1$  και  $\{p_i^B\}$  στην  $I_2$ . Ζητείται ο πίνακας του μετασχηματισμού που μετασχηματίζει γεωμετρικά την  $I_1$  στην  $I_2$ , έτσι ώστε τα μετασχηματισμένα σημεία  $\{p_i^A\}$  να συμπίπτουν με τα σημεία  $\{p_i^B\}$ . Λέμε τότε ότι οι δύο εικόνες ταυτίζονται χωρικά (spatial registration).
- Τα ζεύγη ομόλογων σημείων  $\{p_i^A\}$  στην  $I_1$  και  $\{p_i^B\}$  στην  $I_2$ ,  $i=1, \dots, N$   $N>3$ , ορίζονται είτε από το χρήστη είτε από κάποια αυτόματη μέθοδο.
- **Ομόλογα** είναι δύο σημεία όταν έχουν τοποθετηθεί πάνω στα ίδια αντικείμενα στις δύο διαφορετικές εικόνες. Προφανώς, επειδή οι δύο εικόνες δεν ταυτίζονται χωρικά, οι συντεταγμένες δύο ομόλογων σημείων δεν θα είναι ίδιες (πχ η μύτη του ασθενή στην  $I_1$  δεν βρίσκεται στα pixel στα οποία βρίσκεται η μύτη του ίδιου ασθενή στην  $I_2$ ).

Image I1



Transformed I1



- Παράδειγμα δύο εικόνων I1 και I2 του ίδιου αντικειμένου (MRI εγκεφάλου) με 5 ζεύγη ομολόγων σημείων που έχουν τοποθετηθεί σε κοινές ανατομικές δομές από τον χρήστη.

- Για να καθορίσουμε τον μετασχηματισμό Affine χρειαζόμαστε τον πίνακα του μετασχηματισμού ο οποίος έχει 6 αγνώστους:

$$a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{12}$$

- Οι 3 άγνωστοι  $a_{00}, a_{01}, a_{02}$  υπολογίζονται από τις  $X$  συντεταγμένες των ζευγών ομολόγων σημείων και οι 3 άγνωστοι  $a_{10}, a_{11}, a_{12}$  υπολογίζονται από τις  $Y$  συντεταγμένες. Αν το πλήθος των ζευγών σημείων  $N=3$  πρέπει να επιλυθούν 2 γραμμικά συστήματα  $3 \times 3$ . Αν  $N > 3$  (συνήθης περίπτωση) τότε τα 2 γραμμικά συστήματα είναι υπερκαθορισμένα (για το κάθε ένα υπάρχουν 3 άγνωστοι και  $N > 3$  γραμμικές εξισώσεις).



- Κατασκευάστε τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} x_1^A & y_1^A & 1 \\ x_2^A & y_2^A & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N^A & y_2^A & 1 \end{bmatrix}$

- Εστω  $p = (a_{00}, a_{01}, a_{02})^T$ ,  $q = (a_{10}, a_{11}, a_{12})^T$   
 $\mathbf{b}_1 = (x_1^A, x_2^A, \dots, x_N^A)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (x_1^B, x_2^B, \dots, x_N^B)^T$

- Πρέπει να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα  $\mathbf{A}p = \mathbf{b}_1$   
 $\mathbf{A}q = \mathbf{b}_2$

- Θυμηθείτε ότι ο  $A$  είναι διαστάσεων  $N \times 3$  ενώ τα  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  είναι διαστάσεων  $3 \times 1$  και τα  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  είναι διαστάσεων  $N \times 1$ . Ο ευκολότερος τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί ο τελεστής «\» του Matlab:  $p = A \setminus b_1$  και  $q = A \setminus b_2$ .
- Η παραπάνω λύση ισοδυναμεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, σύμφωνα με την οποία τα δύο συστήματα επιλύονται ως εξής:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{p} &= \mathbf{A}^T \mathbf{b}_1 \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{q} &= \mathbf{A}^T \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

# Ελαστικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

- Ο πιο γνωστός ελαστικός γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι το μοντέλο TPS (Thin Plate Splines) (Bookstein 1989).

# Ελαστικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί: το μοντέλο TPS (Thin Plate Splines)

- Εστω ότι έχουμε επιλέξει 2 σύνολα ομόλογων σημείων  $\{x_i, y_i\}$ ,  $\{x'_i, y'_i\}$
- Κατασκευάζουμε τους πίνακες  $P$ ,  $V$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, 3 \times n; \quad V = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \end{bmatrix}$$

- Ορίζουμε την συνάρτηση  $U(r) = r^2 \log r^2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  και κατασκευάζουμε τον πίνακα  $K$ , όπου  $r_{ij}$  η απόσταση των σημείων  $i, j$ .

$$K = \begin{bmatrix} 0 & U(r_{12}) & \cdots & U(r_{1n}) \\ U(r_{21}) & 0 & \cdots & U(r_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \cdots & 0 \end{bmatrix}, n \times n;$$

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $L$

$$L = \left[ \begin{array}{c|c} K & P \\ \hline P^T & O \end{array} \right], (n + 3) \times (n + 3)$$

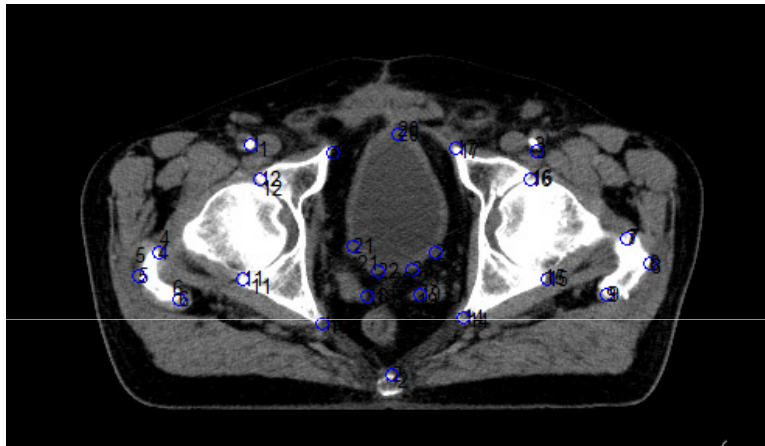
- Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $Y = (V | 0 \ 0 \ 0)^T$

$$L^{-1}Y = (W | a_1 \ a_x \ a_y)^T$$

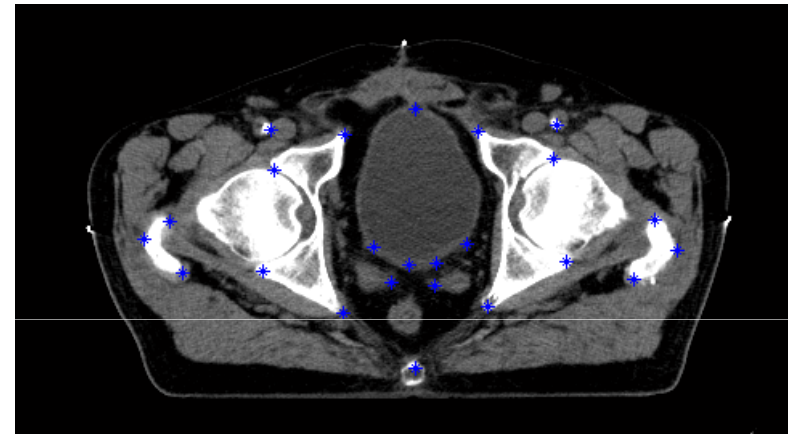
- Υπολογίζουμε για κάθε σημείο  $(x, y)$  τις νέες του συντεταγμένες βάσει της ακόλουθης διανυσματικής συνάρτησης:

$$f(x, y) = a_1 + a_x x + a_y y + \sum_{i=1}^n w_i U(|P_i - (x, y)|)$$

# Παράδειγμα: ταύτιση εικόνων με ελαστικό μετασχηματισμό

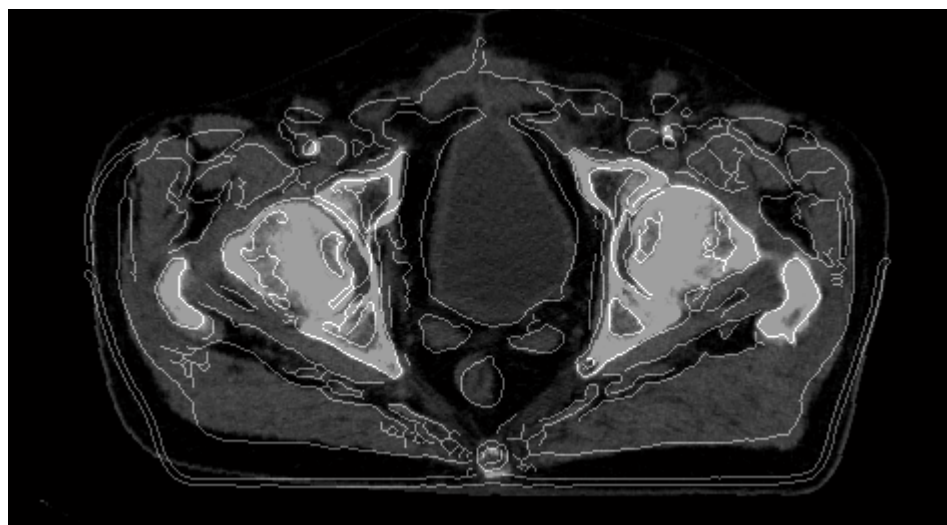
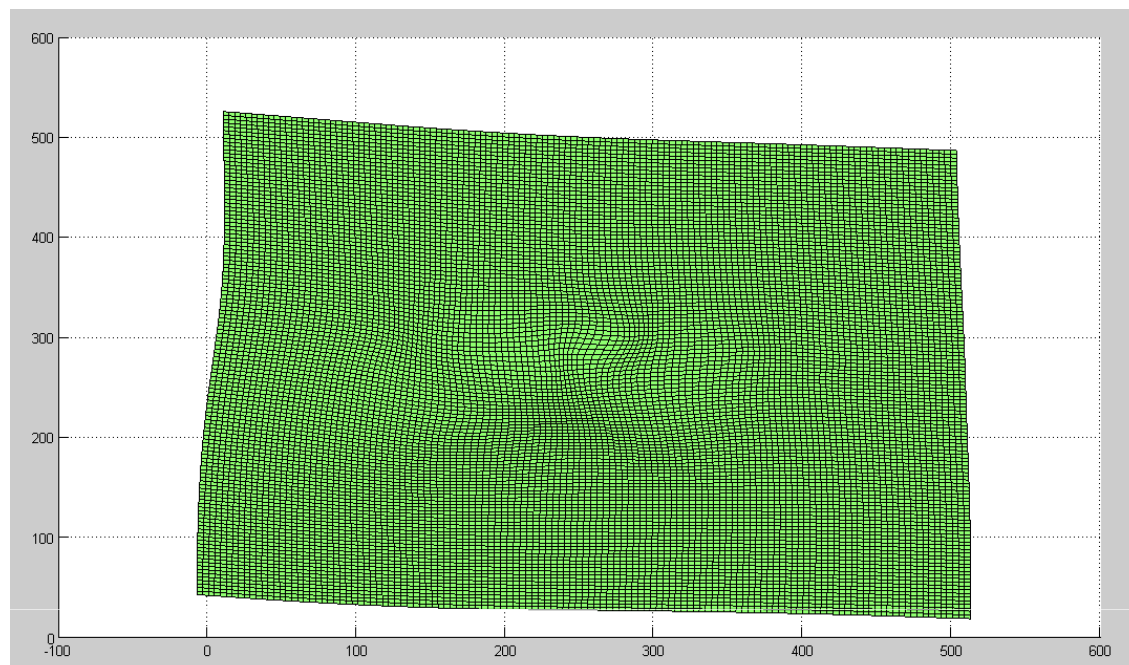


(α)



(β)

- Εστω δύο εικόνες του ίδιου αντικειμένου που έχει παραμορφωθεί ελαστικά.
- Ορίζουμε ζεύγη ομόλογων σημείων στις εικόνες
- Αναζητούμε τον μετασχηματισμό που παραμορφώνει τη (α) ώστε να ταυτιστεί με την (β)



# Affine Μετασχηματισμός

# Η χρήση ψευδοχρώματος (false color)

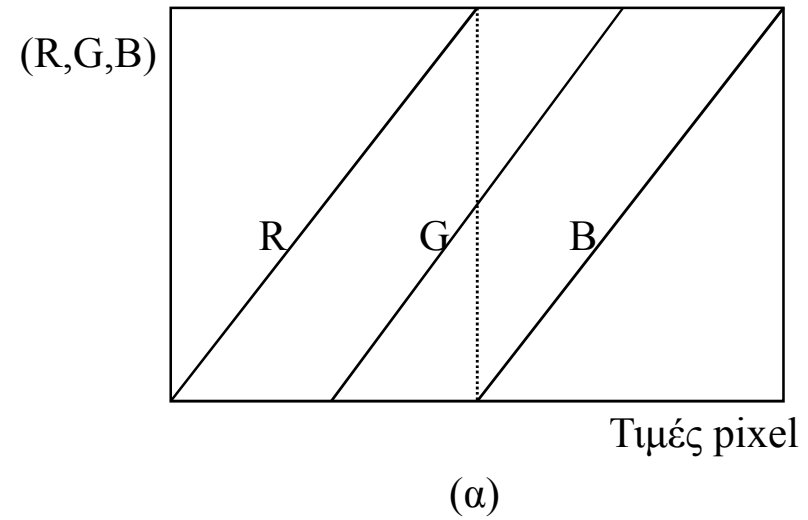
- Το ψευδοχρώμα ορίζεται με ένα μετασχηματισμό  $T$  που αντιστοιχεί τιμές pixel με τριάδες τιμών (Red, Green, Blue):

$$c(x, y) = [R(x, y), G(x, y), B(x, y)] = T(I(x, y))$$

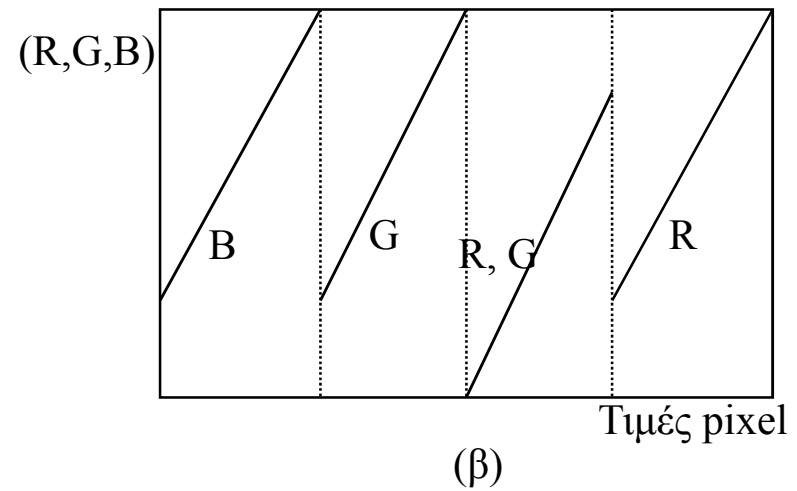
- Αν ως είσοδος δοθεί στο μετασχηματισμό κάθε δυνατή τιμή ενός pixel μίας εικόνας, τότε η έξοδος του μετασχηματισμού  $T$  καλείται ψευδοχρωματική κλίμακα -colormap.
- Χρησιμότητα: αύξηση της αντίθεσης μεταξύ περιοχών
- Αλγόριθμος:
  - Για κάθε pixel  $(x, y)$  της εικόνας  $I$ 
    - Υπολογίζεται η τιμή της κόκκινης, πράσινης και μπλε συνιστώσας του χρώματος:
      - $R(x, y) = T_r(I(x, y))$
      - $G(x, y) = T_g(I(x, y))$
      - $B(x, y) = T_b(I(x, y))$
  - Το αποτέλεσμα στέλνεται στο σύστημα απεικόνισης

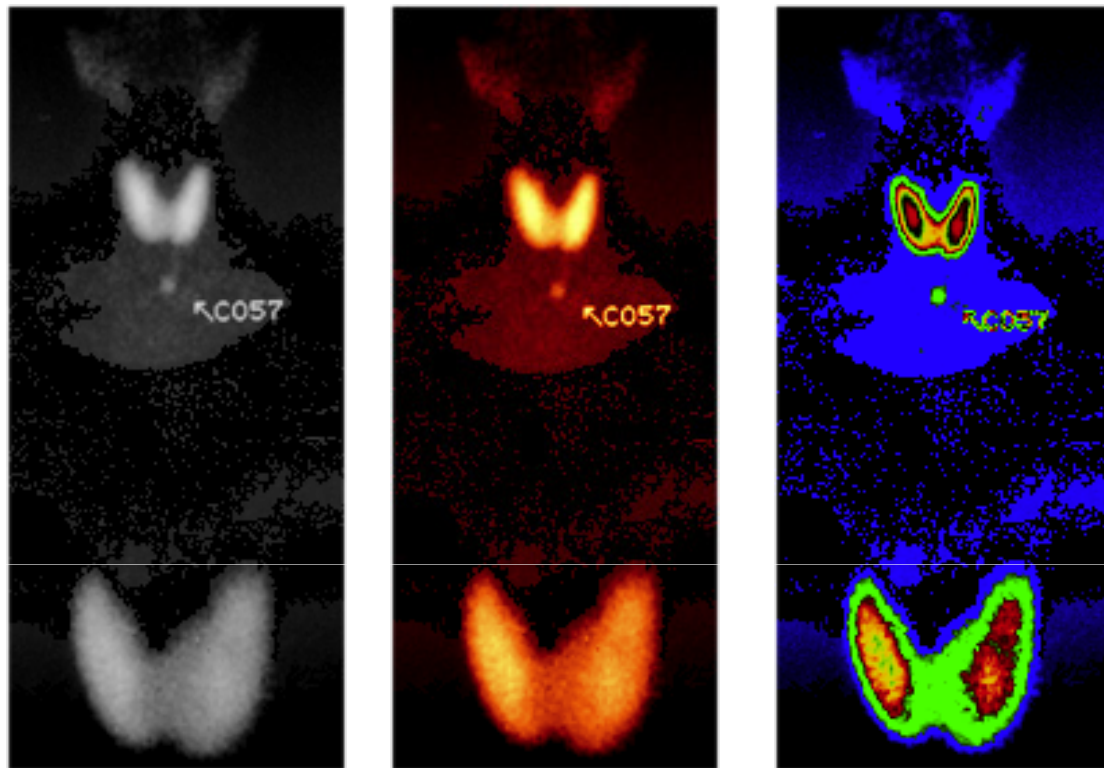


- Απεικόνιση ψευδοχρώματος θερμού σώματος (α).



- Γεωγραφική απεικόνιση ψευδοχρώματος (β).





(α)

(β)

(γ)

Απεικόνιση θυρεοειδούς με αποχρώσεις του γκρι (α), απεικόνιση θερμού σώματος (β) και “γεωγραφική” απεικόνιση (γ).

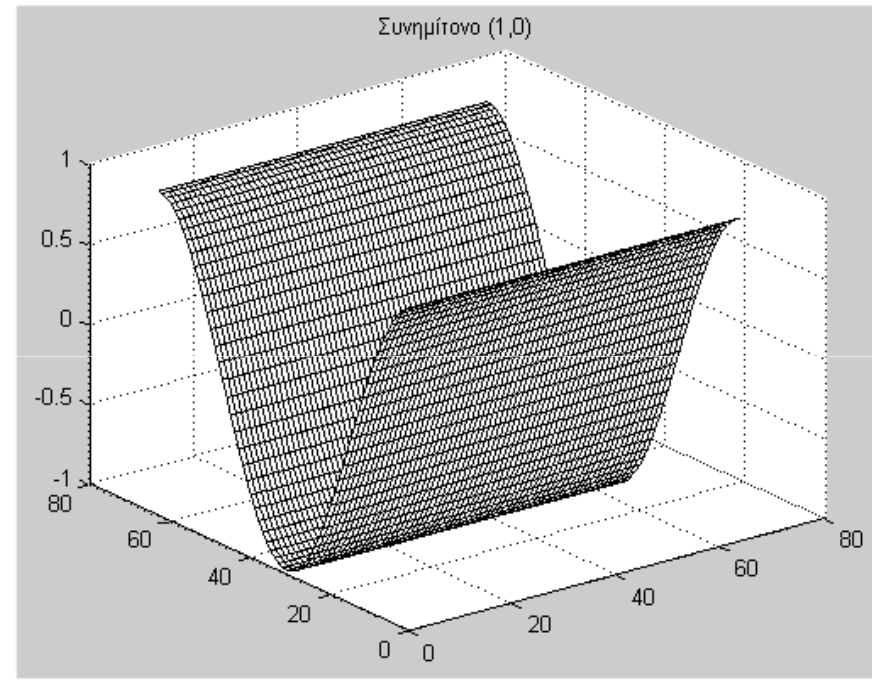
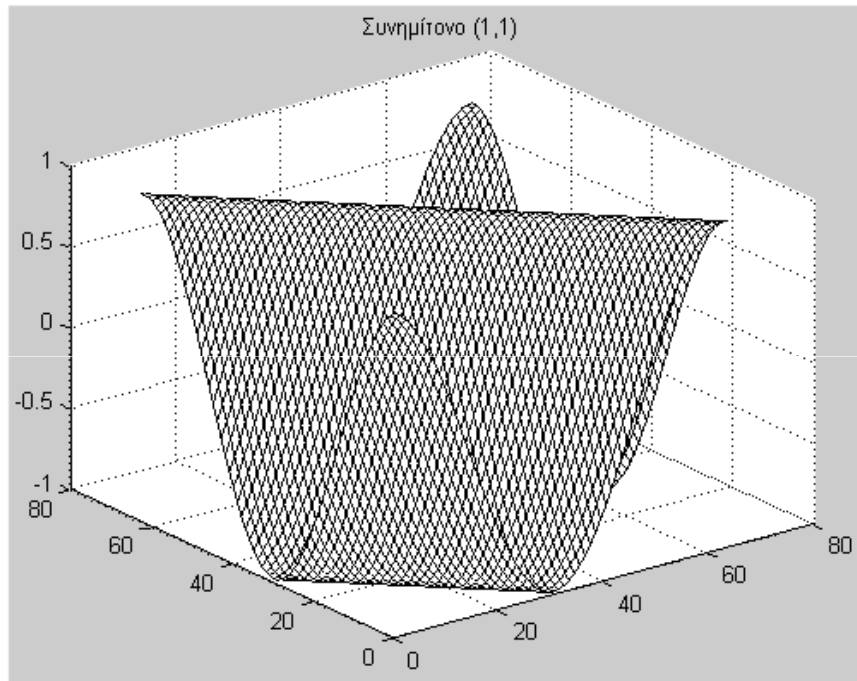
# Μετασχηματισμός Fourier (FT) σε δύο διαστάσεις (2D)

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός χρησιμοποιεί μία βάση συναρτήσεων για να υπολογίσει την προβολή της μετασχηματισμένης συνάρτησης σε κάθε μία από τις συναρτήσεις της Βάσης.
- Η Βάση συναρτήσεων που χρησιμοποιεί ο DFT 2D είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, επέκταση αυτών σε 1D.
  - Αν η συνάρτηση (εικόνα) που θα μετασχηματιστεί έχει διαστάσεις  $N \times M$ , τότε το πλήθος των συναρτήσεων της βάσης είναι  $N \times M$ .
  - Οι συναρτήσεις της βάσης είναι ορθογώνιες
  - Κάθε εικόνα  $N \times M$  μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων της βάσης. Οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού αποτελούν το φάσμα της εικόνας.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις βάσης του DFT για εικόνα  $N \times M$  είναι:

$$c_{uv}(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right), B_{uv}(x, y) = c_{uv}(x, y) + js_{uv}(x, y) = e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$
$$s_{uv}(x, y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

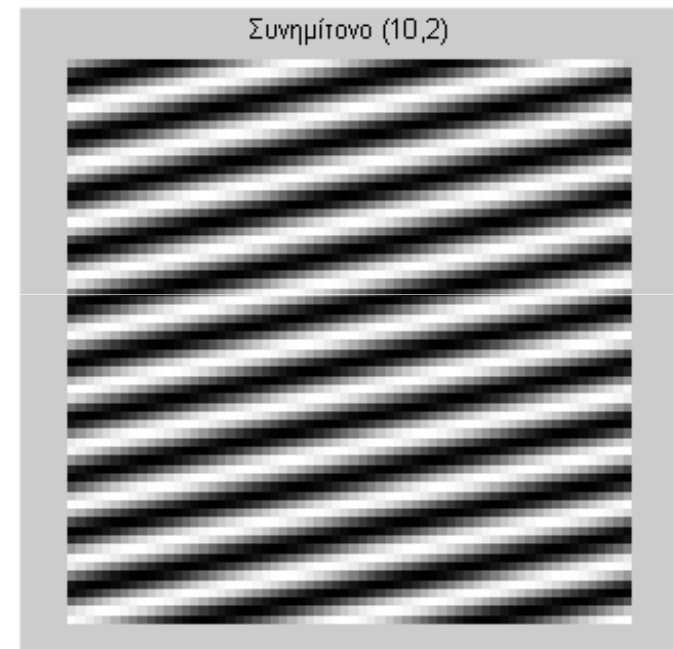
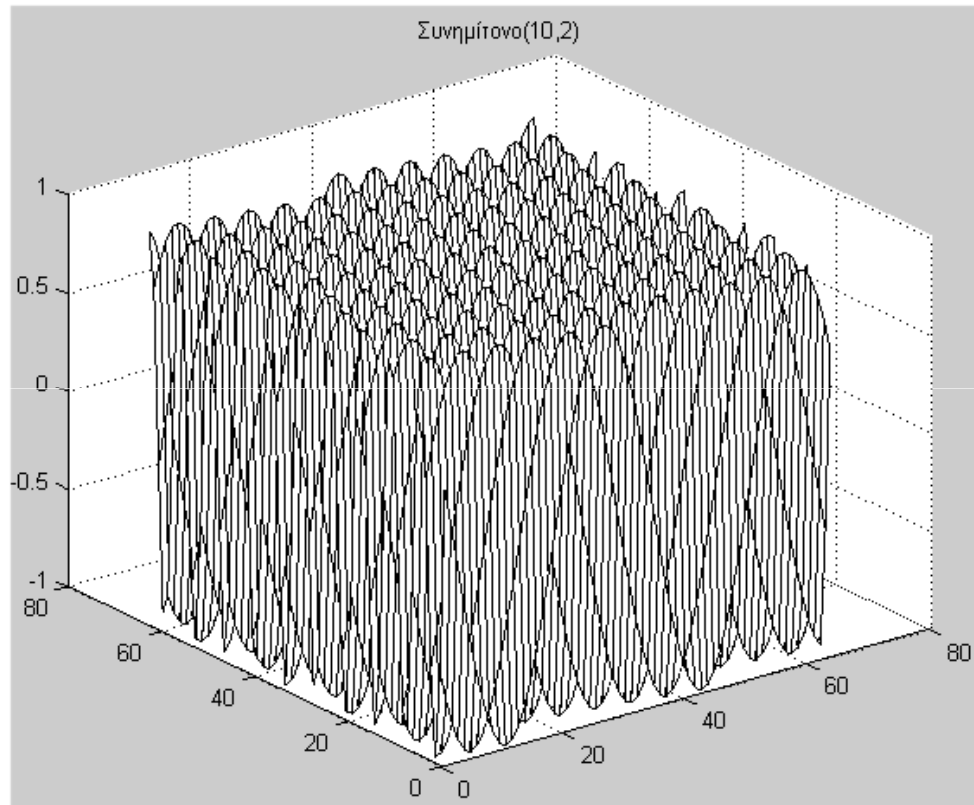
Κ. Δελήμπασης

# Παραδείγματα συναρτήσεων Τριγωνομετρικής Βάσης σε 2 διαστάσεις για $N \times M = 64 \times 64$



$$c_{uv}(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right), \quad u = 1, v = 1$$

$$s_{uv}(x, y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right), \quad u = 1, v = 0$$



$$c_{uv}(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right), \quad \begin{matrix} u = 10 \\ v = 2 \end{matrix}$$

# Η έννοια της χωρικής συχνότητας

- Η χωρική συχνότητα αποτελεί μέτρο του πόσο γρήγορα μεταβάλλονται οι τιμές μίας εικόνας.
- Παρατηρείστε ότι για η τριγωνομετρική συνάρτηση βάσης  $c_{10,2}(x,y)$  παρουσιάζει γρήγορη μεταβολή κατά τον άξονα X (10 πλήρεις περιόδους) και αργή μεταβολή κατά τον άξονα Y (2 περιόδους).
- Οι ακμές μίας εικόνας αποτελούν γρήγορες μεταβολές της τιμής της και αντιστοιχούν σε υψηλές χωρικές συχνότητες του φάσματος της. Μία εικόνα με ισχυρές ακμές παράλληλες με τον X άξονα θα εμφανίζει υψηλές τιμές στο φάσμα στις υψηλές χωρικές συχνότητες  $u$ .

# Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) σε 2 διαστάσεις (2D)

Ο διακριτός μετασχηματισμός μίας δισδιάστασης συνάρτησης  $f(x, y)$ , για  $x = 0, 1, 2 \dots M-1$  και  $y = 0, 1, 2 \dots N-1$ ,  $F(u, v)$ , ορίζεται ως εξής:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

όπου  $u = 0, 1, 2 \dots M-1$  and  $v = 0, 1, 2 \dots N-1$ .

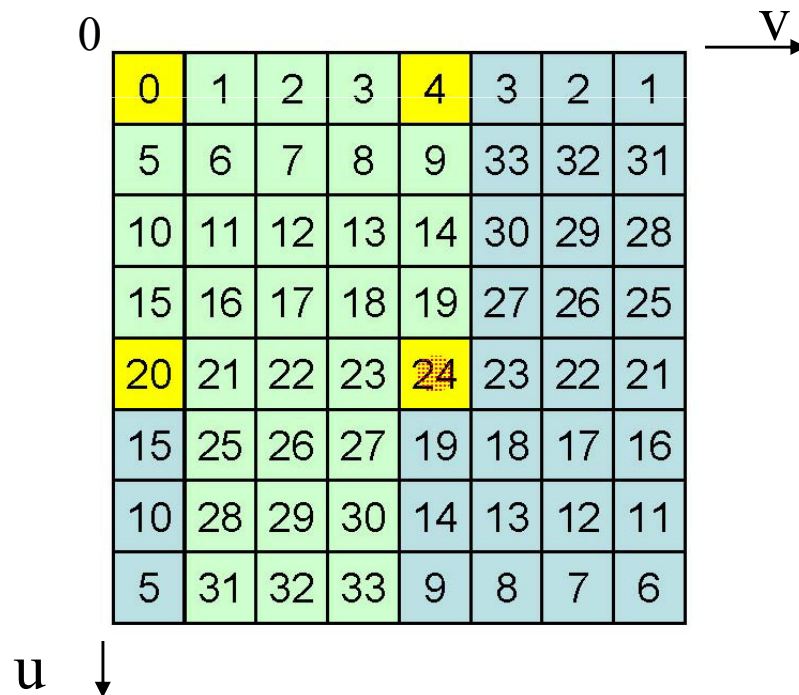
Χρησιμοποιώντας την σχέση του Euler  $\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left( \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) - j \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) \right)$$

- Το φάσμα  $F(u, v)$  μίας πραγματικής συνάρτησης είναι μιγαδικό και αποτελείται από συντελεστές συνημιτόνων (πραγματικό μέρος - REAL) και ημιτόνων (μιγαδικό -IMAGINARY):
  - $\alpha_{uv} = \text{REAL}(F(u, v))$
  - $\beta_{uv} = \text{IMAGINARY}(F(u, v))$
- Οι συντελεστές του φάσματος αποτελούν την προβολή (ή ισοδύναμα εσωτερικό γινόμενο) της εικόνας στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις της βάσης  $B_{uv}(x, y)$ .



- Το φάσμα  $F(u, v)$  παρουσιάζει μιγαδική συμμετρία, δηλ.:
  - $\text{REAL}(F(u, v)) = \text{REAL}(M-u, N-v)$
  - $\text{IMAGINARY}(F(u, v)) = -\text{IMAGINARY}(M-u, N-v)$ .
- Αν θεωρήσουμε την μηδενική συχνότητα  $(0,0)$  πάνω αριστερά στο φάσμα, η συνήθης συμμετρία που παρουσιάζεται για άρτιο αριθμό στηλών και γραμμών είναι όπως στο σχήμα



Τα ζεύγη πράσινων και μπλε pixel με τους ίδιους αριθμούς αποτελούν συζηγή ζεύγη. Τα κίτρινα pixel είναι πραγματικοί αριθμοί. Το DC σημείο (μηδενικής συχνότητας) είναι η πάνω αριστερή γωνία (με αριθμό 0).

# Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier –Inverse DFT- IDFT

- Ο IFT ανακατασκευάζει την εικόνα  $f(x,y)$  από το φάσμα της  $F(u,v)$ .

$$f(x,y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^M \sum_{v=0}^N F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} =$$

$$\frac{1}{NM} \sum_{u=0}^M \sum_{v=0}^N \left( \text{real}(F(u,v)) \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) + \text{imaginary}(F(u,v)) \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) \right)$$

- Δηλ/ παρατηρούμε ότι κάθε εικόνα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα των συναρτήσεων της Βάσης, πολλαπλασιασμένων με το πραγματικό μέρος (συνημιτονικές βάσεις) και το φανταστικό μέρος του φάσματος (ημιτονικές βάσεις).
- Η ανακατασκευή βασίζεται στο γεγονός ότι η  $f(x,y)$  μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων της βάσης, οι συντελεστές του οποίου έχουν υπολογιστεί κατά τον ευθύ DFT.

# Αριθμητικό παράδειγμα FT σε 2D

- Εστω εικόνα  $f(x,y)$  διαστάσεων  $2 \times 2$   $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Το σύνολο των συναρτήσεων βάσης είναι

$$\mathbf{B} = \{B_{uv}(x,y)\} = \{B_{00}(x,y), B_{01}(x,y), B_{10}(x,y), B_{11}(x,y)\}$$

$$u=0, v=0 \Rightarrow B_{00}^*(x,y) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{2} + \frac{vy}{2}\right)} = e^{-j2\pi\left(\frac{0x}{2} + \frac{0y}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u=0, v=1 \Rightarrow B_{01}^*(x,y) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{2} + \frac{vy}{2}\right)} = e^{-j2\pi\left(\frac{0x}{2} + \frac{1y}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u=1, v=0 \Rightarrow B_{10}^*(x,y) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{2} + \frac{vy}{2}\right)} = e^{-j2\pi\left(\frac{1x}{2} + \frac{0y}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u=1, v=1 \Rightarrow B_{11}^*(x,y) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{2} + \frac{vy}{2}\right)} = e^{-j2\pi\left(\frac{1x}{2} + \frac{1y}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Παρατηρείστε ότι οι συναρτήσεις της βάσης είναι ορθοκανονικές

- Το φάσμα της  $f(x,y)$ ,  $F(u,v)$ , υπολογίζεται ως εξής:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left( \cos \left( 2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right) - j \sin \left( 2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right) \right) =$$

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) B_{uv}^* \Rightarrow$$

$$F(0, 0) = SUM(fB_{00}) = SUM \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{5}{2}$$

$$F(0, 1) = SUM(fB_{01}) = SUM \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = -1$$

$$F(1, 0) = SUM(fB_{10}) = SUM \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$F(1, 1) = SUM(fB_{11}) = SUM \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Παρατηρήσεις:

- Ο συντελεστής της συχνότητας  $(0,0)$  είναι ίσος με την μέση τιμή της  $f$ .
- Όλες οι τιμές του φάσματος της  $f$  είναι πραγματικοί αριθμοί, διότι  $N=M=2$  (βλ. επεξήγηση για συζυγή συμμετρία).

- Η ανακατασκευή της εικόνας γίνεται με χρήση του αντίστροφου FT:

$$f(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) B_{uv} \Rightarrow$$

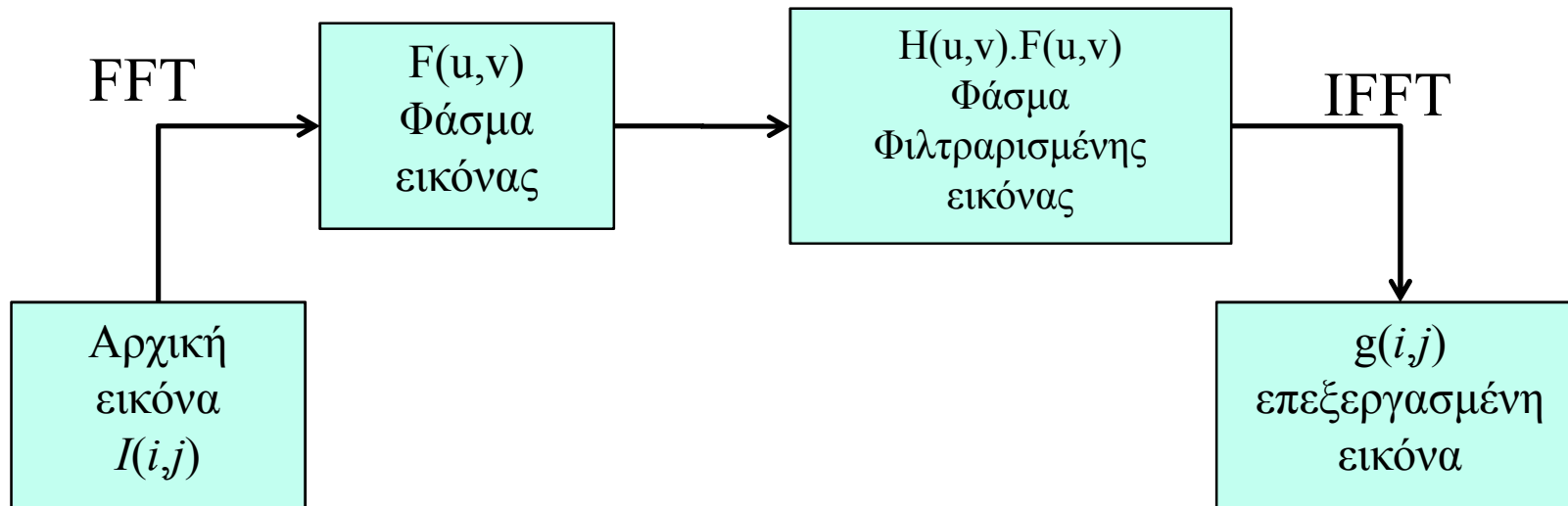
$$f = F(0, 0)B_{00} + F(1, 0)B_{10} + F(0, 1)B_{01} + F(1, 1)B_{11} =$$

$$\frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

# Αρχή της επεξεργασίας εικόνας στο χώρο της συχνότητας

- Η επεξεργασία εικόνας στο χώρο της συχνότητας βασίζεται στο θεώρημα υλοποίησης της συνέλιξης



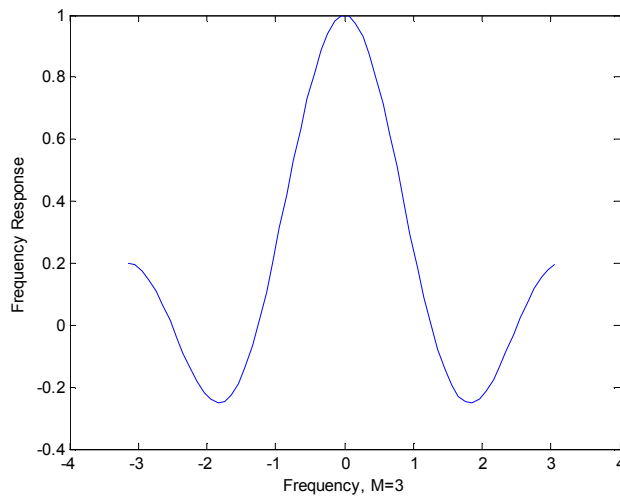
## Υπολογισμός απόκρισης συχνότητας του φίλτρου τρέχουσας μέσης τιμής σε 1D

Η μάσκα τρέχοντος μέσου όρου συμπεριφέρεται σαν χαμηλοπερατό με μειούμενους λοβούς στις υψηλές συχνότητες.

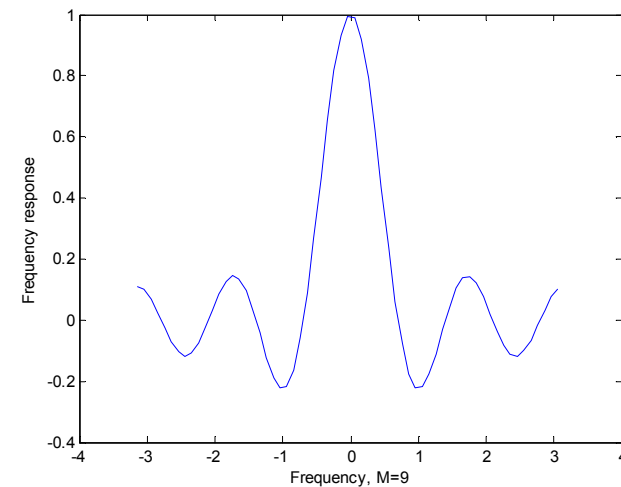
Για διευκόλυνση των υπολογισμών, θεωρούμε αρχικά την μονοδιάστατη περίπτωση.

$$\begin{aligned}y(n) &= \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x(n-k) \Rightarrow h(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \delta(n-k) \Rightarrow \\H(e^{-j\omega}) &= \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) e^{-jn\omega} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e^{-jk\omega} = \frac{1}{M+1} \frac{1 - e^{-j(M+1)\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \\&= \frac{1}{M+1} \frac{e^{-j\frac{(M+1)\omega}{2}} \left( e^{+j\frac{(M+1)\omega}{2}} - e^{-j\frac{(M+1)\omega}{2}} \right)}{e^{-j\omega\frac{1}{2}} \left( e^{+j\omega\frac{1}{2}} - e^{-j\omega\frac{1}{2}} \right)} = \frac{1}{M+1} e^{-j\frac{M}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{(M+1)}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$H(e^{-j\omega}) = \frac{1}{M+1} e^{-j\frac{M}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{(M+1)\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \Rightarrow |H(e^{-j\omega})| = \frac{1}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{(M+1)\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



απόκριση συχνότητας του  
φίλτρου τρέχουσας μέσης  
τιμής 3 σημείων



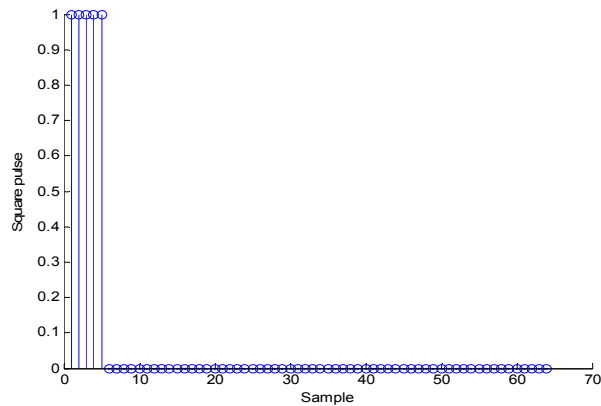
απόκριση συχνότητας του  
φίλτρου τρέχουσας μέσης  
τιμής 5 σημείων

Κ. Δελήμασης

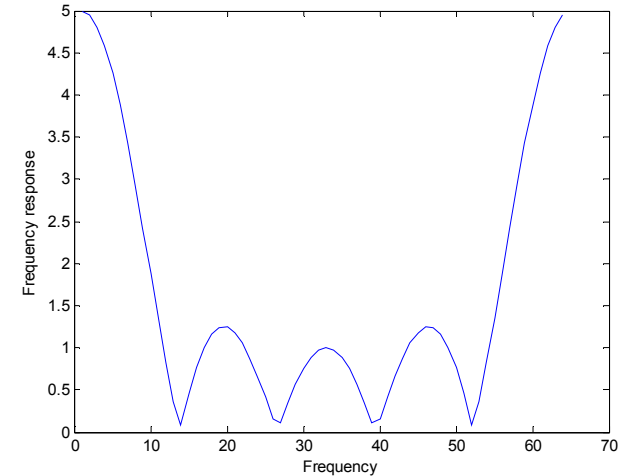
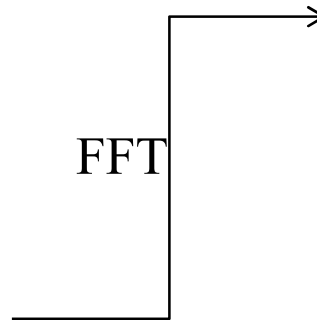


# Η απόκριση συχνότητας για το τετραγωνικό παράθυρο τρέχουσας μέσης τιμής

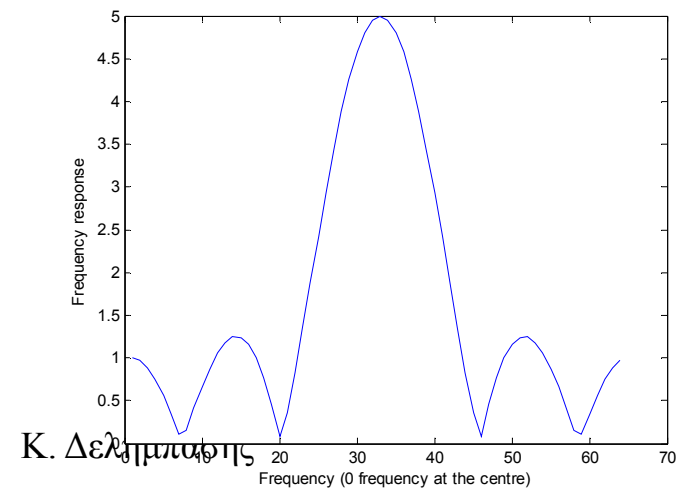
- jkjd



Μάσκα 1x5, με zero padding έως 64 σημεία

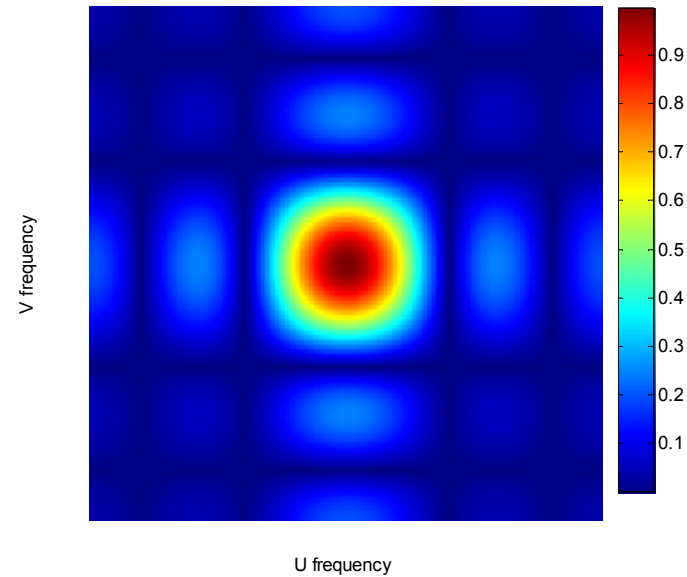


Απόκριση συχνότητας με τη μηδενική συχνότητα στα άκρα (πάνω σχήμα) και στο κέντρο (κάτω σχήμα)



Κ. Δημητρίου

$$mask = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



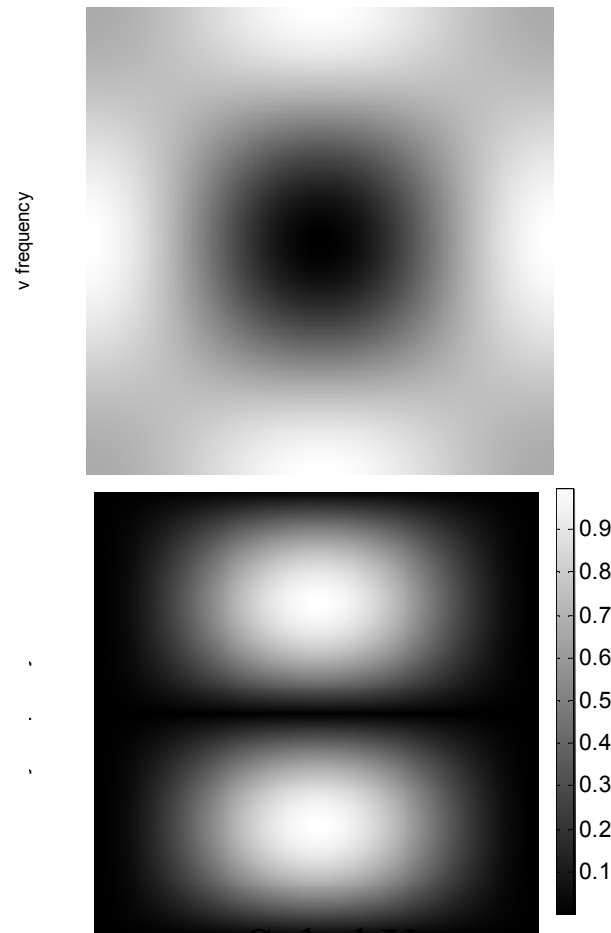
Το φάσμα της μάσκας με zero-padding σε διάσταση 256x256. Η μηδενική συχνότητα (DC) βρίσκεται στο κέντρο.

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα βαθυπερατό φίλτρο με λοβούς μειούμενου ύψους στις υψηλές συχνότητες.

Κ. Δελήμπασης

$$Laplacian = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$SobelX = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Απόκριση συχνότητας της Λαπλασιανής μάσκας και της Sobel X με zero-padding σε διάσταση 256x256. Η DC συχνότητα στο κέντρο βρίσκεται στο κέντρο.

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για υπερπαρατά φίλτρα.

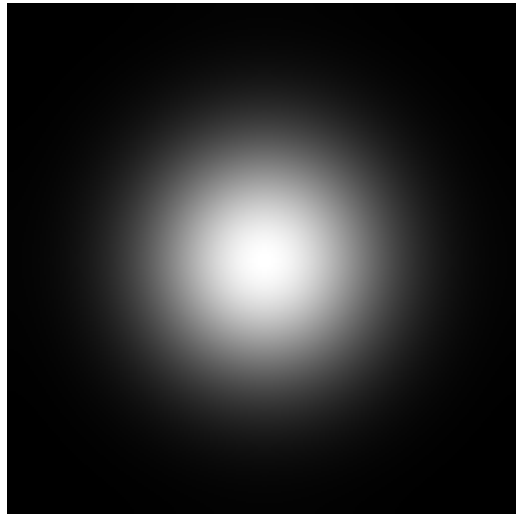
# Ο FT της γκαουσιανής μάσκας

- Ας θεωρήσουμε τον 1D συνεχή FT και ας τον εφαρμόσουμε σε μία 1D gaussian.

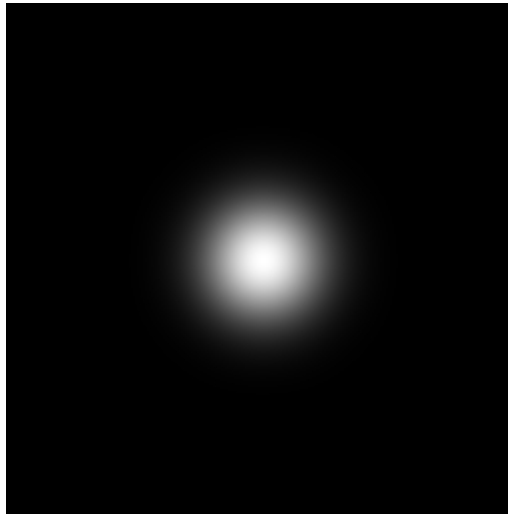
$$g(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(\omega x) dx - j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin(\omega x) dx = \sqrt{\frac{1}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

- Παρατηρούμε ότι ο FT μίας γκαουσιανής είναι μία νέα γκαουσιανή με αντίστροφη διασπορά  $\sigma$ .
- Παρακάτω δίνεται το μέτρο του φάσματος γκαουσιανών με  $\sigma=1, 2$  και  $4$ , αρχικού μεγέθους μάσκας  $7 \times 7, 13 \times 13$  και  $25 \times 25$  με zero padding σε  $256 \times 256$ .

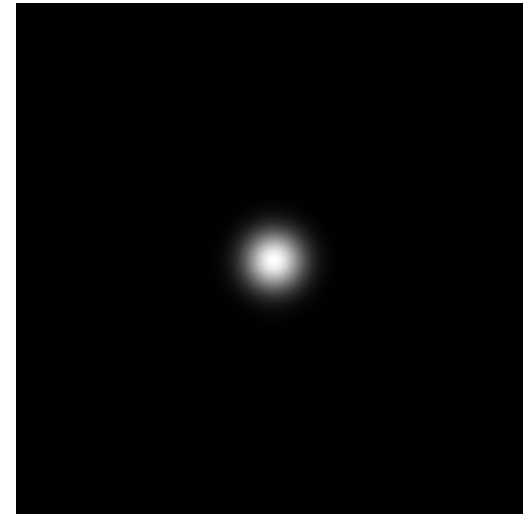
Frequency Response, sigma=1



Gaussian Frequency Response, sigma=2



Frequency Response Gaussian, sigma=4

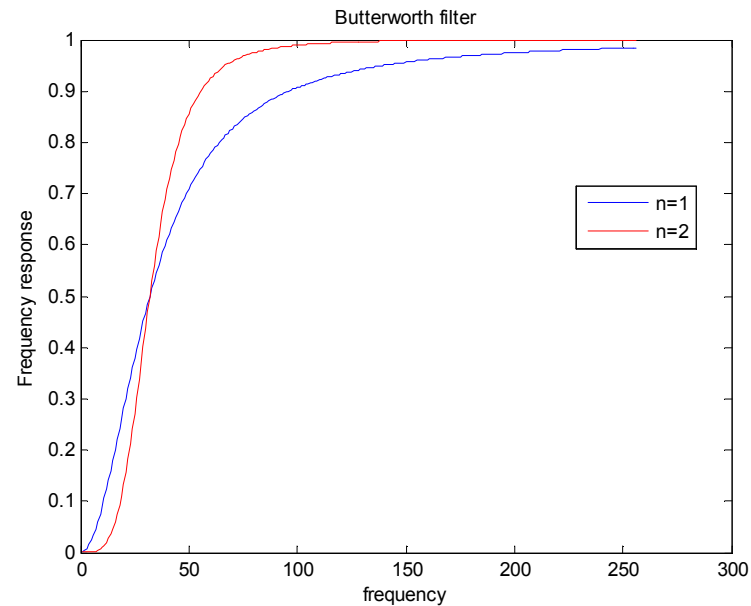


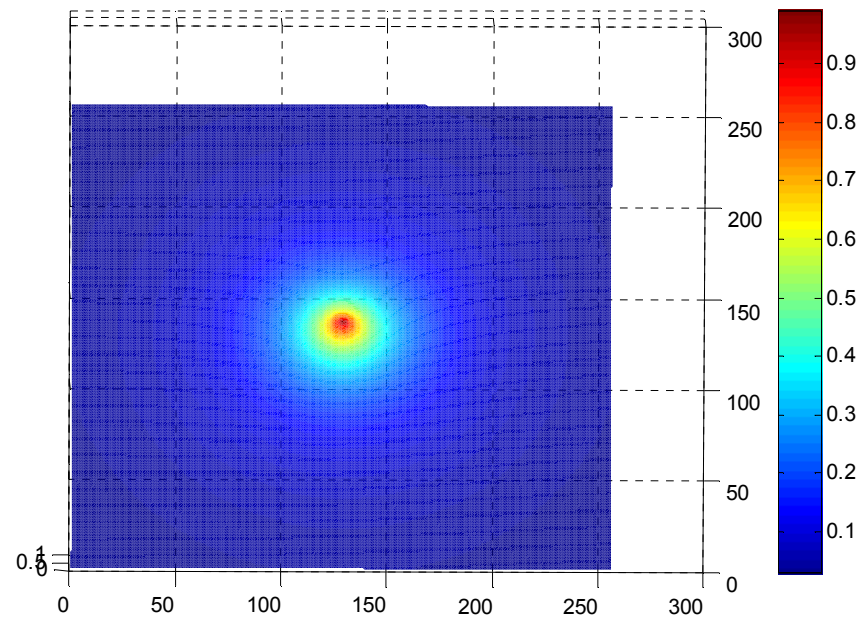
# Το φίλτρο Butterworth

- Το φίλτρο Butterworth μπορεί να υλοποιηθεί ως χαμηλοπερατό και υψιπερατό.
- Η τιμή της συχνότητας αποκοπής  $C$  εμφανίζει απόκριση συχνότητας ίση με 0,5.
- Ο εκθέτης  $n$  ονομάζεται τάξη του φίλτρου και καθορίζει το εύρος της ζώνης διάβασης

$$B(u, v) = \frac{1}{1 + \left( \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{C} \right)^{2n}} : \text{Χαμηλοπερατό}$$

$$B(u, v) = \frac{1}{1 + \left( \frac{C}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{2n}} : \text{Υψιπερατό}$$





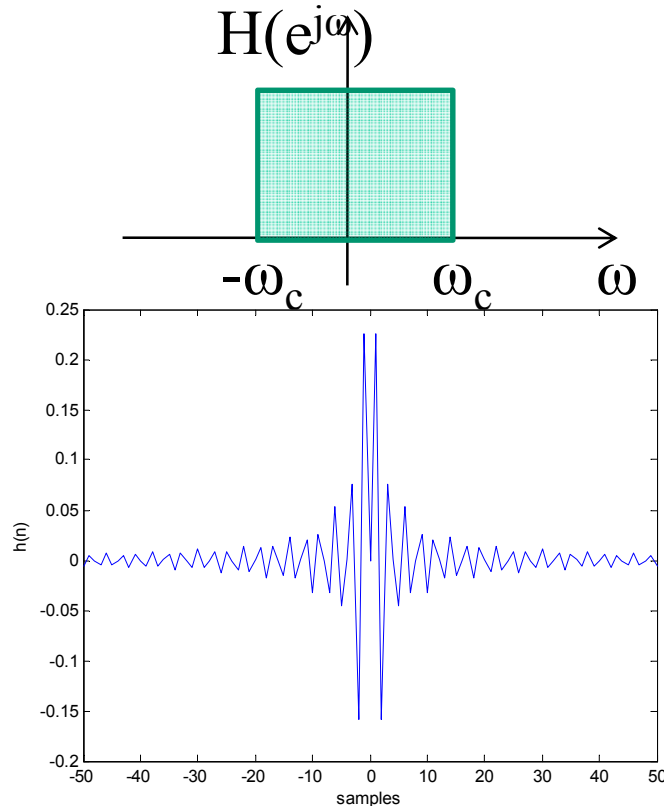
Βαθυπερατό Butterworth

Τάξη=1, DC στο κέντρο, αποκοπή=32

Κ. Δελήμπασης

# Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο συχνοτήτων

- Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$  έχει απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$



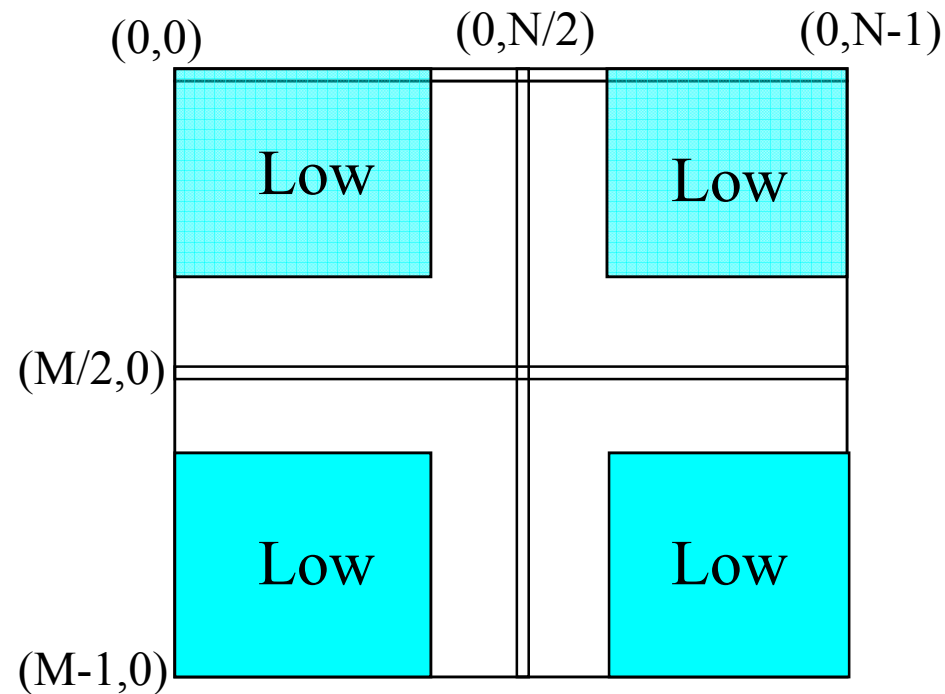
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{nj} e^{jn\omega} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \\ &= \frac{1}{\pi n} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \end{aligned}$$

Η κρουστική απόκριση  $h(n)$  για  $\omega_c = \pi/4$

# Μηδενισμός χαμηλών συχνοτήτων – Ιδανικό highpass φίλτρο σε 2D

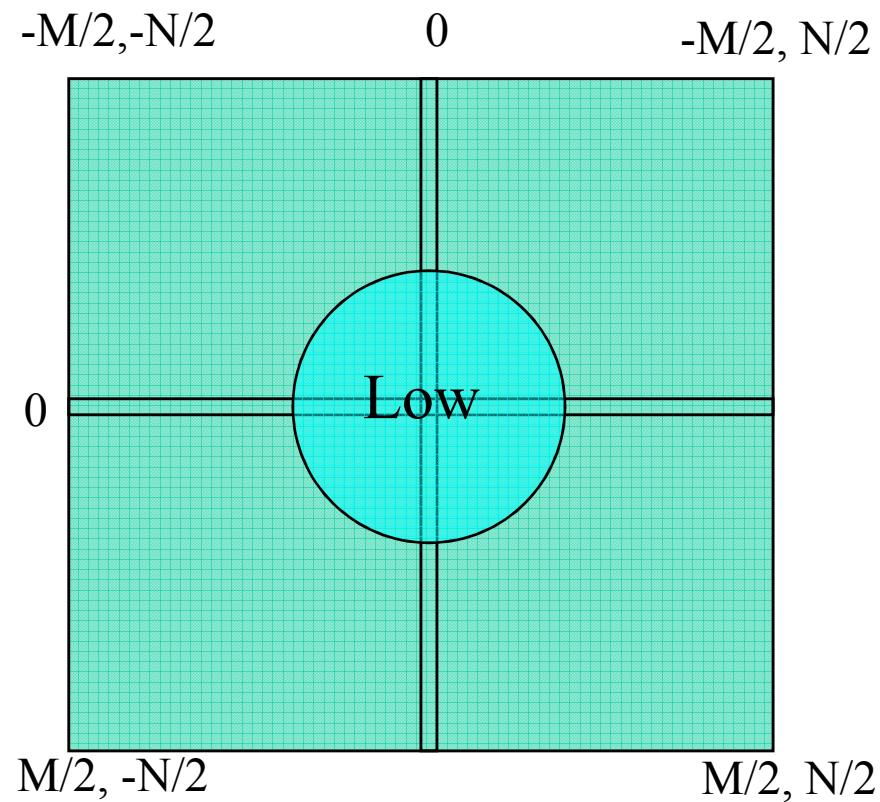
- Ορισμός ζώνης χαμηλών (low frequency) και υψηλών συχνοτητων (high frequency) στο φάσμα της εικόνας  $M \times N$ .
- Μηδενική συχνότητα στην πάνω αριστερή γωνία του φάσματος.



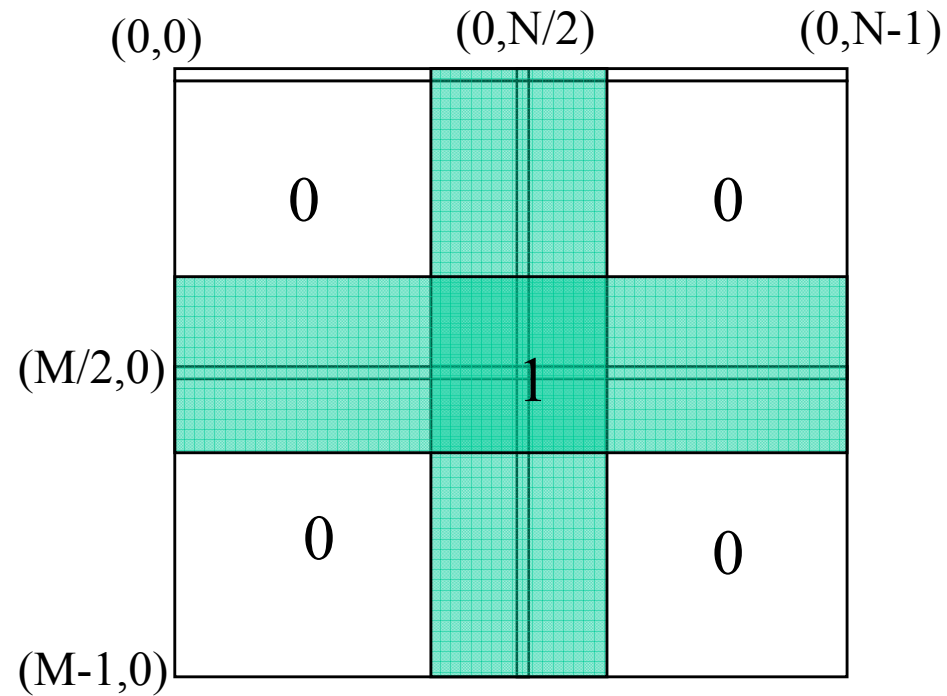
Κ. Δελήμπασης



2ος εναλλακτικός ορισμός  
Μηδενική συχνότητα στο κέντρο του φάσματος



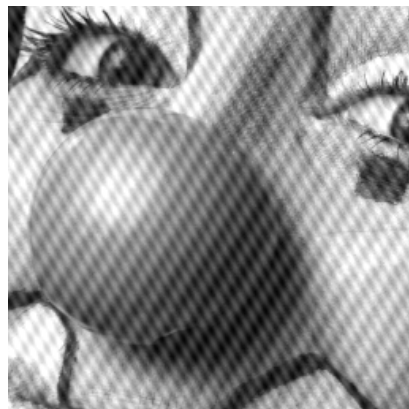
## Ιδανικό υπερερατό φίλτρο σε 2 διαστάσεις



- Μηδενική συχνότητα στην πάνω αριστερή γωνία του φάσματος.

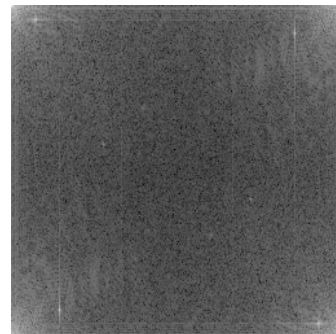
# Παράδειγμα Bandstop φίλτρου για συμπίεση περιοδικού θορύβου

- Ο περιοδικός θόρυβος εμφανίζεται συχνά σαν περιοδική μεταβολή της τιμής των pixel. Στο φάσμα της εικόνας θα εμφανίζεται σαν κορυφές σε υψηλές συχνότητες.

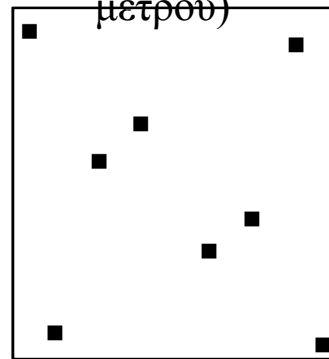


Αρχική εικόνα με περιοδικό θόρυβο

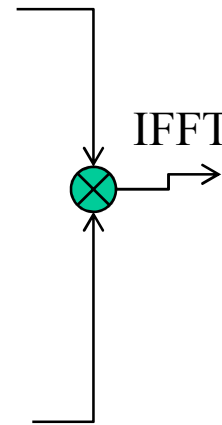
FFT



Φάσμα (λογάριθμος μέτρου)



Bandstop φίλτρο



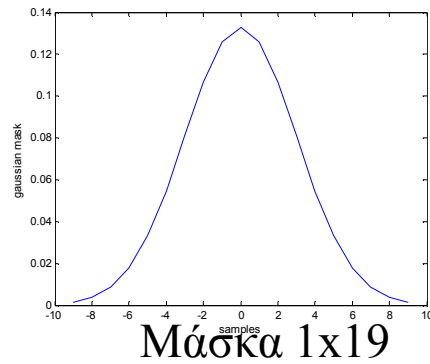
Επεξεργασμένη εικόνα

# Λεπτομέρειες υλοποίησης Συνέλιξης στο πεδίο των συχνοτήτων

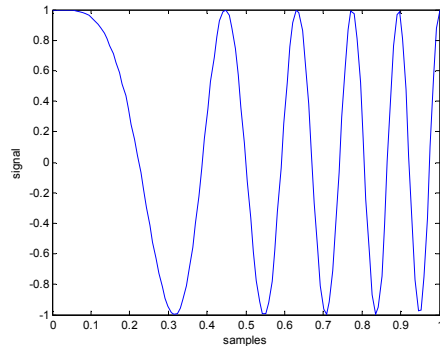
$$y = x * h \Leftrightarrow Y = X \times H$$

- Αν  $\mathbf{x}: N \times N$ ,  $\mathbf{h}: M \times M$  τότε  $x * h: (N+M-1) \times (N+M-1)$
  - Συνήθως:  $N > M$
  - Για να υπάρξει χώρος για την επιπλέον πληροφορία στο φάσμα Fourier, οι εικόνες συμπληρώνονται με «0» (zero padding), ως εξής:
    - $\mathbf{x}: N \times N$  σε  $(N+M-1) \times (N+M-1)$  (\*)
    - $\mathbf{h}: M \times M$  σε  $(N+M-1) \times (N+M-1)$  (\*)
- (\*) Σε περίπτωση που εφαρμόζεται FFT το  $(N+M-1)$  αντικαθίσταται από τον πρώτο ακέραιο, δύναμη του 2, μεγαλύτερο του  $(N+M-1)$

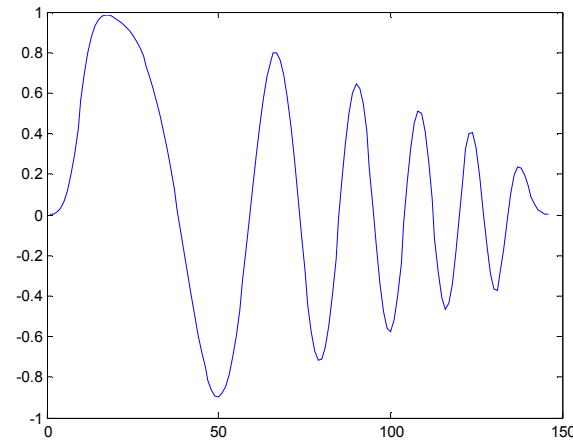
# Παράδειγμα Συνέλιξης (μία διάσταση 1D) στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων



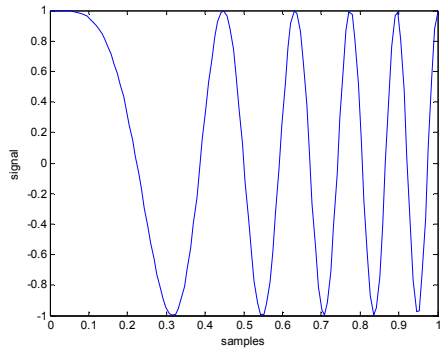
Μάσκα 1x19



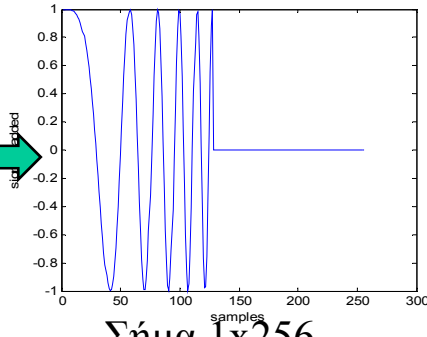
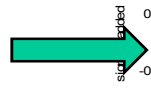
Σήμα 1x128



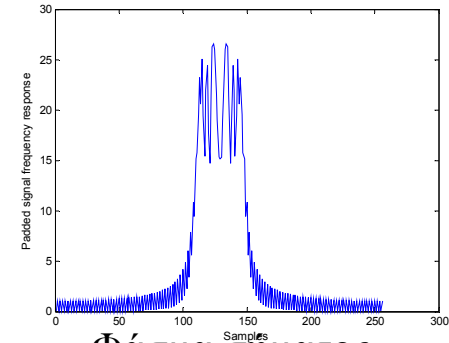
Αποτέλεσμα Συνέλιξης  
(Σήμα \* Μάσκα)



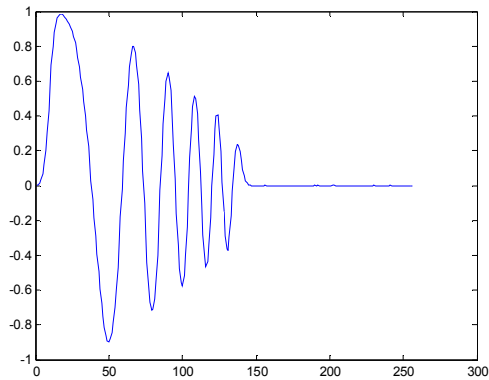
Σήμα 1x128



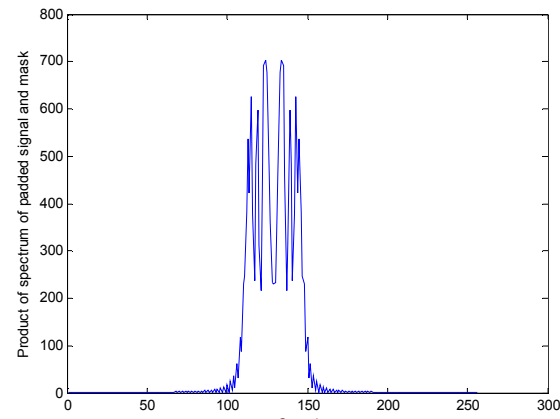
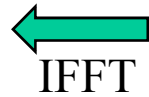
Σήμα 1x256  
zero padding



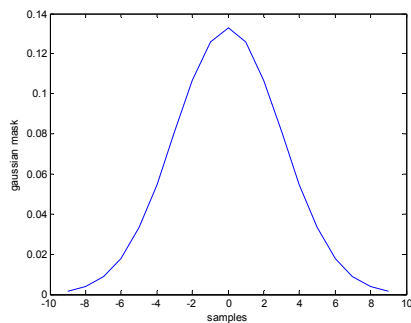
Φάσμα σήματος  
1x256



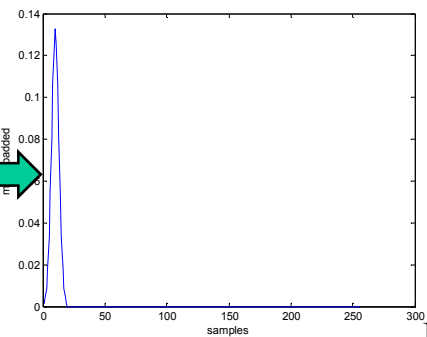
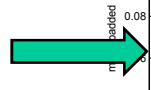
Αποτέλεσμα Συνέλιξης (Σήμα  
\* Μάσκα)



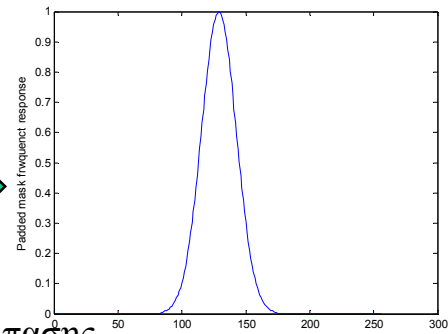
Φάσμα σήματος x  
Φάσμα μάσκα 1x256



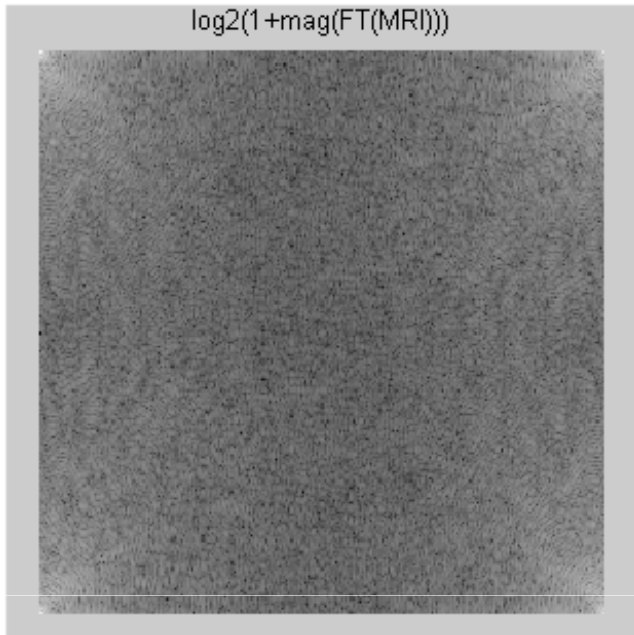
Μάσκα 1x19



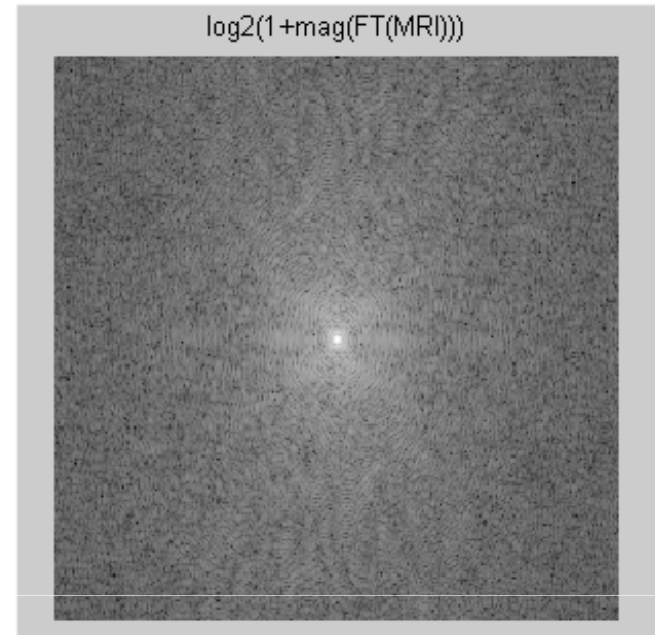
Μάσκα 1x256  
zero padding



Κ. Δελήμπασης  
Φάσμα μάσκα  
1x256



Log μετασχηματισμός



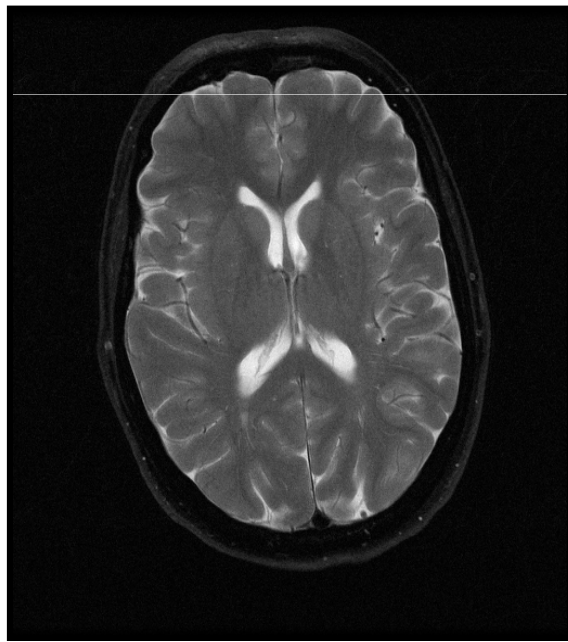
Log μετασχηματισμός με  
το DC στο κέντρο

- Συχνά ο συντελεστής της μηδενικής συχνότητας (DC) είναι πολύ μεγαλύτερος από τις άλλες συχνότητες του φάσματος. Για το λόγο αυτό εφαρμόζουμε το λογαριθμικό μετασχηματισμό, **μόνο για εποπτικούς λόγους**:

$$mag(u, v) = \log(1 + mag(u, v))$$

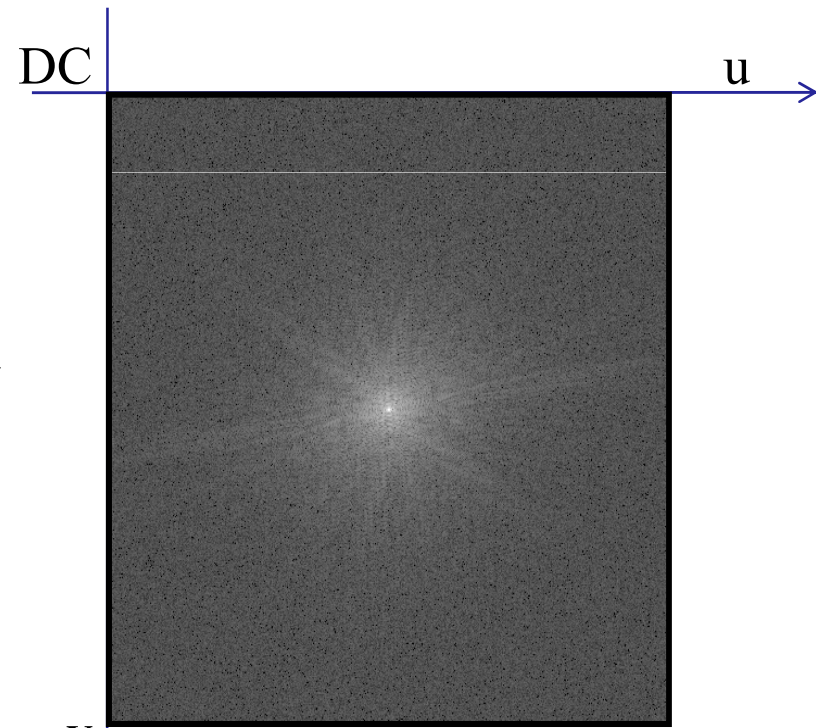
Κ. Δελήμπασης

# Παράδειγμα FT σε εικόνα MRI



Αρχική εικόνα

FFT  
→



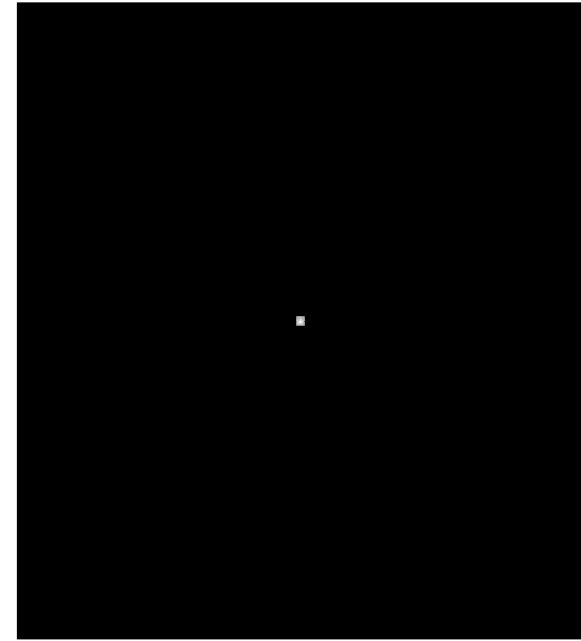
Μέτρο Φάσματος  
Κ. Δελήμπασης



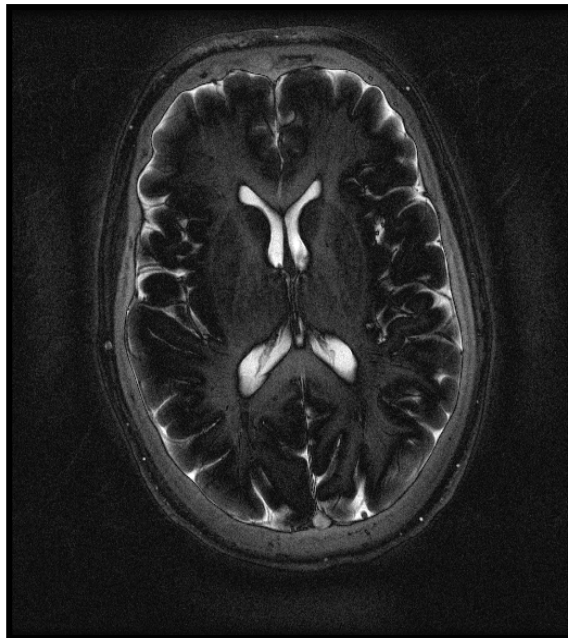


FFT  
IFFT

Βαθυπερατό φίλτρο

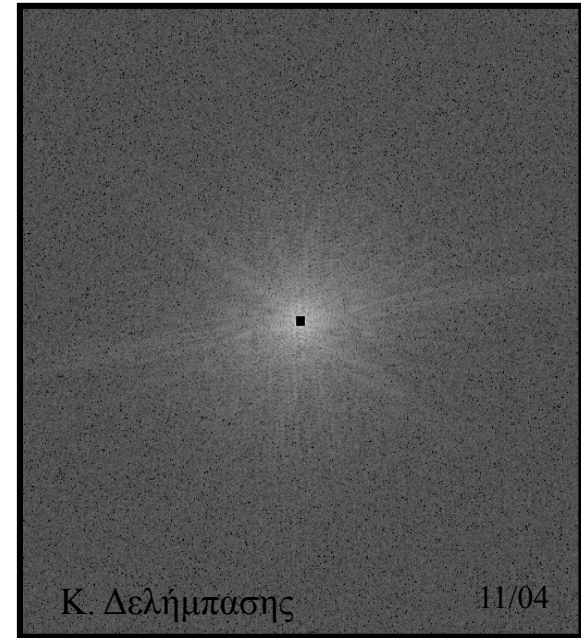


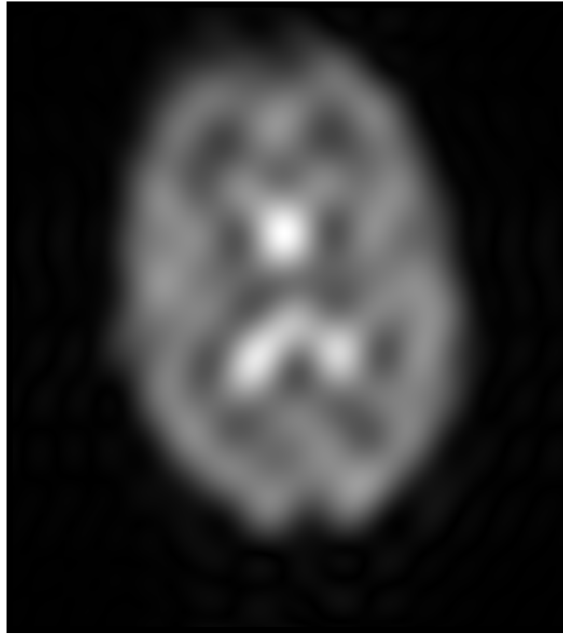
8x8 συχνότητες από 512x512



FFT  
IFFT

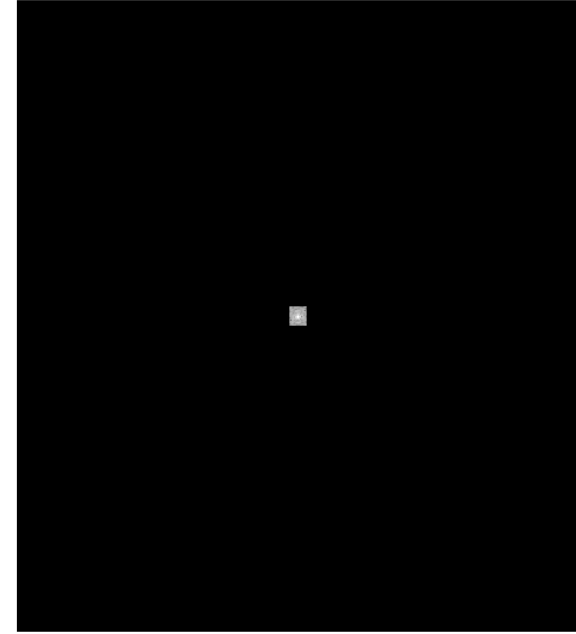
Υψιπερατό φίλτρο



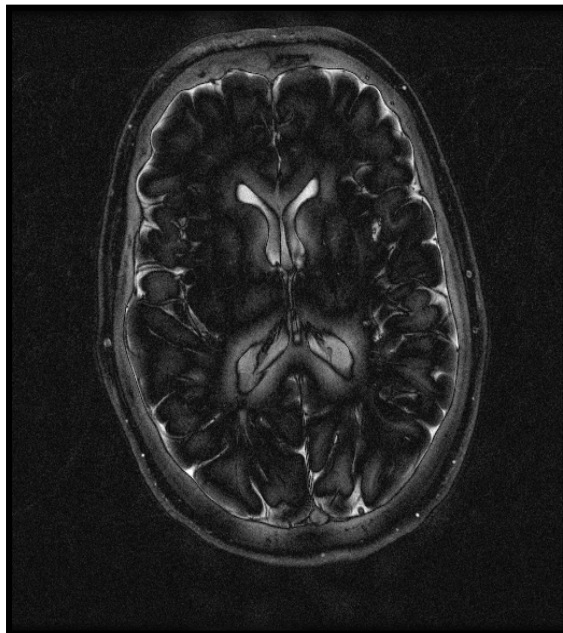


FFT  
IFFT

Βαθυπερατό φίλτρο

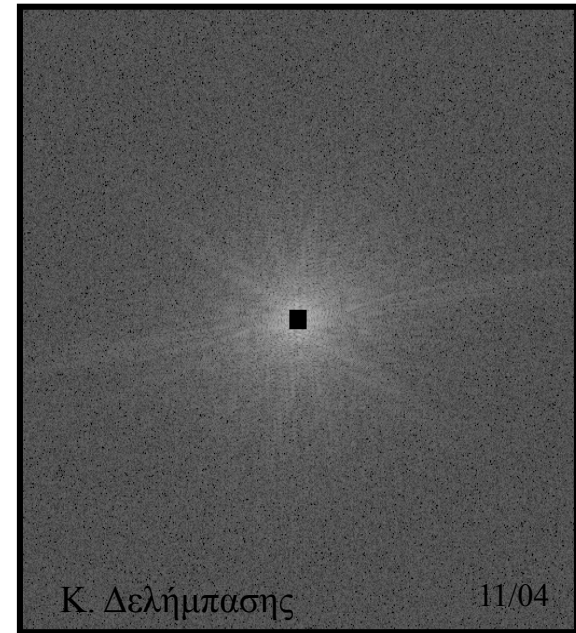


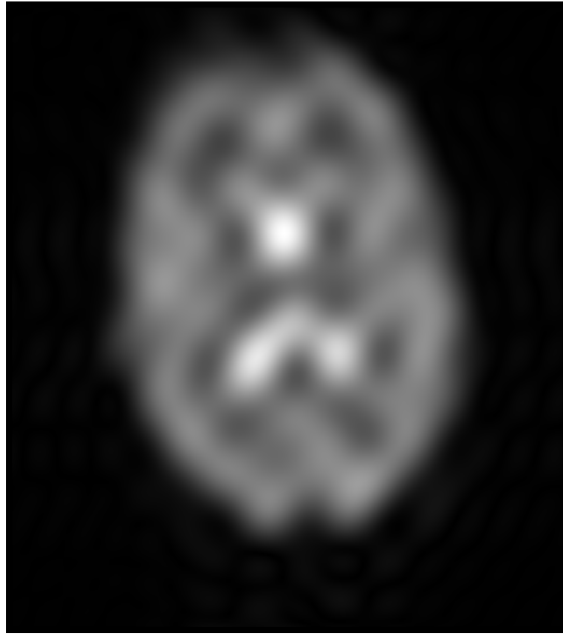
16x16 συχνότητες από 512x512



FFT  
IFFT

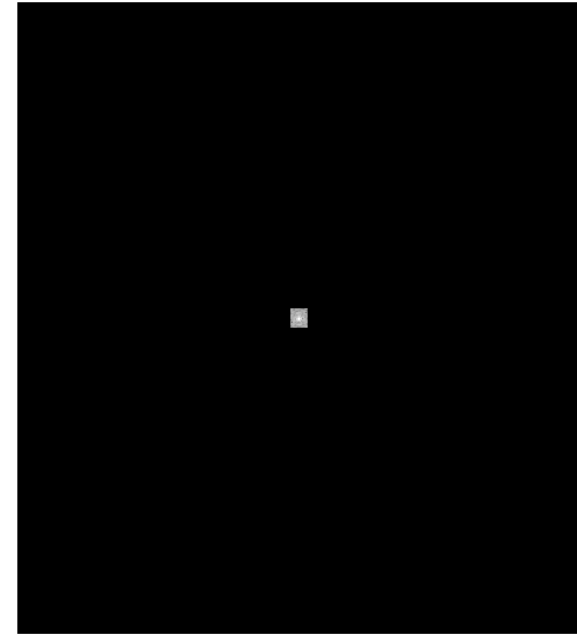
Υψιπερατό φίλτρο



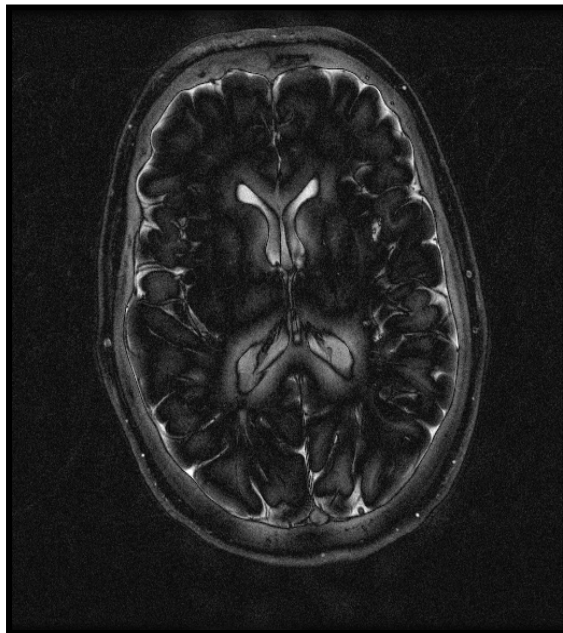


FFT  
IFFT

Βαθυπερατό φίλτρο

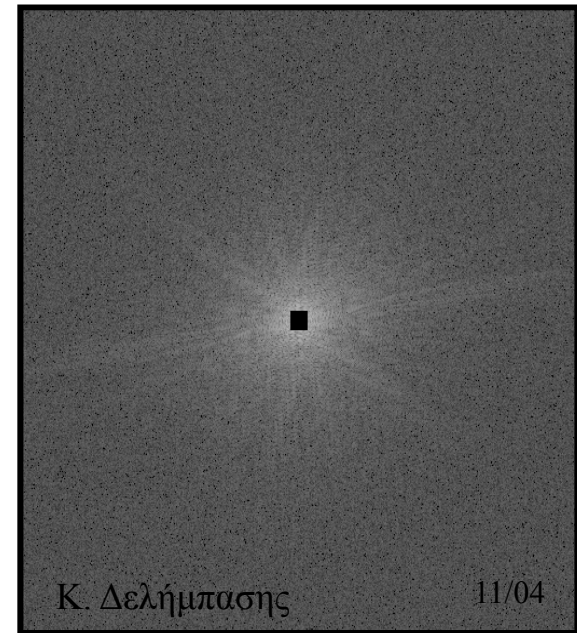


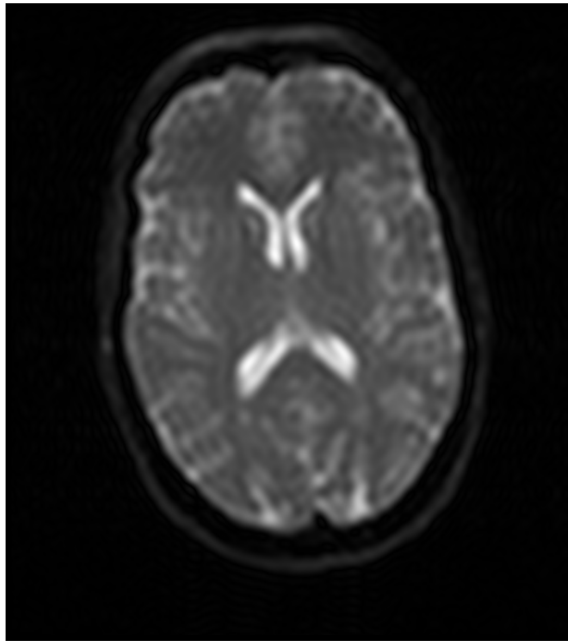
32x32 συχνότητες από 512x512



FFT  
IFFT

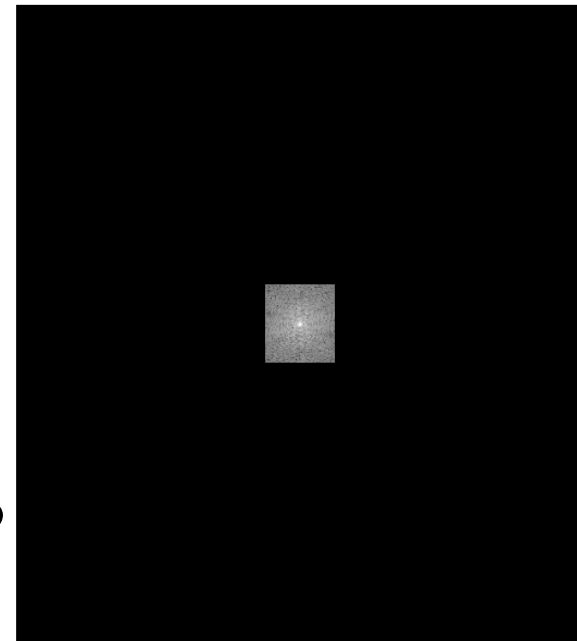
Υψιπερατό φίλτρο



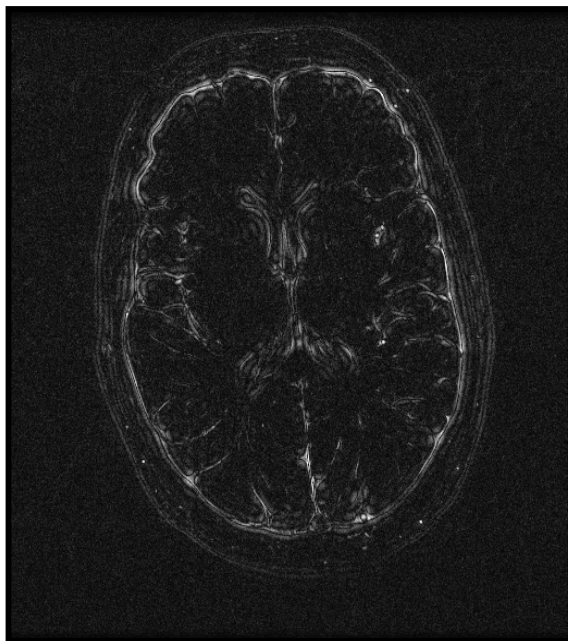


FFT  
IFFT

Βαθυπερατό φίλτρο

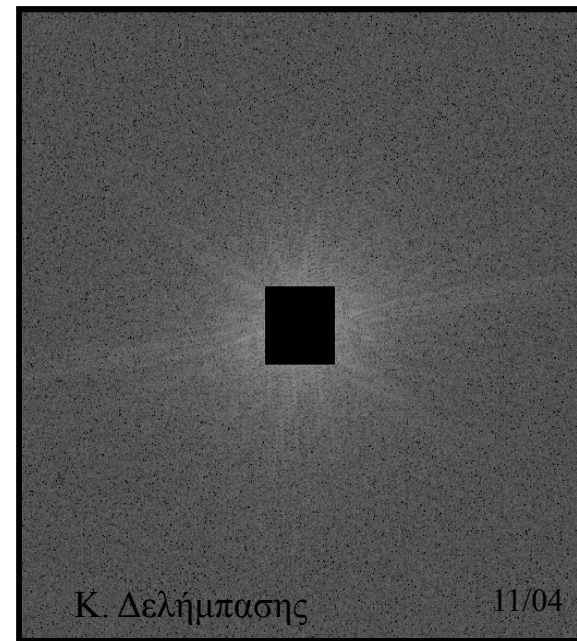


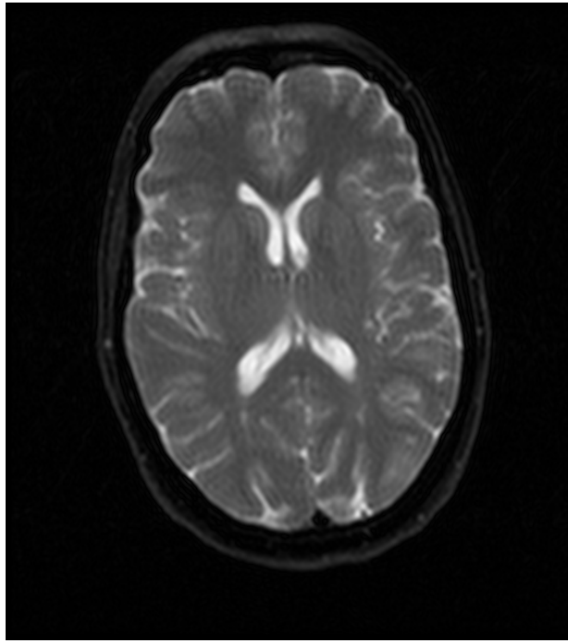
64x64 συχνότητες από 512x512



FFT  
IFFT

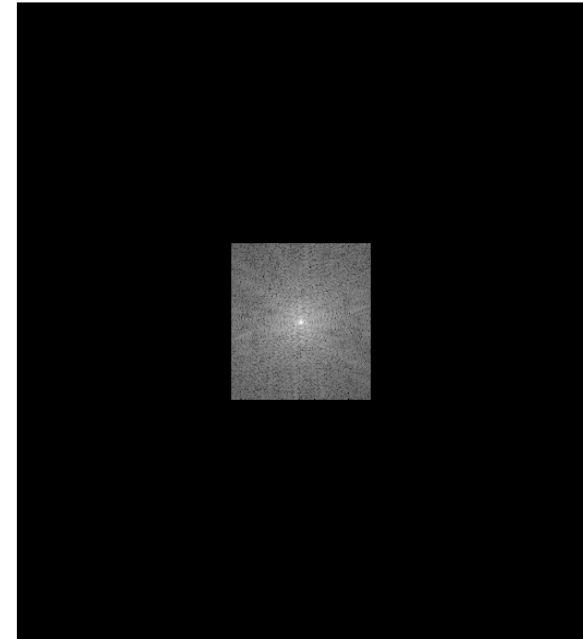
Υψιπερατό φίλτρο



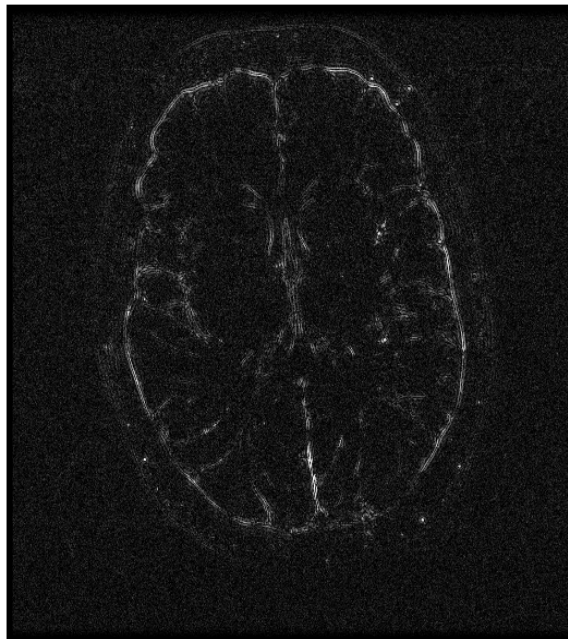


FFT  
IFFT

Βαθυπερατό φίλτρο

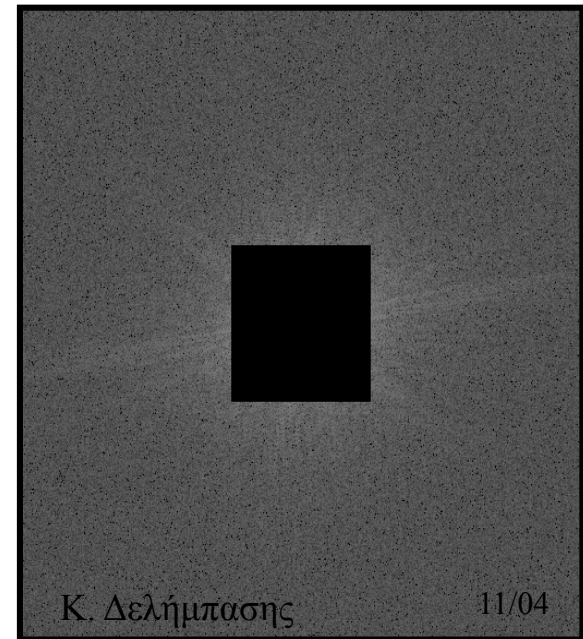


128x128 συχνότητες από 512x512



FFT  
IFFT

Υψιπερατό φίλτρο



# Βιβλιογραφία

- Digital Image Processing, Gonzalez, Wintz
- Ψηφιακή Επεξεργασία εικόνας, Ι. Πήττας