ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ - Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2010

Διδάσκουσα : Αδάμ Μαρία

Βασικές έννοιες

Ορισμός 1 *Έστω μια συνάρτηση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών ορισμένη στο* D, $f : D \to \mathbb{R}$. **Μερική παράγωγο** *της* f *ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή λέγεται η συνήθης παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή αυτή ενώ όλες οι άλλες μεταβλητές διατηρούνται σταθερές. Συμβολίζεται* $\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$ *ή* $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ή σύντομα* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, *όπου* x_i *είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές.*

Για παράδειγμα, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 3x_2$ έχει πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$ και μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2^3$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1x_2^2 + 3$.

Ορισμός 2 *Έστω μια συνάρτηση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών ορισμένη στο* D, $f : D \to \mathbb{R}$. **Μερική παράγωγος δεύτερης τάξης** *της* f *ονομάζεται η συνήθης παράγωγος δεύτερης τάξης της συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές που σημειώνονται κάθε φορά και διατηρώντας τη σειρά. Συμβολίζονται* $\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_{x_1x_1}(x_1, x_2)$ *ή* $\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = f_{x_1x_2}(x_1, x_2)$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 3x_2 - 4x_2x_3$, με πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$, έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1x_2^2 + 3 - 4x_3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -4x_2.$$

Ορισμένες δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1x_2^2 + 3 - 4x_3) = 6x_2^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 2x_2^3) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(-4x_2) = -4,$$

ενώ
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-4x_2) = 0.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης. Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1^2}(6x_1x_2^2 + 3 - 4x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_2^2) = 0.$$

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε συνάρτηση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών θα γράφουμε $f(x, y)$ και τριών ανεξάρτητων $f(x, y, z)$.

Ιδιότητες

- Αν μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών ορισμένη στο D έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε είναι συνεχής στο D. Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς τη συνέχειά τους δεν αρκούν για τη συνέχεια της συνάρτησης, π.χ. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

- Αν οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι f_{xy}, f_{yx} είναι συνεχείς, τότε $f_{xy} = f_{yx}$, δηλαδή δεν παίζει ρόλο η σειρά παραγώγισης.

- (Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων) Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όπου οι x_i είναι σύνθετες συναρτήσεις, δηλαδή $x_i = h_i(u_1, u_2, \ldots, u_s)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε
$$\frac{\partial f}{\partial u_\ell} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_\ell} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_\ell} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_\ell}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, s.$$

Ορισμός 3 *Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει συνεχείς πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο πεδίο ορισμού της D, η έκφραση*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

ονομάζεται ολικό διαφορικό της $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όπου dx_i είναι το διαφορικό της x_i μεταβλητής, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε για μια συνάρτηση $f(x,y)$ ότι ισχύουν οι συνθήκες $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2y^2$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 4xy + 6y^2$, προσπαθώντας να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό για το ολικό διαφορικό της και να ολοκληρώσουμε κατά μέλη, δηλαδή,

$$\int df = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \int (3x^2y - 2y^2)dx + \int (x^3 - 4xy + 6y^2)dy \Rightarrow$$

$$f(x,y) = x^3y - 2xy^2 + x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c.$$

Ορισμός 4 *Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ ορισμένες στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Η* **Ιακωβιανή ορίζουσα** *είναι*

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1}$$

ενώ όταν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ και $h(x,y,z)$ ορισμένες στο $D \subseteq \mathbb{R}^3$ η αντίστοιχη ορίζουσα είναι

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Ορισμός 5 *Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ στο $D \subseteq \mathbb{R}^n$.* **Κρίσιμο** *ή* **στάσιμο** *ονομάζεται το σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in D$ το οποίο προκύπτει από τη λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Πρόταση 1 *Έστω μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^n$ με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης συνεχείς, το κρίσιμο σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.*

Ο Hessian πίνακας της $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *είναι* $H(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *και ισούται με :*

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & f_{x_1x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & \ldots & f_{x_1x_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ f_{x_1x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & f_{x_2x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & \ldots & f_{x_2x_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_1x_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & f_{x_2x_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & \ldots & f_{x_nx_n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

- *Αν ο* $H(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *της (3) είναι θετικά ορισμένος*[1], *τότε το* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *με ελάχιστη τιμή την* $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

- *Αν ο* $H(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *της (3) είναι αρνητικά ορισμένος*[2], *τότε το* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *είναι σημείο τοπικού μεγίστου για την* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *με μέγιστη τιμή την* $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

- *Αν ο* $H(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *της (3) είναι αόριστος, τότε η* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *δεν έχει ακρότατο.*

Τις μέγιστες ή ελάχιστες τιμές της συνάρτησης τις υπολογίζουμε κάνοντας αντικατάσταση σε αυτήν το κρίσιμο σημείο.

Πρόταση 2 *Έστω μια συνάρτηση* $f(x, y)$ *ορισμένη στο* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης συνεχείς, το κρίσιμο σημείο* $(x_0, y_0) \in D$ *που ικανοποιεί την (2) και η ποσότητα*

$$\Delta = detH = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0). \quad (4)$$

- *Αν* $\Delta > 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *τότε το* (x_0, y_0) *είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.*

- *Αν* $\Delta > 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, *τότε το* (x_0, y_0) *είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*

- *Αν* $\Delta < 0$, *τότε το* (x_0, y_0) *είναι σημείο σάγματος ή σαγματικό σημείο.*

- *Αν* $\Delta = 0$ *δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το ακρότατο της συνάρτησης.*

Τις μέγιστες ή ελάχιστες τιμές της συνάρτησης τις υπολογίζουμε κάνοντας αντικατάσταση σε αυτήν το κρίσιμο σημείο.

---

[1] $d_1 = f_{x_1x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) > 0,\ d_2 = detH_2 > 0,\ d_3 = detH_3 > 0, \ldots.$

[2] $d_1 = f_{x_1x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) < 0,\ d_2 = detH_2 > 0,\ d_3 = detH_3 < 0, \ldots.$

Ορισμός 6 *Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *στο* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *και έστω οι συναρτήσεις-περιορισμοί*

$$g_j = g_j((x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{για} \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{με} \quad m < n.$$

Ως **συνάρτηση Lagrange** *ορίζεται η συνάρτηση*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (5)$$

και οι συντελεστές των συναρτήσεων-περιορισμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *ονομάζονται* **πολλαπλασιαστές Lagrange**.

Σε κάθε συνάρτηση Lagrange αντιστοιχεί ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$,

$$H(F) = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) & F_{x_1x_2}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) & \ldots & F_{x_1x_n}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) \\ F_{x_1x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) & F_{x_2x_2}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) & \ldots & F_{x_2x_n}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) \\ \vdots & & & \vdots \\ F_{x_1x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) & F_{x_2x_n}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) & \ldots & F_{x_nx_n}(x_1, x_2, \ldots, \lambda_m) \end{bmatrix} \quad (6)$$

ένας $m \times n$ πίνακας

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

και ένας $(n+m) \times (n+m)$ πίνακας

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} H(F) & G^T \\ G & O \end{bmatrix} \quad (8)$$

όπου $H(F)$ είναι ο πίνακας στην (6), G είναι ο πίνακας στην (7) και με G^T σημειώνεται ο ανάστροφος του G.

Θεωρούμε τις ορίζουσες

$$D_1, \ D_2, \ D_3, \ldots$$

όπου $D_1 = detD(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

D_2 είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα στην (8), αν διαγράψουμε από αυτόν την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη.

D_3 είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα στην (8), αν διαγράψουμε από αυτόν τις δύο πρώτες γραμμές και τις δύο πρώτες στήλες, κ.ο.κ..

Πρόταση 3 *Έστω μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^n$ με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης συνεχείς, έστω οι συναρτήσεις-περιορισμοί*

$$g_j = g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{για} \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{με} \quad m < n$$

να είναι συνεχείς συναρτήσεις και να έχουν μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς και $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ η αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange όπως ορίστηκε στην (5). Έστω το κρίσιμο σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ της $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ που είναι η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_j} = g_j = 0$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, m$. Έστω οι ορίζουσες D_k, $k = 1, 2, \ldots, n-m$ υπολογισμένες στο σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$. Τότε ισχύουν :

1. *Το σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με τους περιορισμούς $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, όταν ισχύει ένα από τα επόμενα:*

   i) *m άρτιος και $D_k > 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$.*

   ii) *m περιττός και $D_k < 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$.*

2. *Το σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με τους περιορισμούς $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, όταν ισχύει ένα από τα επόμενα:*

   i) *n άρτιος και $(-1)^k D_k < 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$.*

   ii) *n περιττός και $(-1)^k D_k > 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$.*

Τις μέγιστες ή ελάχιστες τιμές της συνάρτησης τις υπολογίζουμε κάνοντας αντικατάσταση στην $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το σημείο $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Ορισμός 7 *Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f(x, y)$ στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Το*

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

ονομάζεται διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ στο χωρίο D.
Αν η $f(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, τότε το στερεό το οποίο περιβάλλεται από

την επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x,y)$, το σύνολο D και την κυλινδρική επιφάνεια που έχει βάση το σύνορο του D και κύριο άξονα παράλληλο προς τον άξονα Oz, έχει **όγκο** *ο οποίος υπολογίζεται από*

$$V = \int_D \int f(x,y)dxdy.$$

Στην περίπτωση που $f(x,y) = 1$, τότε

$$E(D) = \int_D \int dxdy = \int_D \int dydx.$$

Πρόταση 4 *(προβολή του χωρίου στον άξονα xx') Έστω μια συνάρτηση $f(x,y)$ ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ολοκληρώσιμη, το δε χωρίο D μπορεί να περιγραφεί από δύο συνεχείς καμπύλες $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) \leq f_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε*

$$\int_D \int f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx.$$

(προβολή του χωρίου στον άξονα yy') Έστω μια συνάρτηση $f(x,y)$ ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ολοκληρώσιμη, το δε χωρίο D μπορεί να περιγραφεί από δύο συνεχείς καμπύλες $g_1(y) \leq g_2(y)$ για κάθε $y \in [c,d]$. Τότε

$$\int_D \int f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

Όταν $f(x,y) = 1$, για $x \in [a,b]$ ή $y \in [c,d]$ έχουμε αντίστοιχα

$$E(D) = \int_D \int dxdy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dxdy.$$

ΑΣΚΗΣΗ $1^η$ Να υπολογισθούν αν υπάρχουν και να χαρακτηρισθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5.$$

ΛΥΣΗ Πρώτα υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, αν υπάρχουν, σύμφωνα με τη (2), στη συνέχεια για καθένα από αυτά εφαρμόζουμε την Πρόταση 1, αξιοποιώντας την οριστικότητα του Hessian πίνακα της (3). Τα κρίσιμα σημεία είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow 8x_1+4x_2+2x_3=0\\
\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \Rightarrow 4x_1+8x_2-2x_3=0\\
\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \Rightarrow 2x_1-2x_2+4x_3=0
\end{aligned}$$

που είναι $A \equiv (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι

$$\begin{aligned}
&f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3)=8,\quad f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3)=8,\quad f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3)=4\\
&f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3)=4,\quad f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3)=2,\quad f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3)=-2
\end{aligned}$$

καθώς και τον πίνακα

$$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(0,0,0) & f_{x_1x_2}(0,0,0) & f_{x_1x_3}(0,0,0)\\ f_{x_1x_2}(0,0,0) & f_{x_2x_2}(0,0,0) & f_{x_2x_3}(0,0,0)\\ f_{x_1x_3}(0,0,0) & f_{x_2x_3}(0,0,0) & f_{x_3x_3}(0,0,0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2\\ 4 & 8 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $H(0,0,0)$ είναι θετικά ορισμένος επειδή

$$d_1 = f_{x_1x_1}(0,0,0) = 8 > 0,\quad d_2 = det\begin{bmatrix} 8 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix} = 48 > 0 \ \text{ και } \ d_3 = detH(0,0,0) = 96 > 0.$$

Άρα, στο $A(0,0,0)$ υπάρχει τοπικό ελάχιστο, με ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι $f(0,0,0) = 5$.

ΑΣΚΗΣΗ 2^{η} Να υπολογισθούν αν υπάρχουν και να χαρακτηρισθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^2 + 4y - 1,$

ii) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5,$

iii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3(x^2+y^2) + 9.$

ΛΥΣΗ Πρώτα υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, αν υπάρχουν, σύμφωνα με τη (2), στη συνέχεια για καθένα από αυτά εφαρμόζουμε την Πρόταση 2, αξιοποιώντας το πρόσημο της (4).

i) Τα κρίσιμα σημεία είναι η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ ή } x = -1, \text{ ή } x = 1$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow -4y^3 + 4 = 0 \Rightarrow y = 1$$

δηλ. τα κρίσιμα σημεία είναι τα $A \equiv (x_0, y_0) = (0\,,\,1)$ $B \equiv (x_0, y_0) = (-1\,,\,1)$ και $\Gamma \equiv (x_0, y_0) = (1\,,\,1)$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = -12y^2,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x,y) = 0$$

καθώς και την ποσότητα $\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 12y_0^2(4 - 12x_0^2)$ για όλα τα παραπάνω κρίσιμα σημεία (x_0, y_0). Έτσι, για το $A(0,1)$ έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου, αφού $\Delta = 12 \cdot 4 > 0$ και $f_{xx}(0,1) = -4 < 0$, για το $B(-1,1)$ έχουμε σαγματικό σημείο, αφού $\Delta = 12 \cdot (-8) < 0$ και για το $\Gamma(1,1)$ έχουμε επίσης σαγματικό σημείο, αφού $\Delta = 12 \cdot (-8) < 0$.

ii) Τα κρίσιμα σημεία είναι η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow y = x^3 \qquad (*)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y^3 - 4x = 0 \text{ από } (*) \Rightarrow (x^3)^3 - x = 0 \Rightarrow x^9 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ ή } x = -1, \text{ ή } x = 1$$

και με αντικατάσταση των x στην (*) βρίσκουμε τα αντίστοιχα y, έτσι τα κρίσιμα σημεία είναι τα $A \equiv (x_0, y_0) = (0\,,\,0)$ $B \equiv (x_0, y_0) = (-1\,,\,-1)$ και $\Gamma \equiv (x_0, y_0) = (1\,,\,1)$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x,y) = -4$$

καθώς και την ποσότητα $\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 144x_0^2y_0^2 - 16$ για όλα τα παραπάνω κρίσιμα σημεία (x_0, y_0). Έτσι, για το $A(0,0)$ έχουμε σαγματικό σημείο, αφού $\Delta = -16 < 0$, για το $B(-1,-1)$ έχουμε σημείο τοπικού ελαχίστου, αφού $\Delta = 144 - 16 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$, και για το $\Gamma(1,1)$ έχουμε επίσης σημείο τοπικού ελαχίστου, αφού $\Delta = 144 - 16 > 0$ και $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$.

iii) Τα κρίσιμα σημεία είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad y = 2
\end{aligned}$$

επομένως είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί που προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος δηλ. τα σημεία $A \equiv (x_0, y_0) = (0\,,\,0)$, $B \equiv (x_0, y_0) = (0\,,\,2)$, $\Gamma \equiv (x_0, y_0) = (2\,,\,0)$ και $E \equiv (x_0, y_0) = (2\,,\,2)$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = 6x - 6, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = 6y - 6, \\
&\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} = f_{xy}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

καθώς και την ποσότητα $\Delta = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 36(x_0-1)(y_0-1)$ για όλα τα παραπάνω κρίσιμα σημεία (x_0, y_0). Έτσι, για το $A(0,0)$ έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου, αφού $\Delta = 36(-1)(-1) > 0$ και $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$, για το $B(0,2)$ έχουμε σαγματικό σημείο, αφού $\Delta = 36 \cdot (-1) \cdot 1 < 0$, για το $\Gamma(2,0)$ έχουμε σαγματικό σημείο, αφού $\Delta = 36 \cdot 1 \cdot (-1) < 0$. Τέλος, για το $E(2,2)$ έχουμε σημείο τοπικού ελαχίστου, αφού $\Delta = 36 \cdot 1 \cdot 1 > 0$ και $f_{xx}(2,2) = 6 > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3^{η} Να υπολογισθούν αν υπάρχουν και να χαρακτηρισθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 12x + 12y + 9z + 10$, όταν $x + y + z = 0$

ii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3$, όταν $x + y + z = 12$, $2x - y - z = 6$

ΛΥΣΗ Πρώτα κατασκευάζουμε τη συνάρτηση Lagrange σύμφωνα με τη (5) για κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις και τους αντίστοιχους περιορισμούς της. Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων Lagrange, αν υπάρχουν, κατασκευάζονται οι πίνακες (6)-(8) και εφαρμόζεται η Πρόταση 3.

i) Έστω $g_1(x,y,z) = x + y + z$. Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$F(x,y,z,\lambda_1) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 12x + 12y + 9z + 10 + \lambda_1(x + y + z)$$

Το κρίσιμο σημείο της $F(x,y,z,\lambda_1)$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow -2x+12+\lambda_1=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow -2y+12+\lambda_1=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1)}{\partial z} &= 0 \Rightarrow -2z+9+\lambda_1=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1)}{\partial \lambda_1} &= 0 \Rightarrow x+y+z=0
\end{aligned}$$

που είναι : $(x_0,y_0,z_0,\lambda_1)=(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2},\,-1,\,-11)$
Σύμφωνα με τους τύπους (6)-(8) κατασκευάζουμε τους πίνακες

$$H(F)=\left[\begin{array}{ccc} F_{xx}(x,y,z,\lambda_1) & F_{xy}(x,y,z,\lambda_1) & F_{xz}(x,y,z,\lambda_1)\\ F_{xy}(x,y,z,\lambda_1) & F_{yy}(x,y,z,\lambda_1) & F_{yz}(x,y,z,\lambda_1)\\ F_{xz}(x,y,z,\lambda_1) & F_{yz}(x,y,z,\lambda_1) & F_{zz}(x,y,z,\lambda_1)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{array}\right]$$

$$G=\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial z}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&1&1\end{array}\right]$$

$$D(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2},\,-1,\,-11)=\left[\begin{array}{cc}H(F) & G^T\\ G & O\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}-2&0&0&1\\0&-2&0&1\\0&0&-2&1\\1&1&1&0\end{array}\right]$$

Επειδή $n=3$ και $m=1$ συμπεραίνουμε ότι $k=n-m=2$, άρα χρειάζεται να υπολογισθούν οι ορίζουσες D_1,D_2 για τις οποίες βρίσκουμε ότι:

$$D_1=detD(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2},\,-1,\,-11)=-12 \quad \text{και} \quad D_2=det\left[\begin{array}{ccc}-2&0&1\\0&-2&1\\1&1&0\end{array}\right]=4$$

Επειδή $(-1)D_1>0$, $(-1)^2D_2>0$, σύμφωνα με την Πρόταση 3 περίπτωση 2-υποπερίπτωση ii) η συνάρτηση $f(x,y,z)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2},\,-1)$.

ii) Έστω $g_1(x,y,z)=x+y+z-12$, $g_2(x,y,z)=2x-y-z-6$. Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\begin{aligned}
F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z)\\
&= x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3+\lambda_1(x+y+z-12)+\lambda_2(2x-y-z-6)
\end{aligned}$$

Το κρίσιμο σημείο της $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 2x-2+\lambda_1+2\lambda_2=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 2y-2+\lambda_1-\lambda_2=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z} &= 0 \Rightarrow 2z-2+\lambda_1-\lambda_2=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} &= 0 \Rightarrow x+y+z-12=0\\
\frac{\partial F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} &= 0 \Rightarrow 2x-y-z-6=0
\end{aligned}$$

που είναι : $(x_0,y_0,z_0,\lambda_1,\lambda_2)=(6,\,3,\,3,\,-6,\,-2)$

Σύμφωνα με τους τύπους (6)-(8) κατασκευάζουμε τους πίνακες

$$H(F)=\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)\\ F_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{yy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)\\ F_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & F_{zz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

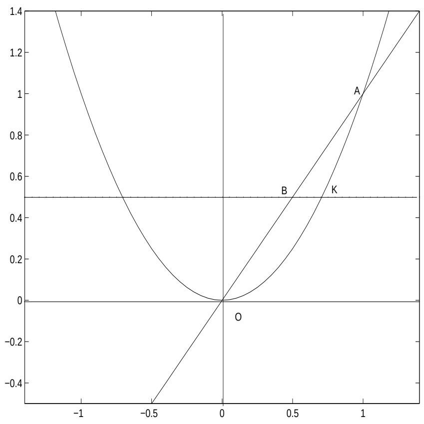
$$G=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial z}\\ \frac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$D(6,\,3,\,3,\,-6,\,-2)=\begin{bmatrix}H(F) & G^T\\ G & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&1&2\\0&2&0&1&-1\\0&0&2&1&-1\\1&1&1&0&0\\2&-1&-1&0&0\end{bmatrix}$$

Επειδή $n=3$ και $m=2$ συμπεραίνουμε ότι $k=n-m=1$, άρα χρειάζεται να υπολογισθεί η ορίζουσα D_1, που ισούται με $D_1=detD(6,\,3,\,3,\,-6,\,-2)=36$. Επειδή $D_1>0$, σύμφωνα με την Πρόταση 3 περίπτωση 1-υποπερίπτωση i) η συνάρτηση $f(x,y,z)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)=(6,\,3,\,3)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4^{η} Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_D\int(x^3-x\,y)dxdy$ όπου το χωρίο D περιγράφεται ως το σύνολο $D=\{\,(\,x\,,\,y\,)\in\mathbb{R}^2\;:\quad x\ge 0\,,\;\frac{1}{2}\le y\le x\,,\quad y\ge x^2\,\}$.

ΛΥΣΗ Από το σχήμα φαίνεται πως είναι προτιμώτερο να υπολογίσουμε το ολο-

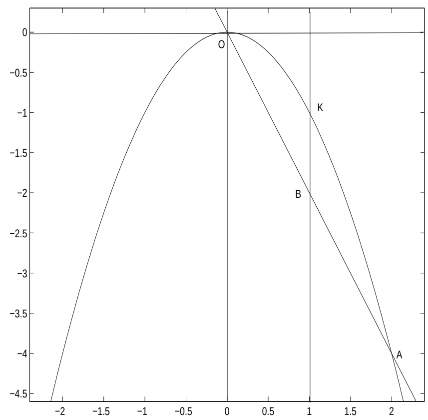


κλήρωμα προβάλλοντας αυτό στον άξονα yy'. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $y = x$ και $y = x^2$ βρίσκουμε τα σημεία τομής $A(1\,,\,1)$ και $O(0\,,\,0)$ όμοια από το σύστημα $y = \frac{1}{2}$ και $y = x$ βρίσκουμε το σημείο τομής τους $B(\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,)$, τέλος από τη λύση του συστήματος $y = \frac{1}{2}$ και $y = x^2$ υπολογίζουμε το σημείο $K(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2})$, ενδιαφερόμαστε μόνο για τις συντεταγμένες του K, γιατί $x \geq 0$. Έτσι έχουμε για το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/2}^{1} \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} (x^3 - xy)\,dxdy \;=\; \int_{1/2}^{1} \left[\,\frac{x^4}{4} \,-\, \frac{x^2 y}{2}\,\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{y^2 - y^4}{4} \,-\, \frac{y^2 - y^3}{2}\right) dy \;=\; \int_{1/2}^{1} \frac{-y^4 + 2y^3 - y^2}{4}\,dy \\
&= \frac{1}{4}\left(-\,\frac{y^5}{5} + \,\frac{y^4}{2} \,-\, \frac{y^3}{3}\right)_{1/2}^{1} = \frac{1}{4}\,\left(-\frac{1-(1/2)^5}{5} + \frac{1-(1/2)^4}{2} - \frac{1-(1/2)^3}{3}\right) = \frac{-1}{240}.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5^{η} Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_D\!\!\int (x+y)\,dxdy$, όπου το χωρίο D περιγράφεται ως το σύνολο $D = \{\,(\,x\,,\,y\,) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 1, \quad -2x \leq y \leq -x^2\,\}$.

ΛΥΣΗ Από το σχήμα φαίνεται πως είναι προτιμώτερο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα προβάλλοντας αυτό στον άξονα xx'. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $y = -2x$ και $y = -x^2$ βρίσκουμε τα σημεία τομής $A(2\,,\,-4)$ και $O(0\,,\,0)$ όμοια από το σύστημα $x = 1$ και $y = -2x$ βρίσκουμε το σημείο τομής $B(1\,,\,-2\,)$, τέλος από τη λύση του συστήματος $x = 1$ και $y = -x^2$ υπολογίζουμε το σημείο $K(1\,,\,-1)$.



Έτσι έχουμε για το ολοκλήρωμα

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_{y=-2x}^{y=-x^2} (x+y)\, dydx \;=\; \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-2x}^{y=-x^2} dx \\
&= \int_1^2 \left(x(-x^2+2x) + \frac{(-x^2)^2 - (-2x)^2}{2} \right) dx \;=\; \int_1^2 \left(-x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)_1^2 = -\frac{2^4-1^4}{4} + \frac{2^5-1^5}{10} \;=\; -\frac{15}{4} + \frac{31}{10} = -\frac{13}{20}.
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 6^{η} Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int (6\,x\,y)\, dxdy$ όπου το χωρίο D περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες $yx = 1$, $yx = 3$, $y = x^2$ και $y = 5x^2$.

ΛΥΣΗ Επειδή υπάρχει συμμετρία στις καμπύλες δε χρειάζεται σχήμα, και η άσκηση απλοποιείται αν θέσουμε

$$
u = yx \quad \text{και} \quad v = \frac{y}{x^2}. \tag{9}
$$

Ο μετασχηματισμός, μέσω της Ιακωβιανής ορίζουσας (1) δίνει

$$
\frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{du\,dv}{dx\,dy} = \frac{3y}{x^2} \Longrightarrow dxdy = \frac{du\,dv}{3v}. \tag{10}
$$

Μετασχηματίζοντας και το χωρίο D ως προς τις νέες μεταβλητές u, v θα έχουμε τα όρια του u να κυμαίνονται από 1 έως 3, και του v από 1 έως 5, το δε ολοκλήρωμα υπολογίζεται κάνοντας αντικατάσταση από (9) και (10)

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 \int_1^3 6u \, \frac{dudv}{3v} = \int_1^5 \frac{1}{v} \int_1^3 2u \, dudv = \int_1^5 \frac{1}{v} \left[\, u^2 \,\right]_{u=1}^{u=3} dv \\ &= 8 \int_1^5 \frac{1}{v} dv = 8 \left[\, \ln|v| \,\right]_{v=1}^{v=5} = 8 \ln 5. \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - (x-y)^2$.

1ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - 2x^2 - 4y^2]\, dxdy$ όπου D το χωρίο $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+1 \le y \le -x+3,\ y \ge x^2+1\,\}$.

2i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3(x+y)$.

2ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - x^3 - y^3 + 3(x+y+xy)]\, dxdy$ όπου το χωρίο D περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες $xy = 2,\ xy = 4,\ y = x^2,\ y = 4x^2$.

3i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.

3ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - x^2 - y^2 + 5xy]\, dxdy$ όπου D το χωρίο $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 3,\ \ 1+x^2 \le y \le 2x^2+1,\ \ x \le 0\,\}$.

4i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 4$.

4ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - 2y^2 + 2xy - 4]\, dxdy$ όπου το χωρίο D περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες $x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4,\ y = \frac{2}{x},\ \ y = \frac{4}{x}$.

5i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$.

5ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - x^4 - y^4 + 2xy]\, dxdy$ όπου το χωρίο D περικλείεται από τις γραμμές $y^2 = 9x,\ \ y = -3x^2$.

6i) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2)$.

6ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_D\int [f(x,y) - x^3 - y^3 + 6(x^2 + y^2 - xy)]\, dxdy$ όπου το χωρίο D περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 9$, $y = x,\ y = x+1$.

7) Να υπολογισθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + 4xy - (x-y)^2 + 3x^2y$.