Μοντέλο επιδημίας SIR

Προτάθηκε από Kermack & McKendrick, το 1927 και θεωρεί 3 κλάσεις ατόμων:

Consider a disease spread by contact with infected individuals.

- S(susceptible): ποσοστό επιρεπών σε μόλυνση
- I(infected): ποσοστό μολυσμένων
- R(recovered): ποσοστό αυτών που ανέρωσαν και απέκτησαν ανοσία στη νόσο, ή πέθαναν.

Η μαθηματική προσέγγιση του μοντέλου είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -bSI \\ \frac{dI}{dt} &= bSI - aI \\ \frac{dR}{dt} &= aI \end{aligned} \qquad (7)$$

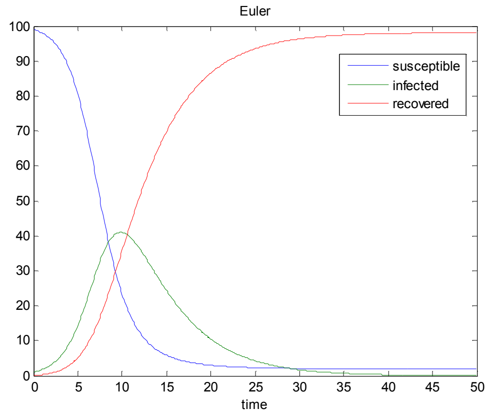
b ρυθμός μόλυνσης (χρόνος^{-1}), a ρυθμός απομάκρυνσης.

Το πηλίκο b/a ονομάζεται basic reproduction number N_r. και δείχνει πόσες μολύνσεις θα προκαλέσει ένας μολυσμένος με περιβάλλον με μόνο επιρεπείς στη μόλυνση.

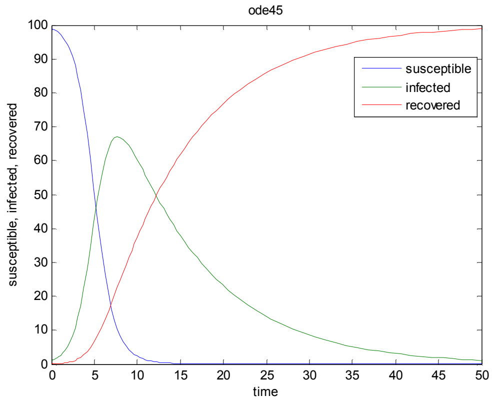
Η (7) είναι ένα μη γραμμικό σύστημα ΔΕ και θα επιλυθεί αριθμητικά. Η διακριτή μορφή της (7) δίνεται παρακάτω, με χρήση forward 2-point finite differences για τον υπολογισμό των παραγώγων:

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i - \delta t.bS_iI_i \\ I_{i+1} - I_i &= \delta t\left(bS_iI_i - aI_i\right) \\ R_{i+1} - R_i &= \delta t.aI_i \end{aligned} \qquad (8)$$

Κατά συνέπεια, έχοντας δεδομένες τις αρχικές συνθήκες $S_0, I_0, R_0, t = 0$, και καθορίζοντας μία τιμή για το δt, μπορούμε να επιλύσουμε αρηθμητικά το παραπάνω σύστημα ΔΕ. Αυτή είναι η μέθοδος του Euler.



α=0.008, β=0.2



α=0.01, β=0.1

Προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου

Εστω ότι κατά το ξέσπασμα μίας επιδημίας, μετράται το πλήθος των προσβεβλημένων και αυτών που έχουν αναρώσει $\{I_i\},\{R_i\}\, i=1,\ldots,n$, τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές $\{t_i\}, i=1,\ldots,n$. Είναι προφανές ότι θεωρώντας συνολικό πληθυσμό Ν, ισχύει $S_i = N - I_i - R_i$. Πινακοποιώντας την (8β), παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} S_1 I_1 & -I_1 \\ S_2 I_2 & -I_2 \\ \ldots & \ldots \\ S_{n-1} I_{n-1} & -I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1} \\ \dfrac{I_3 - I_2}{t_3 - t_2} \\ \ldots \\ \dfrac{I_n - I_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Η (9) αποτελεί σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις παραμέτρους του μοντέλου και γράφεται ως εξής: ΑΧ=Β. Προφανώς το σύστημα αυτό είναι υπερκαθορισμένο. Ετσι μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων:

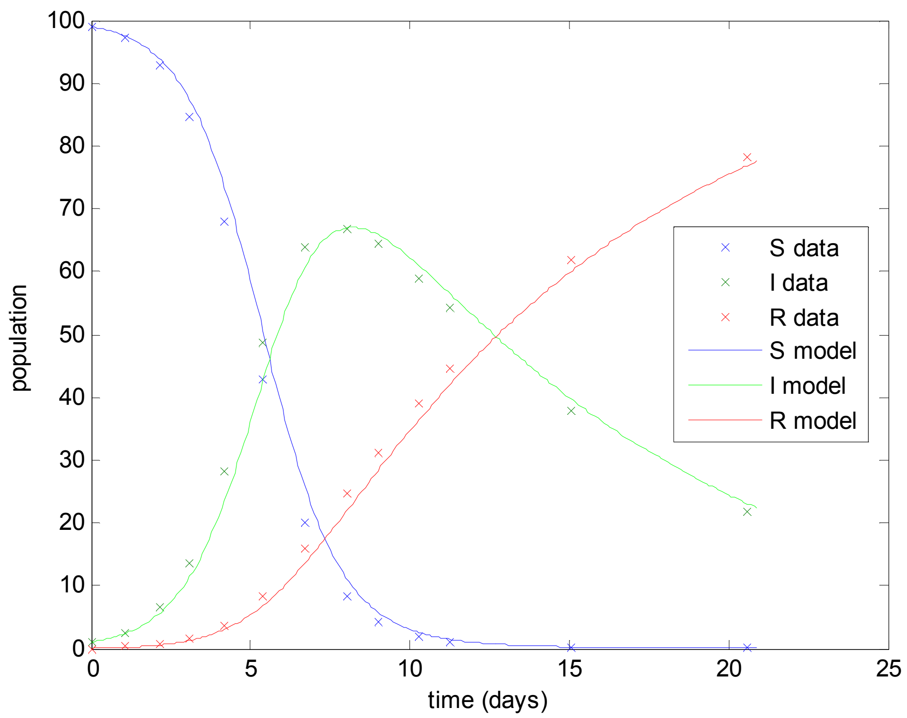
$$\mathbf{A^T A X = A^T B} \qquad (10)$$

Ο πίνακας A^TA είναι τετραγωνικός (Ν-1)x(Ν-1) και αντιστρέψιμος. Ο Χ υπολογίζεται εύκολα:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T} B \qquad (11)$$

Ακριβέστερα αποτελέσματα θα πάρουμε αν χρησιμοποιήσουμε και $2^η$ εξίσωση από την (8), οπότε το σύστημα αποκτά 2(Ν-1) εξισώσεις. Δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε την $3^η$ εξίσωση γιατί αυτή προκύπτει από τις άλλες 2, με την παραδοχή ότι Ν είναι σταθερό.

$$\begin{pmatrix} S_1 I_1 & -I_1 \\ 0 & I_1 \\ S_2 I_2 & -I_2 \\ 0 & I_2 \\ \ldots & \ldots \\ S_{n-1} I_{n-1} & -I_{n-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1} \\ \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} \\ \frac{I_3 - I_2}{t_3 - t_2} \\ \frac{R_3 - R_2}{t_3 - t_2} \\ \ldots \\ \frac{I_n - I_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \\ \frac{R_n - R_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (12)$$



Προσδιορισμός των παραμέτρων α=0.0096, β=0.0985 του μοντέλου SIR με χρήση της (12).