Κινηματική

Speed (διάνυσμα ταχύτητας), **velocity** (μέτρο ταχύτητας).

Μέση ταχύτητα: Δx/Δt.

Μέση επιτάχυνση: Δv/Δt.

Ευθύγραμμη κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη

$$v_2 - v_1 = \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt = a\left(t_2 - t_1\right) \Rightarrow v\left(t\right) = v_1 + at$$

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(v_1 + at\right) dt = \int_0^t v_1 dt + \int_0^t at dt = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

$$x\left(t\right) = x_0 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2$$

Βολή

$$x\left(t\right) = v_0 \cos\left(\theta_0\right) t$$

$$y\left(t\right) = v_0 \sin\left(\theta_0\right) t - \frac{1}{2}gt^2$$

Εξίσωση τροχιάς: $y\left(x\right) = \tan\left(\theta_0\right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0 \cos^2\left(\theta_0\right)}$

Συνολικός χρόνος πτήσης T: $0 = v_0 \sin\left(\theta_0\right) - gt$,

$$T = 2\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

Βεληνεκές: $R = Tv_0 \cos\theta_0 = 2\frac{v_0^2}{g}\cos\theta_0 \sin\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$

Παρατηρούμε ότι: $\sin 2\theta = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$. κ

Αρα, ίδιο βεληνεκές για συμπληρωματικές γωνίες βολής.

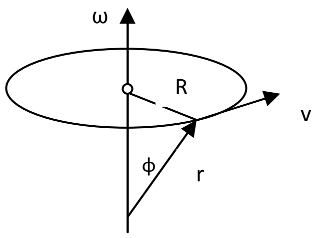
Ομαλή κυκλική κίνηση

Διάνυσμα θέσης $\vec{r}\left(\theta\right)=\vec{i}R\cos\theta+\vec{j}R\sin\theta$ λκξ

Εστω *u* το μέτρο της στιγμιαίας γραμμικής ταχύτητας. Τότε $\vartheta=ut/R$,

Γωνιακή ταχύτητα ω=d ϑ/dt=*u*/*R*→u=ωR

Διανυσματική περιγραφή της Γωνιακής ταχύτητας: **ω** διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της περιστροφής, με μέτρο ίσο με ω και φορά βάσει του δεξιόστροφου κοχλία.



Ευκολα διαπιστώνουμε ότι **v**(t)=**ω**(t) x **r**(t).

Μονάδα της Γωνιακής ταχύτητας: rad/sec or sec^{-1} (Hz).

$$\vec{r}\left(t\right)=\vec{i}R\cos\frac{ut}{R}+\vec{j}R\sin\frac{ut}{R}$$

Διάνυσμα στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}\left(t\right)=\frac{d}{dt}\vec{r}\left(t\right)=\vec{i}\left(-R\frac{u}{R}\sin\frac{ut}{R}\right)+\vec{j}\left(R\frac{u}{R}\cos\frac{ut}{R}\right)$ κξηξκ

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι $\vec{r}\left(t\right)\cdot\vec{v}\left(t\right)=0$

Διάνυσμα στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{a}\left(t\right)=\frac{d}{dt}\vec{v}\left(t\right)=\vec{i}\left(-\frac{u^2}{R}\cos\frac{ut}{R}\right)-\vec{j}\left(\frac{u^2}{R}\sin\frac{ut}{R}\right)$

Μέτρο της επιτάχυνσης: $\left|\vec{a}\left(t\right)\right|=\frac{u^2}{R}$

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι η επιτάχυνση έχει αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα θέσης, δηλ προς το κέντρο του κύκλου και ονομάζεται κεντρομόλος.

Μη Ομαλή κίνηση σε καμπύλη: Γενική περίπτωση

Το μέτρο της ταχύτητας δεν παραμένει σταθερό κατά την κυκλική κίνηση.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u_T}\,|v|\right) = \mathbf{u_T}\,\frac{d|v|}{dt} + |v|\frac{d\mathbf{u_T}}{dt}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα εκφράζεται ως:

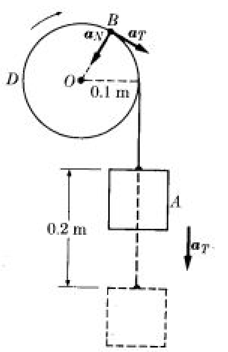
$$\mathbf{u_T} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi \Rightarrow \mathbf{u}_T \perp \mathbf{u}_N = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$$

$$\frac{d\mathbf{u_T}}{dt} = -\vec{i}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \vec{j}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u}_N\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u}_N\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{u}_N\frac{1}{\rho}|v|$$

Αρα: $\mathbf{a} = \mathbf{u_T}\underbrace{\frac{d|v|}{dt}}_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota\alpha} + \mathbf{u}_N\underbrace{\frac{|v|^2}{\rho}}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\mu\acute{o}\lambda o\varsigma}$

Παράδειγμα

Όταν t=0 τηταύτητα του A είναι v=0.04m/sec και 2sec έχει διανύσει 0.2m. Να βρεθεί η επιτάχυνση ενός σημείου της τροχαλίας σε τυχαία χρονική στιγμή.

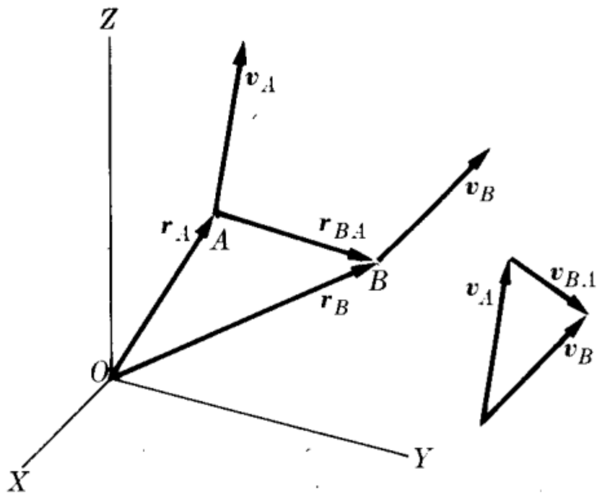


$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, s = 0.2, v_0 = 0.04m\sec^{-1}, t = 2\sec \Rightarrow a = 0.06m\sec^{-2}$$

Επιτρόχια επιτάχυνση: $a_T(t) = 0.06$

Κεντρομόλος επιτάχυνση: $a_N(t) = \dfrac{\left(0.04 + a_T t\right)^2}{\rho}$

Σχετική κίνηση



Θέση του B ως προς A: $r_{BA} = r_B - r_A$.

Θέση του A ως προς B: $r_{AB} = r_A - r_B$.

Ταχύτητα του B ως προς A: $v_{BA} = d\, r_{BA}/dt = dr_B/dt - d\, r_A/dt = v_B - v_A$.

Επιτάχυνση του B ως προς A: $\alpha_{BA} = d\, v_{BA}/dt = dv_B/dt - d\, v_A/dt = a_B - a_A$.

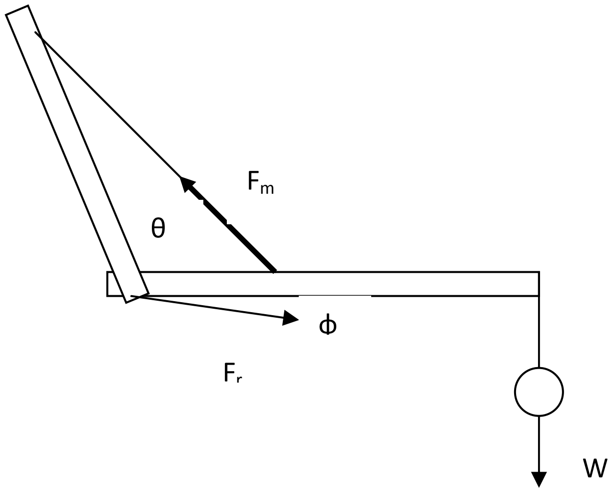
Πτώση με αντίσταση αέρα ανάλογη της ταχύτητας

$$mg - bv = ma \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\int \frac{b}{m} dt \Rightarrow \ln\left(v - \frac{mg}{b}\right) = -\frac{b}{m}t + C$$

$$t = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow C = \ln\left(-\frac{mg}{b}\right)$$

Στατική των αρθρώσεων: Παράδειγμα



Ο δικέφαλος μυς προσδένεται 4 cm από την άρθρωση του αγκώνα
Μήκος βραχίονα = 0.146H
Μήκος παλάμης = 0.1 H
Βάρος βραχίονα= 0.022B

$$X : F_m \cos\theta = F_r \cos\varphi$$

$$Y : F_m \sin\theta = W + F_r \sin\varphi$$

$$4cm.F_m \sin\theta = 40cm.W \Rightarrow F_m = \frac{10W}{\sin\theta} = 10.5W$$

$$ifW = 14kgr.g = 140N \Rightarrow F_m = 1440N$$

Δύναμη στην άρθρωση:

$$F_r \cos\varphi = 1440.\cos\theta = 430N$$

$$F_r \sin\varphi = W + 1440.\sin\theta = 1240N$$

$$|F_r| = 1320N$$

Η μέγιστη δύναμη είναι ανάλογη της PCA με σταθερά αναλογίας k=40N/cm^2.

Διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας σε 1 διάσταση

Μπορούμε να γράψουμε:

$$a = v\frac{dv}{dx}, \Rightarrow F = ma = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow Fdx = mvdv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} Fdx = m\int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x} Fdx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$-\int_{x_0}^{x} Fdx = \Delta U$: μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ x, x_0

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$: μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ x, x_0

Η ποσότητα $W = \int_{x_0}^{x} Fdx$ ονομάζεται έργο της δύναμης *F*. Αν W<0 τότε αφαιρείται κινητική ενέργεια από το σώμα. Αν W>0 τότε προστίθεται κινητική ενέργεια στο σώμα.

Μονάδες: N.m=Joule (προσοχή ίδιες διαστάσεις με ροπή,αλλά διαφορετική φυσική σημασία).

ΔU+ΔK=0 → Το αλγεβρικό άθροισμα της μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι 0, εφόσον οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι συντηρητικές (διατηρητικές).

Ισοδύναμα: U2 - U1 + K2 - K1=0 → U2 +U1 = K1+K2 → Το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας, = Μηχανική ενέργεια, είναι σταθερό, όταν όλες οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι διατηρητικές.

Ισοδύναμα: ΔK=W: η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το έργο της συνισταμένης δύναμης που δρα σε αυτό.

Σε 2 ή 3 διαστάσεις, το έργο μίας δύναμης ορίζεται ως: $W = \int_c \vec{F}d\vec{r}$

Δυναμική ενέργεια: η ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο σε μία θέση (x,y,z) του πεδίου δυνάμεων U(x,y,z)=U(**r**). Βαθμωτή ποσότητα.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Αν υπάρχει η βαθμωτή ποσότητα U, έτσι ώστε να ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε το πεδίο δυνάμεων λέγεται διατηρητικό. Ισοδύναμα $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ σε κάθε σημείο του πεδίου.

Προσοχή: Η δυναμική ενέργεια U είναι διαφορετική από το δυναμικό V:

- Βαρυτικό δυναμικό: U=mV, μονάδες δυναμικού: Joule/kgr
- Ηλεκτρικό δυναμικό: U=mV, μονάδες δυναμικού: Joule/coulomb

Ορισμός του eV: η ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο που επιταχύνεταο από ηλεκτρικό πεδίο με διαφορά δυναμικού = 1Volt:

1eV= 1Volt. 1.6 10^{-17} Coulomb=1 J/Cb 1.6 10^{-17} = 1.6 10^{-17} Joule

eV και μάζα: E=mc2 → m=M/ c^2.

Μάζα ηρεμίας του πρωτονίου: 1GeV/c^2.

Μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου: 511keV/ c^2.

Μονάδα ατομικής μαζας 1 amu = 931.46 MeV/c^2=1/12 της μάζας του πυρήνα του άνθρακα 12= 1.660538921(73)×10^{-27}kg.

Ενέργεια φωτονίου με συχνότητα f, μήκος κύματος λ: *E= hf = h/T =hc/λ*

Σταθερά Planck : *h*=6.62606957×10^{-34} J·s = 4.135667516×10^{-15} eV·s

Παράδειγμα: Εξετάστε αν το βαρυτικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια της γης είναι διατηρητικό.

$$U = mgz \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = -mg\vec{k}$$

$$curl\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

Εργο που απαιτείται για παραμόρφωση ελατηρίου

Εστω αβαρές ελατήριο με σταθερά k. Το έργο που απαιτείται για να συμπιεστεί (ή να εκταθεί) το ελατήριο κατά x από την θέση ηρεμίας του είναι W:

$$W = \int_0^x \vec{F} d\vec{x} = -\int_0^x F dx = -\int_0^x kx dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας K-K0 = W, ενώ μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ΔU=-W.

Εργο που απαιτείται για μάζεμα σχοινιού

Ομογενές σχοινί μήκους *L* και μάζας *M* είναι αφημένο ώστε ένα μέρος του *αL* να κρέμεται, α<1, ενώ το υπόλοιπο είναι σε οριζόντια επίπεδο. Να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να τραβήξουμε με σταθερή ταχύτητα το σχοινί στο οριζότιο επίπεδο.

Α τρόπος: μάζα σχοινιού που κρέμεται: αLM/L=αM. Η μάζα αυτή έχει κέντρο μάζας αL/2 χαμηλότερα από το οριζόντιο επίπεδο → Μεταβολή δυναμικής ενέργειας= g αM αL/2= gα^2ML/2.

Α τρόπος:

$$W = \int_0^{aL} F dx = \int_0^{aL} m\frac{x}{L} g dx = \frac{mg}{L}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{aL} = \frac{1}{2}mgLa^2$$

Εργο που απαιτείται για ανύψωση εκκρεμούς από οριζόνια δύναμη χωρίς επιτάχυνση, έως την γωνία φ_0.

$$\vec{F}d\vec{r} = \left(\vec{i}F + 0\vec{j}\right).\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = Fdx$$

Σε τυχαία θέση φ ως προς την κατακόρυφο:

$$T\cos\varphi = mg$$

$$F = T\sin\varphi = \frac{mg}{\cos\varphi}\sin\varphi = mg\tan\varphi$$

$$W = \int mg\tan\varphi dx = \int_{y=0}^{y=l(1-\cos\varphi_0)} mgdy = mgl\left(1-\cos\varphi_0\right) = mg\Delta h$$

Ισχύς

$$P=\frac{dW}{dt}=F\frac{dx}{dt}=Fv$$

1 Watt= 1 Newton.m/sec

1HP=746 Watt = 0.746kW

1kW.Hour= 1000 Newton x 3600 sec = 3.6 MJoule

Ορμή

$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{p}}{dt}$ → *Ο ρυθμόςμεταβολής της ορμής ενός σώματος = συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.*

Ωθηση δύναμης:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}d\left(m\vec{v}\right)=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\text{μεταβολή της ορμής}$$

Ωθηση της δύναμης = μεταβολή της ορμής

Παράδειγμα: Ποια δύναμη απαιτείται για να σταματήσει μάζα 1000 kgr από ταχύτητα 100km/h ?

Mv=FDt→F=1000kgr * 100.000m/3600sec=100000/3.2 Newton

Συστήματα μεταβλητής μάζας:

Εστω μάζα Μ με ταχύτητα v που την χρονική στιγμή τ0 εκτοξεύει μικρότερη μάζα dm u (ως προς το εργαστήριο).

Ορμή πριν: $\vec{p}_0 = M\vec{v}$

Ορμή μετά: $\vec{p}_1 = \left(M - dm\right)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\vec{u}$

$$dp = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \left(M - dm\right)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\vec{u} - M\vec{v} = -dm\vec{v} + Md\vec{v} - dmd\vec{v} + dm\vec{u} =$$

$$dm \underbrace{\left(\vec{u} - \vec{v}\right)}_{relative\,speed} + Md\vec{v} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\underbrace{\left(\vec{u} - \vec{v}\right)}_{relative\,speed} + M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u}_{rel} + M\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Αν θεωρήσουμε θετική κατεύθυνση παράλληλα με την $\vec{v}$:

$$\vec{F}_{ext} = -\frac{dm}{dt}u_{rel} + M\frac{dv}{dt}$$

(Το έχει ήδη θεωρηθεί αρνητικό και εδώ είναι η απόλυτη τιμή του).

Κίνηση πυραύλου με Fext=0.

$\vec{v}$:

$$\vec{F}_{ext} = -\frac{dm}{dt}u_{rel} + M\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow dv = u_{rel}\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{u_{rel}}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow$$

προς το εργαστήριο)

$$v - v_0 = \frac{1}{u_{rel}}\left(\ln m - \ln m_0\right) = \frac{1}{u_{rel}}\ln\left(\frac{m}{m_o}\right)$$

Κίνηση πυραύλου στο σταθερό πεδίο βαρύτητας:

$$-\frac{dm}{dt}u_{rel} + m\frac{dv}{dt} = -mg \Rightarrow dv = u_{rel}\frac{dm}{m} - mgdt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = u_{rel}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} - g\int_{0}^{t} dt \Rightarrow$$

$$v - v_0 = u_{rel}\left(\ln m - \ln m_0\right) - gt = u_{rel}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - gt = -u_{rel}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt$$

Κρούσεις: 1 διάσταση

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \Rightarrow m_1 \left(v_1 - v_{1f} \right) = m_2 \left(v_2 - v_{2f} \right)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2f}^2 \Rightarrow m_1 \left(v_1^2 - v_{1f}^2 \right) = m_1 \left(v_2^2 - v_{2f}^2 \right)$$

Διαιρώντας κατά μέλη: $v_1 + v_{1f} = v_2 + v_{2f} \Rightarrow v_{2f} = v_1 + v_{1f} - v_2$

$$m_1 v_{1f} = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_{2f} = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 \left(v_1 + v_{1f} - v_2 \right) = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1 - m_2 v_{1f} + m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_{1f} \left(m_1 + m_2 \right) = v_1 \left(m_1 - m_2 \right) + 2 m_2 v_2 \Rightarrow v_{1f} = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_{2f} = v_1 \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$A) m_1 = m_2 = m \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_2 \\ v_{2f} = v_1 \end{cases}$$

$B) m_1 << m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = -v_1 + 2 v_2 \\ v_{2f} = v_2 \end{cases}$. Επιπλέον, αν $v_2 = 0$ τότε $v_{1f} = -v_1$.

Εφαρμογή: Προστασία από νετρόνια

Υπολογίστε την απώλεια ενέργειας ενός νετρονίου που προσκρούει σε ακίνητο πυρήνα:

$$v_{1f} = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 0 \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} = v_1 \frac{m_1 - a m_1}{m_1 + a m_1} = \frac{1-a}{1+a} v_1$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{v_{1f}^2 - v_1^2}{v_1^2} = \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^2 - 1 = \frac{-2a}{\left(1+a\right)^2}$$

Α) Υδρογόνου (m2=m1): $= 0$ ΄λκ΄λ

$$= \frac{-2.12}{\left(1+12\right)^2} = -\frac{24}{169} = 0.28$$

$$= \frac{-2.206}{\left(1+206\right)^2} = -0.02$$

Β) Ανθρακα (m2=12m1)

Γ) Μολύβδου (m2=206m1)

Κρούση σε 2 διαστάσεις

Διατήρηση ενέργειας σε 2 άξονες

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1t} \cos f_1 + m_2 v_{2t} \cos f_2 \;\; (1)$$
$$m_1 v_{1t} \sin f_1 = m_2 v_{2t} \sin f_2 \;\; (2)$$

κινητική ενέργεια κατά την ελαστική κρούση

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1t}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2t}^2 \;\; (3)$$

Εχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους.

Εστω ότι m1=m2, f2=30

$$(1): v_1 - v_{1t} \cos f_1 = v_{2t} \cos f_2 \Rightarrow \left(v_1 - v_{1t} \cos f_1\right)^2 = \left(v_{2t} \cos f_2\right)^2 \Rightarrow$$
$$v_1^{\,2} - 2 v_1 v_{1t} \cos f_1 + v_{1t}^2 \cos^2 f_1 = v_{2t}^2 \cos^2 f_2$$
$$(2): v_{1t}^2 \sin^2 f_1 = v_{2t}^2 \sin^2 f_2 \;\; (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $v_1^{\,2} - 2 v_1 v_{1t} \cos f_1 + v_{1t}^2 = v_{2t}^2$

$$v_1^2 = v_{1t}^2 + v_{2t}^2 \;\; (3) \Rightarrow v_1^2 - v_{1t}^2 = v_{2t}^2$$

Από τις 2 τελευταίες παίρνουμε: κατά

$$v_1^{\,2} - 2 v_1 v_{1t} \cos f_1 + v_{1t}^2 = v_1^2 - v_{1t}^2 \Rightarrow 2 v_{1t}^{\,2} = 2 v_1 v_{1t} \cos f_1 \Rightarrow v_{1t} = v_1 \cos f_1$$
$$(3) \Rightarrow v_1^2 = v_{1t}^2 + v_{2t}^2 \Rightarrow v_{2t} = \sqrt{v_1^2 - v_1^2 \cos^2 f_1} = v_1 \sqrt{1 - \cos^2 f_1} = v_1 \sin f_1$$

Αντικαθιστώντας στην (2): $v_1 \cos f_1 \sin f_1 = v_{2t} \sin f_2 = v_1 \sin f_1 \sin f_2$

$$\Rightarrow \cos f_1 = \sin f_2 \Rightarrow f_1 + f_2 = \pi$$

Ετσι αποδεικνύεται ότι οι f1, f2 είναι παραπληρωματικές γωνίες όταν το 2^o σώμα είναι σε ηρεμία πριν την κρούση.

Βαλιστικό εκκρεμές

$$mv_0 = (m+M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m}{m+M}v_0$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = (m+M)gH \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2 = gH \Rightarrow v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gH}$$

Απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την πλαστική κρούση:

Σε μία μαούνα μάζας 10.000 kgr που κινείται με ταχύτητα 1m/sec πέφτει κατακόρυφα άμμος με ρυθμό 10kgr/sec.

Οριζόντια δύναμη αντίθετη στην ταχύτητα: F.Δt=v.Δm →F=v(Δm/Δt)=1m/sec 10kgr/sec=10N.

Αρα αν ο κινητήρας της μαούνας δεν λειτουργεί, η μαούνα κάνει ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση, όχι ομαλή.

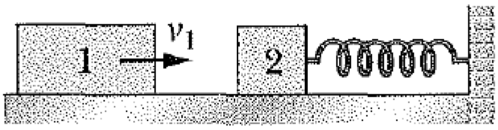
$$F = v\lambda = -(M+\lambda t)\frac{dv}{dt} \Rightarrow \lambda v dt = -(M+\lambda t)dv$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{\lambda dt}{(M+\lambda t)} \Rightarrow \ln\frac{v_0}{v} = \left[\ln\left(\frac{M}{\lambda}+t\right)\right]_0^t = \ln\left(\frac{M}{\lambda}+t\right) - \ln\left(\frac{M}{\lambda}\right) = \ln\left(1+\frac{\lambda}{M}t\right) \Rightarrow$$

$$v_0 - v = 1+\frac{\lambda}{M}t \Rightarrow v = v_0 - \left(\frac{\lambda}{M}+t\right)$$

Το σώμα 2 ηρεμεί σε επίπεδο χωρίς τριβές και το σώμα 1 συγκρούεται πλαστικά μαζί του. Να βρεθεί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου

K=200N/m



Διατήρηση της ορμής κατά την κρούση

$$v_1 = 4m/\sec, m_1 = 2kgr, m_2 = 1kgr$$

$$m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2\right) v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{2}{1+2} 4 = \frac{2}{3} 4m/\sec$$

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(v_2\right)^2$$

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μετά την κρούση

$$v_2 = \frac{2}{1+2} 4 = \frac{2}{3} 4m/\sec$$

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(v_2\right)^2 \Rightarrow x = v_2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής τριβής μ, ώστε η παραμόρφωση να είναι η μισή ?

$$\frac{1}{2} kx^2 + \mu\left(m_1 + m_2\right) gx = +\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(v_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k\left(\frac{1}{2}\frac{m_1 + m_2}{k} v_2^2\right) + \mu\left(m_1 + m_2\right) g \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(v_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{v_2}{2} + \mu g \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = v_2 \Rightarrow \mu = \frac{v_2}{2g}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Ράβδος M,L σχηματίζει γωνία θ=40 με το οριζόντιο επίπεδο και αφήνεται να περιστραφεί.

Να βρεθεί το ω όταν η ράβδος περνά από το οριζόντιο επίπεδο.

Ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$E_{dyn} = E_{kin} \Rightarrow \frac{1}{2}Mg\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$g\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right) = \left(\frac{1}{3}L\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}\sin\theta} = \sqrt{\frac{3\times 10}{2\times 2}\sin 40}$$

Νόμος του Newton για περιστροφική κίνηση

Εστω σημείο με θέση r(t) στο οποίο ασκείται δύναμη F. Το σημείο μπορεί να κινείται μόνο κυκλικά. Η ροπή της F είναι

$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=rF_{tan}=r\ m\ a_{tan} = r\ m\ a_\theta\ r = m\ r^2\ a_\theta = I\ a_\theta$.

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

$$\frac{1}{2}I_{sphere}\omega^2+\frac{1}{2}I_{trox}\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega_1^2+\frac{1}{2}I_{trox}\omega_2^2+\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

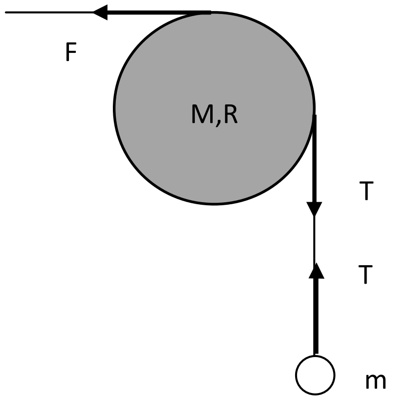
Περιστροφή χωρίς ολίσθηση : $\omega_1 R=\omega_2 r=v$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)+\frac{1}{2}I_{trox}\left(\frac{v^2}{r^2}\right)+\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

$$\left(\frac{2}{5}M\right)v^2+I_{trox}\left(\frac{v^2}{r^2}\right)+mv^2=2mgh$$

$$v^2\left(\frac{2}{5}M+\frac{I_{trox}}{r^2}+m\right)=2mgh\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2mgh}{\left(\frac{2}{5}M+\frac{I_{trox}}{r^2}+m\right)}}$$

Ποια δύναμη πρέπει να ασκήσουμε ώστε το σώμα m να ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση 0.8m/sec2. (το σχοινί δεν γλυστρά στην τροχαλία).



$$T - mg = ma$$

$$(F - T)R = Ia_{\theta} = I\frac{a}{R} = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$$

$$FR - m(g+a)R = \frac{1}{2}MRa \Rightarrow F = \frac{1}{2}Ma + m(g+a)$$

Κυκλική κίνηση

Γωνιακή επιτάχυνση: $a_\theta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.λκ

Επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση $a_t = ra_\theta, \vec{a}_t = \vec{a}_\theta \times \vec{r}$ λκξλ

Ακτινική (κεντρομόλος) επιτάχυνση: $a_R = \frac{u^2}{r} = \omega^2 r, \vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$ πλκ

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Εργο δύναμης κατά την περιστροφή:

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = F \cos\varphi r d\theta = \tau d\theta \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau\omega$$

Ρυθμός μεταβολής της $\mathrm{E}_{\kappa\iota\nu} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{I}2\omega\dot{\omega} = \mathrm{I}\omega a_\theta$

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = P \Rightarrow \tau = I a_\theta$$

Διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

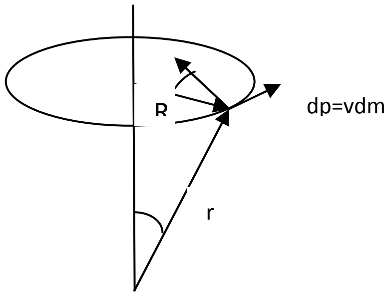
Αντιστοιχίες τύπων σε κυκλινή και ευθύγραμμη κίνηση

$u = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
M	I
F=M*a*	T=I*a*
dW=*f*dr	dW=τdϑ
½ Mv2	½ I ω2
P=mv	P=τω

Στροφορμή στερεού σώματος:

Η περίπτωση L=Iω

Εστω δακτύλιος που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του. Να βρεθεί η στροφορμή του L.



Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα της στεφάνης με μάζα dm και αναλύουμε το στοιχειώδες διάνυσμα της στροφορμής dL σε 2 συνιστώσες παράλληλα και κάθετα στο ω. Παρατηρώντας ότι οι κάθετες συνιστώσες απαλοίφονται λόγω συμμετρίας με το αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα, υπολογίζουμε την συνολική στροφορμή, η οποία είναι παράλληλη στο ω.

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} \Rightarrow dL = rvdm = rv\rho ds = r(\omega R)\left(\frac{M}{2\pi R}\right)(Rd\varphi)$$

$$L = \int dL = r(\omega R)\left(\frac{M}{2\pi R}\right)(Rd\varphi)\int_0^{2\pi} d\varphi = r(\omega R)\left(\frac{M}{2\pi R}\right)(Rd\varphi)2\pi = m\omega R^2 = I_{cm}\omega$$

Τα παραπάνω ισχύουν διότι ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η στροφορμή δεν είναι παράλληλη με το ω.

Κύριοι άξονες αδράνειας (Principal axes of inertia)

Για κάθε αντικείμενο (ακόμα και ασύμμετρο) υπάρχουν πάντα 3 κάθετοι μεταξύ τους άξονες αδράνειας, για τους οποίους η στροφορμή είναι παράλληλη με το ω.

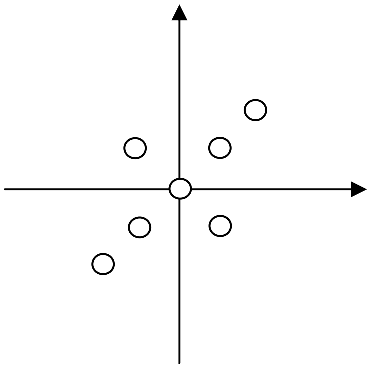
Υπολογίζουμε τον πίνακα της ροπής αδρανείας

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{zy} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, I_{xx} = \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

όπου οι συντεταγμένες είναι σε σχέση με το κέντρο μάζας.

Προφανώς ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο → ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα και πραγματικές ιδιοτιμές.

Εφαρμογή: Εστω μόριο που αποτελείται από τα ακόλουθα άτομα με ίσες μάζες:



```
x=[2,1,0,-1,-2,1,-1];
y=[2,1,0,-1,-2,-1,1];
```

Πίνακας αδρανείας μορίου

$$I_{xx} = \sum_i y_i^2, I_{yy} = \sum_i x_i^2, I_{xy} = \sum_i x_i y_i$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός ιδιοτιμών Πίνακα αδρανείας

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -8 \\ -8 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (12-\lambda)^2 - 64 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4,20$$

Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων Πίνακα

$$I\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = (1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

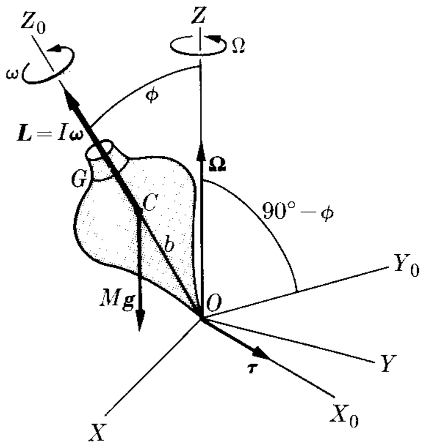
$$I\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -a_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = (1,-1)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Παρατηρούμε:

- Τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα και δίνουν τους κύριους άξονες αδράνειας
- Οι ιδιοτιμές είναι οι τιμές της ροπής αδρανείας σε κάθε ένα από τους κύριους άξονες

Μετάπτωση της στροφορφής στο πεδίο βαρύτητας

Εστω σώμα που περιστρέφεται γύρω από τον κύριο άξονα του σε πεδίο βαρύτητας, ο οποίος σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφο. Τότε η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής προκαλεί την μετάπτωση του διανύσματος της στροφορμής.



From fig.10-23 Alonso - Finn

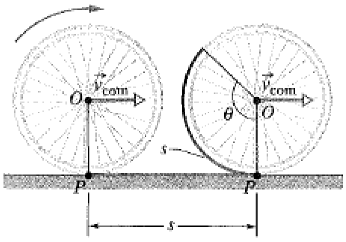
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times mg \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I\omega \frac{\vec{r}}{|r|} \right) = \vec{r} \times m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{|r|}{I\omega} \vec{r} \times m\vec{g}$$

$$= \frac{m|r|}{I\omega} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ 0 & 0 & mg \end{vmatrix} = \vec{i} r_y g - \vec{j} r_x g$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr_x}{dt} = \dfrac{mg|r|}{I\omega} r_y \\ \dfrac{dr_y}{dt} = -\dfrac{mg|r|}{I\omega} r_x \\ \dfrac{dr_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = r_x(0)\cos(\omega_p + \varphi) \\ r_y = r_y(0)\sin(\omega_p + \varphi) \\ r_z = const \end{cases}$$

Από την προηγούμενη εξίσωση →Η xy συνιστώσα της στροφορμής περιστρέφεται με $\omega_p = \dfrac{mg|\vec{r}|}{I\omega} = \dfrac{mgb}{I\omega}$. Η κίνηση αυτή ονομάζεται μετάπτωση (precession).

Κύλιση χωρίς ολίσθηση



Κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμα αν και μόνο αν:

s=θR→ds/dt=Rdθ/dt→v_{cm}=Rω → α_{cm}=Rα_{θ}.

Στην κύλιση χωρίς ολίσθηση, η κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα της ΚΕ περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας με γωνιακή ταχύτητα *ω* και η ΚΕ μεταφοράς με γραμμική ταχύτητα ίση με *ωR*.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2 = E_{rotCM} + E_{linear}$$

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

Εστω $X_1Y_1Z_1$ σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τυχαίο άξονα και *XYZ* το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Το διάνυσμα θέσης

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_{Mx}\vec{i}_1 + \vec{j}_1 r_{My} + \vec{k}_1 r_{Mz}\right) =$$

$$\vec{i}_1\frac{d}{dt}r_{Mx} + r_{Mx}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \vec{j}_1\frac{d}{dt}r_{My} + r_{My}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \vec{k}_1\frac{d}{dt}r_{Mz} + r_{Mz}\frac{d\vec{k}_1}{dt} =$$

$$\vec{i}_1\frac{dr_{Mx}}{dt} + \vec{j}_1\frac{dr_{My}}{dt} + \vec{k}_1\frac{dr_{Mz}}{dt} + r_{Mx}\underbrace{\frac{d\vec{i}_1}{dt}}_{\omega\times\vec{i}_1} + r_{My}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + r_{Mz}\frac{d\vec{k}_1}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{i}r_{Mx} + \vec{\omega}\times\vec{j}r_{My} + \vec{\omega}\times\vec{k}_1 r_{Mz} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}_M$$

Η προηγούμενη σχέση συνδέει την χρονική παράγωγο οποιουδήποτε διανύσματος στα 2 συστήματα αναφοράς (αδρανειακό και περιστρεφόμενο).

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}_M$$

$$\frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\right)_A\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)_A\left(\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right) + \vec{\omega}\times\vec{r}_M\right) =$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_M\left(\frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}_M\right) + \vec{\omega}\times\left(\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right) + \vec{\omega}\times\vec{r}_M\right) =$$

$$\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}_M\right) =$$

$$\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} + 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_M}{dt} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_M\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} - 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_M}{dt} - \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_M\right)}_{\Phi\upsilon\gamma\acute{o}\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\varsigma}$$

Περιστροφή γής από Β πόλο: counterclockwise (Δύση → Ανατολή)

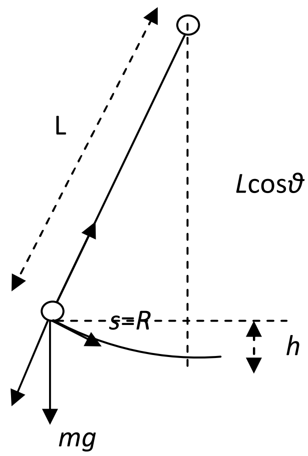
Βόρειο ημισφαίριο: deflect to the right of the path

South ημισφαίριο: deflect to the left of the path

Παραδείγματα

Από το κέντρο ενός οριζόντιου τραπεζιού που περιστρέφεται με ω=1rad/sec,εκτοξεύεται με v=0.1m/sec σημειακή μάζα =0.01 kgr. Υπολογίστε την τροχιά της σύμφωνα με τον περιστρεφόμενο παρατηρητή και τον ακίνητο παρατηρητή

Αρμονικός ταλαντωτής



$$F = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow x = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$\dot{x} = \omega_0 A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 A\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Αρχικές συνθήκες:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = A\sin\varphi, v_0 = A\cos\varphi$$

Ισοδύναμα $x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$, ω: γωνιακή συχνότητα (angular frequency).

Παράδειγμα: Απλό εκκρεμές

$$mg\sin\theta = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$s = R\theta \Rightarrow mg\sin\theta = mR\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow g\theta = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{R}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right), \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Εύρεση της εξίσωσης κίνησης με χρήση ροπής – στροφορμής:

ροπή ως προς κορυφή: τ=$mg\sin\theta$

στροφορμή ως προς κορυφή: $\vec{r} \times m\vec{v} = Lm\frac{d\theta}{dt}$

ρυθμός μεταβολής στροφορμής=ροπή $\Rightarrow Lm\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{R}\theta = 0$

Ταλαντωτής με απόσβεση

Εστω ότι επιπλέον υπάρχει μία δύναμη (–b dx/dt) που προκαλεί απόσβεση της ταλάντωσης. Μονάδες του b: N/(m/sec)=(kgr.m/sec2)=kgr/sec

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow$$

$$\text{το } \frac{b}{m} \text{ έχει μονάδες } \sec^{-1} \Rightarrow \frac{b}{m}=\frac{1}{\tau}$$

$$\text{το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο: } \left(z^2+\frac{b}{m}z+\frac{k}{m}=0\right) \Rightarrow \rho_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{m}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{b}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}}_{D}}\right)$$

$$1)\, D>0 \Rightarrow x(t)=c_1e^{\rho_1 t}+c_2e^{\rho_2 t}$$
$$2)\, D=0 \Rightarrow x(t)=(c_1t+c_0)e^{\rho_1 t}$$
$$3)\, D<0 \Rightarrow \rho_1=p+jq, \rho_2=p-jq,\ x(t)=e^{pt}\left(c_1\cos(qt)+c_2\sin(qt)\right)$$

Για την 3η περίπτωση, η λύση μπορεί να γραφτεί ως:

$$x(t)=e^{pt}\left(c_1\cos(qt)+c_2\sin(qt)\right)=Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\dot{x}(t)=\omega Ae^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+pAe^{pt}\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)+\omega pAe^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+\omega pAe^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+p^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$m\left(-\omega^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)+\omega pAe^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+\omega pAe^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+p^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)+$$
$$b\left(\omega Ae^{pt}\cos(\omega t+\varphi)+pAe^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)+k\left(Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m\left(-\omega^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)+p^2Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)+b\left(pAe^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)+k\left(Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)\right)=0 \\ m\left(2\omega pAe^{pt}\cos(\omega t+\varphi)\right)+b\left(\omega Ae^{pt}\cos(\omega t+\varphi)\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-m\omega^2+mp^2+mbp+k\right)Ae^{pt}\sin(\omega t+\varphi)=0 \\ \left(2m\omega p+b\omega\right)Ae^{pt}\cos(\omega t+\varphi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2=p^2+bp+\dfrac{k}{m}=\left(\dfrac{b}{2mp}\right)^2-\dfrac{b^2}{2m}+\dfrac{k}{m} \\ p=-\dfrac{b}{2m} \end{cases}$$

Ταλαντωτής με απόσβεση: Μιγαδική αντιμετώπιση

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0, \gamma=\frac{b}{m}, \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

Εστω μιγαδική λύση της μορφής: $z=Ae^{j(pt+a)}$

Παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας:

$$\dot{z}=jpAe^{j(pt+a)}$$

$$\ddot{z}=j^2p^2Ae^{j(pt+a)}=-j^2p^2Ae^{j(pt+a)}$$

$$-p^2Ae^{j(pt+a)}+j\gamma pAe^{j(pt+a)}+\omega_0^2Ae^{j(pt+a)}=0$$

Για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση στην μη τετριμμένη περίπτωση πρέπει ο p να είναι μιγαδικός: $p=n+js$.

$$\left(-n^2+s^2-2jns+\gamma nj+j^2\gamma s+\omega_0^2\right)Ae^{j(pt+a)}=0$$

$$\begin{cases} -n^2+s^2-\gamma s+\omega_0^2=0 \\ s=\gamma/2 \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2=n^2+\frac{\gamma^2}{4}$$

$$z=Ae^{j(nt+jst+a)}=Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{j(nt+a)}$$

Κρατάμε το πραγματικό μέρος της λύσης:

$$x=\underbrace{Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}}_{\substack{\text{εκθετική}\\ \text{περιβάλλουσα}}}\underbrace{\cos(nt+a)}_{\text{Αρμονικός όρος}}$$

Εξαναγκασμένος Ταλαντωτής με απόσβεση

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t) = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m} = a_0 \sin(\omega t), \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}, \omega_0^2 = \frac{C}{m}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Η λύση της ΔΕ θεωρεί ότι η μετατόπιση στην μόνιμη κατάσταση θα ταλαντώνεται με την διεγείρουσα συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης και όχι με την ιδιοσυχνότητα του ελατηρίου ω0.

Υπολογίζουμε χρονικές παραγώγους και αντικαθιστούμε

$$\dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$-\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\tau}\left(\omega x_0 \cos(\omega t + \varphi)\right) + \omega_0^2 \left(x_0 \sin(\omega t + \varphi)\right) = a_0 \sin(\omega t)$$

$$-\omega^2 x_0 (\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi) + \frac{\omega x_0}{\tau}(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi) + \omega_0^2 x_0 (\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi)$$

$$= a_0 \sin(\omega t)$$

$$x_0 \sin\omega t \left(-\omega^2 \cos\varphi + \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2 \cos\varphi\right) + x_0 \cos\omega t \left(-\omega^2 \sin\varphi + \frac{\omega x_0}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2 \sin\varphi\right) = a_0 \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \sin\varphi + \dfrac{\omega x_0}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2 \sin\varphi = 0 \\ x_0 \left(-\omega^2 \cos\varphi + \dfrac{\omega}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2 \cos\varphi\right) = a_0 \end{cases}$$

Υπολογισμός φάσης

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\varphi = -\frac{\omega}{\tau}\cos\varphi \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\omega}{\tau}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Υπολογισμός πλάτους

$$\cos\varphi = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (-\omega/\tau)^2}}, \sin\varphi = -\frac{\omega}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (-\omega/\tau)^2}}$$

$$x_0 = \frac{a_0}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + \dfrac{\omega}{\tau}\sin\varphi\right)} = \frac{a_0\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (-\omega/\tau)^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + (\omega/\tau)^2} = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

Εξαναγκασμένος Ταλαντωτής με απόσβεση: Μιγαδική αντιμετώπιση

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t,\ \gamma=\frac{b}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

Εστω μιγαδική λύση της μορφής: $z=Ae^{j(\omega t+\delta)}$

Παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας:

$$\dot{z}=j\omega Ae^{j(\omega t+\delta)}$$

$$\ddot{z}=-\omega^2 Ae^{j(\omega t+\delta)}$$

$$-\omega^2 Ae^{j(\omega t+\delta)}+j\gamma\omega Ae^{j(\omega t+\delta)}+\omega_0^2 Ae^{j(\omega t+\delta)}=0$$

Μετά από αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε:

$$\left(-\omega^2 A+j\gamma \mathrm{A}\omega+\omega_0^2 A\right)e^{-j\delta}=\frac{F_0}{m}$$

$$-\omega^2 A+j\gamma \mathrm{A}\omega+\omega_0^2 A=\frac{F_0}{m}\cos\delta+j\frac{F_0}{m}\sin\delta$$

$$\begin{cases} A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=\dfrac{F_0}{m}\cos\delta \\ A\omega\gamma=\dfrac{F_0}{m}\sin\delta \end{cases} \Rightarrow A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\omega\gamma\right)^2}},\tan\delta=\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Κυματική εξίσωση σε συνεχή χορδή

Έστω στοιχειώδες τμήμα χορδής x to x+δx με γωνία θ, θ+δθ και απομάκρυνση y.

$$F_y = -T\sin\theta + T\sin(\theta+\delta\theta) = -T\theta + T(\theta+\delta\theta) = \mathrm{T}\delta\theta$$

$$dm.\ddot{y} = T\delta\theta \Rightarrow \mu\delta x.\ddot{y} = T\delta\theta \Rightarrow \ddot{y} = \frac{T}{\mu}\frac{\delta\theta}{\delta x} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Κάθε συνάρτηση της μορφής y(x,t)=A sin(ωt-kt) αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης.

Μήκος κύματος λ: t=0→ $y_0 \sin kx = y_0 \sin k(x+\lambda) \Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$

Γωνιακή συχνότητα ω=2π/T (rad/sec)

Φασική ταχύτητα: v= λ/T= λf

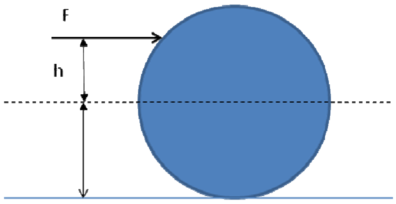
$$y = y_0 \sin k(x-\lambda) = y_0 \sin k(x-vt) = y_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, v = \frac{\omega}{k}$$

Εκφωνήσεις ασκήσεων

Μία τραμπάλα αποτελείται από ράβδο με *L*, *M* τοποθετημένη συμμετρικά στο στήριγμα της. Στα άκρα της κάθονται από ένας άνθρωπος με μάζες m1, m2. Να βρεθεί η συνολική ροπή αδρανείας ως προς το στήριγμα και η έκφραση της γωνιακής επιτάχυνσης συναρτήσει του θ.

Σε μία σφαίρα ακτίνας R, μάζας M που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη από μία κρούση. Να βρεθεί το σημείο της εφαρμογής της δύναμης ώστε η σφαίρα να κλίσει χωρίς να ολισθήσει.



Ενα διαστημικό όχημα μπορεί να θεωρηθεί ως μία λεπτή ράβδος μήκους L=20m, μάζας M=4000 kgr. Σε κάθε άκρο του διαστημοπλοίου βρίσκονται από 2 αστροναύτες με μάζα 100kgr έκαστος). Σε κάθε άκρο του διαστημοπλοίου υπάρχει ένας μικρός κινητήρας που εκτοξεύει αέρια με ρυθμό 2kgr/sec και ταχύτητα 1000m/sec, κάθετα στον κύριο άξονα. Οι 2 κινητήρες εκτοξεύουν τα καυσαέρια με φορά αντίθετη ο ένας προς τον άλλον. Οι κινητήρες λειτουργούν για 10 sec και σταματούν. Να βρεθεί το ω και η επιτάχυνση που αισθάνονται οι επιβάτες του οχήματος στα άκρα του οχήματος. Τι θα συμβεί αν οι 4 αστροναύτες μετακινηθούν στο κέντρο του οχήματος ?

Εξετάστε αν το βαρυτικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια της γης είναι διατηρητικό

Ενας κύβος με ακμή $2^{α}$ και μάζα M, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την ακμή AB ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Ενα σώμα μάζας m<<M κινείται οριζόντια και συγκρούεται πλαστικά με τον κύβο σε ύψος 4α/3. Να υπολογιστεί η ταχύτητα v ώστε ο κύβος να περιστραφεί γύρω από την ακμή AB.

Ενας κύλινδρος με M, R, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στον κύλινδρο ασκείται οριζόντια δύναμη F. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και το μέτρο της στατικής τριβής

Σφαίρα ακτίνας R, μάζας M αφήνεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας, το μέτρο της στατικής τριβής και την συνθήκη για να υπάρχει κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Στην καρότσα ενός φορτηγού βρίσκεται σώμα μάζας 40 kgr το οποίο έχει συντελεστη τριβής μ=0.15. Το φορτηγό αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση 2m/sec2. Υπολογίστε σε ποια απόσταση από το σημείο εκίνησης θα πέσει το σώμα.

Σώμα μάζας M είναι προσαρτημένο στο άκρο ράβδου μήκους L με αμελητέα μάζα και ηρεμεί στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Μικρότερο σώμα με μάζα m κινείται με ταχύτητα v και συγκρούεται πλαστικά με αυτό. Να βρεθεί η νέα ταχύτητα και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάνεται.

Μάζα m περιστρέφεται με ακτίνα r0 και σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ασκώντας σταθερή δύναμη μειώνουμε την ακτίνα περιστροφής. Υπολογίστε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας και το έργο της δύναμης.