ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Λαμία, 14 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1° (α) Να ελέγξετε, εάν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x-2y}{2x-3y}$. **Μονάδες 0,5**

Θεωρούμε τις ευθείες $y = mx$, $m\in\mathbb{R}$, μέσω των οποίων πλησιάζουμε το σημείο (0, 0) λαμβάνοντας

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \lim_{x\to 0}\frac{3x-2mx}{2x-3mx} = \lim_{x\to 0}\frac{(3-2m)}{(2-3m)} = \frac{3-2m}{2-3m}.$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει, διότι εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε το σημείο (0, 0).

(β) Να εξετάσετε, εάν υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{|x|+|y|}, & \text{εάν } (x,y)\neq(0,0) \\ a, & \text{εάν } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο (0,0). **Μονάδες 1,5**

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας για $\delta = \varepsilon$ και το

$$\left|\frac{xy^2}{|x|+|y|}\right| = \frac{|x||y|^2}{|x|+|y|} \le \frac{|x||y|^2}{|x|} = |y|^2 \to 0 \text{ καθώς } y\to 0$$

καταλήγουμε στο $a = 0$.

Θέμα 2° Να ευρεθή η ελάχιστη απόσταση του σημείου (0,0) από τα σημεία της ευθείας $x + y = 1$.

Μονάδες 2

Η απόσταση του τυχόντος σημείου (x, y) της ευθείας από την αρχή των αξόνων είναι

$$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

και με την βοήθεια της εξίσωσης της ευθείας, η απόσταση αυτή εκφράζεται ως συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$f(x) = d(x,1-x) = \sqrt{x^2+(1-x)^2} = \sqrt{2x^2-2x+1}.$$

Παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

η οποία μηδενίζεται για $x = ½$. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-2x+1}}-\frac{(2x-1)^2}{\left(\sqrt{2x^2-2x+1}\right)^3}=\frac{2(2x^2-2x+1)-(2x-1)^2}{\left(\sqrt{2x^2-2x+1}\right)^3}=\frac{1}{\left(\sqrt{2x^2-2x+1}\right)^3}$$

και είναι θετική για κάθε τιμή του x. Συνεπώς, η συνάρτηση απόστασης $f(x)$ έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = ½$, το οποίο δίδει την ελάχιστη απόσταση

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Θέμα 3ο Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, όπου a μία πραγματική παράμετρος.

Μονάδες 2

Παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3a.$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$x^2 - ay = 0,\qquad y^2 - ax = 0$$

αφαιρώντας κατά μέλη και λαμβάνουμε

$$x^2 - ay - y^2 + ax = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - ay + ax = (x - y)(x + y) + a\,(x - y) = (x - y)\,(x + y + a) = 0,$$

δηλ. το σημείο (0, 0) καθώς και το σημείο (a, a). Παρατηρούμε τώρα ότι

$$A(0, 0) = -9a^2 < 0,\quad A(a, a) = 27a^2 > 0.$$

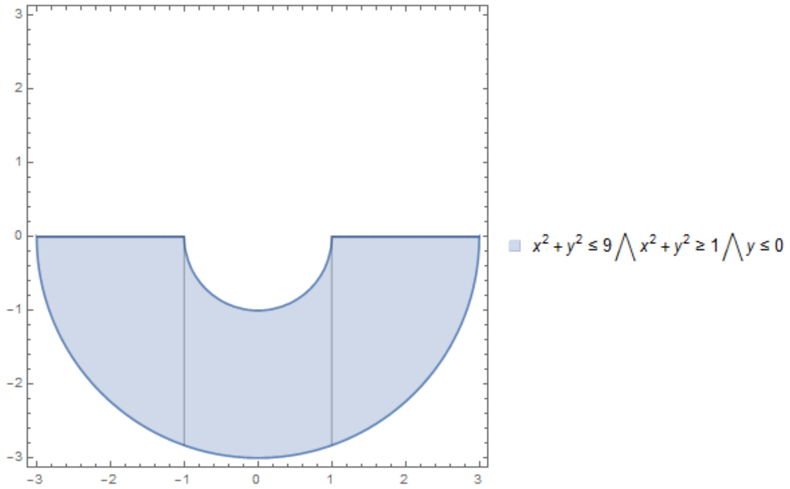
Συνεπώς η f έχει ένα σαγματικό σημείο στο (0, 0) και ένα ακρότατο στο σημείο (a, a). Επειδή

$$\frac{\partial^2 f(a,a)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(a,a)}{\partial y^2}=6a$$

έπεται ότι στο τοπικό ακρότατο (a, a) η f έχει μέγιστη τιμή για $a < 0$ και ελάχιστη για $a > 0$.

Θέμα 4ο Αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 0$ και $1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του D και το ολοκλήρωμα $I=\iint_D (3x+4y^2)\,dxdy$.

Μονάδες 2



Το εμβαδόν του χωρίου D σκιαγραφείται στο ανωτέρω σχήμα και υπολογίζεται ως ακολούθως.

1ος τρόπος: Ο απλούστερος τρόπος προσέγγισης είναι να θεωρήσουμε το ζητούμενο εμβαδόν ως την διαφορά των εμβαδών μεταξύ της κάτω ημιπεριφέρειας $x^2 + y^2 = 9$ και της κάτω ημιπεριφέρειας $x^2 + y^2 = 1$, δηλ. την

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dydx - \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dydx = \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Δια τον υπολογισμό του αορίστου ολοκληρώματος $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, όπου $a > 0$, χρησιμοποιείται επί παραδείγματι, ο μετασχηματισμός $x = a\sin u$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, όθεν $dx = a\cos u\, du$ και $u = \arcsin(x/a)$. Επομένως,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2-(a\sin u)^2}\,a\cos u\,du = \int\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}\,a\cos u\,du = a^2\int\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du$$

$$= a^2\int\cos^2 u\,du = a^2\int\frac{1+\cos(2u)}{2}\,du = \frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin(2u)\right) = \frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}2\sin u\cos u\right).$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

Άρα

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{3^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{3^2-x^2}\right]_{-3}^{3} - \left[\frac{1^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{1}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{1^2-x^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3^2}{2}\arcsin(1) - \frac{3^2}{2}\arcsin(-1) - \frac{1^2}{2}\arcsin(1) + \frac{1^2}{2}\arcsin(-1)$$

$$= \frac{9}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 4\pi.$$

2ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι το εν λόγω χωρίο δύναται να υποδιαιρεθεί σε τρία επί μέρους χωρία

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} dydx + \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dydx + \int_{1}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dydx = \int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{9-x^2}\right)dx + \int_{-3}^{-1}\sqrt{9-x^2}\,dx + \int_{1}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

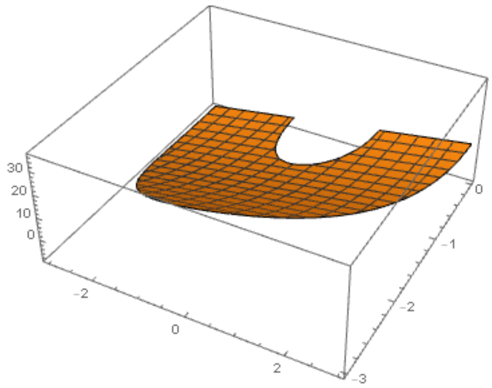
3^{ος} τρόπος: Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες ο προσδιορισμός του εμβαδού είναι απλούστερος, καθώς $1 \le x^2 + y^2 \le 9 \Leftrightarrow 1 \le r^2 \le 9 \Leftrightarrow 1 \le r \le 3$ και $y \le 0 \Leftrightarrow \sin\theta \le 0 \Leftrightarrow -\pi \le \theta \le 0$. Επομένως,

$$\iint_D dxdy = \int_1^3 \int_{-\pi}^0 r d\theta dr = \int_1^3 r\pi dr = \pi \int_1^3 r dr = \pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^3 = 4\pi.$$

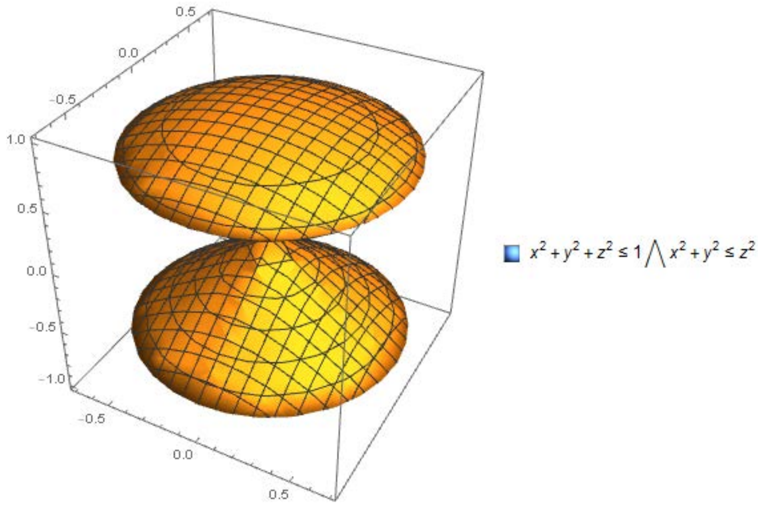
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I, θέτοντας $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, έχουμε

$$I = \iint_D (3x + 4y^2) dxdy = \int_1^3 \int_{-\pi}^0 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta) r d\theta dr = \int_1^3 \int_{-\pi}^0 3r^2 \cos\theta d\theta dr + \int_1^3 \int_{-\pi}^0 4r^3 \sin^2\theta d\theta dr$$

$$= 0 + \int_1^3 \int_{-\pi}^0 4r^3 \sin^2\theta d\theta dr = \int_1^3 2r^3 dr \int_{-\pi}^0 (1 - \cos(2\theta)) d\theta = 40\pi.$$



Θέμα 5^{o} Αν $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ και $x^2 + y^2 \le z^2\}$, να υπολογισθεί ο όγκος του G και το ολοκλήρωμα $I = \iiint_G z dxdydz$. **Μονάδες 2**



Χρησιμοποιώντας σφαιρκές συντεταγμένες ο προσδιορισμός του όγκου είναι απλός, καθώς $0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le r^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le r \le 1$ και $x^2 + y^2 \le z^2 \Leftrightarrow r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \le r^2 \cos^2\varphi \Leftrightarrow r^2 \sin^2\varphi \le r^2 \cos^2\varphi \Leftrightarrow r^2 \cos^2\varphi - r^2 \sin^2\varphi \ge 0 \Leftrightarrow \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \ge 0 \Leftrightarrow \cos(2\varphi) \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le 2\varphi \le \pi/2 \Leftrightarrow 0 \le \varphi \le \pi/4$. Επομένως,

$$\iiint_G dxdydz = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I, θέτοντας $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, έχουμε

$$I = \iiint_G z dxdydz = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\varphi r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

Θέμα 6$^{\text{ο}}$ Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z, \sin z, \sqrt[3]{xy})$ κατά μήκος της καμπύλης, που ορίζεται από την παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t, t)$ με $t \in [0, \pi/4]$. **Μονάδες 2**

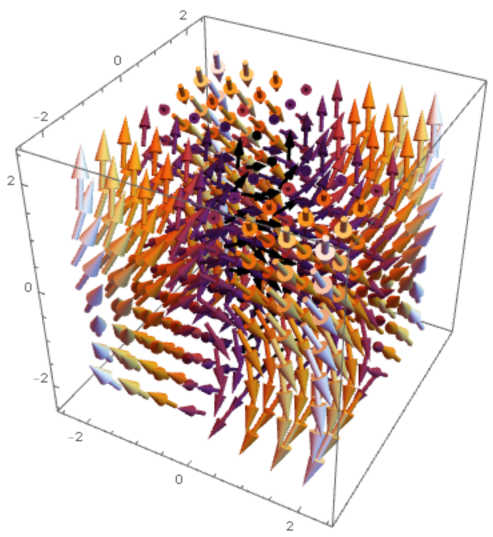
Έχουμε

$\vec{F}(r(t)) = \vec{F}(\sin^3 t, \cos^3 t, t) = \left(\cos t, \sin t, \sqrt[3]{\sin^3 t \cos^3 t}\right) = (\cos t, \sin t, \sin t\cos t)$ και

$r'(t) = (3\sin^2 t\cos t, -3\cos^2 t\sin t, 1)$, $t \in [0, \pi/4]$. Επομένως,

$\vec{F}(r(t)) \bullet r'(t) = (\cos t, \sin t, \sin t\cos t) \bullet (3\sin^2 t\cos t, -3\cos^2 t\sin t, 1) = 3\sin^2 t\cos^2 t - 3\cos^2 t\sin^2 t + \sin t\cos t$
$= \sin t\cos t$

$$\int_C \vec{F} dr = \int_0^{\pi/4} \sin t\cos t dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin(2t) dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \sin(2t) d(2t) = -\frac{1}{4}\cos(2t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$



Υποτύπωση του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z, \sin z, \sqrt[3]{xy})$.