ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σειρές συναρτήσεων

Καθώς το πεπερασμένο περικλείει μία άπειρη σειρά
Και στο απεριόριστο εμφανίζονται όρια
Έτσι και η ψυχή της απεραντοσύνης φωλιάζει στις μικρές λεπτομέρειες
Και μέσα στα πιο στενά όρια, όρια δεν υπάρχουν.
Τι χαρά, να διακρίνεις το απειροελάχιστο μέσα στο άπειρο!
Το τεράστιο να αντιλαμβάνεσαι μέσα στο μικρό, πόσο θεϊκό!

Jacob Bernoulli (1655 - 1705)

…Τα μαθηματικά συγκρίνουν τα πιο διαφορετικά φαινόμενα και ανακαλύπτουν τις μυστικές αναλογίες, που τα ενώνουν.

…Η βαθιά μελέτη της φύσης είναι η πιο γόνιμη πηγή των μαθηματικών ανακαλύψεων.

… Η θερμότητα, όπως η βαρύτητα, διαπερνά κάθε ουσία του σύμπαντος, οι ακτίνες της καταλαμβάνουν όλα τα μέρη του χώρου. Το αντικείμενο της εργασίας μας είναι να εκθέσουμε τους μαθηματικούς νόμους, που υπακούουν σε αυτό το στοιχείο. Η θεωρία της θερμότητας από εδώ και πέρα θα διαμορφώσει έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους της Γενικής Φυσικής.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σειρές συναρτήσεων

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος προσέγγισης μίας συνάρτησης από μία πολυωνυμική συνάρτηση, δίνεται ο ορισμός της δυναμοσειράς, της σειράς Taylor και Maclaurin. Παρουσιάζεται, επίσης, η προσέγγιση μίας συνάρτησης από τριγωνομετρικά πολυώνυμα και περιγράφεται η ανάλυση μίας συνάρτησης σε σειρά Fourier, δηλαδή, σε μία σειρά που αποτελείται από τις συναρτήσεις $\sin(nx)$ *και* $\cos(nx)$.

Προαπαιτούμενη γνώση
Κριτήρια σύγκλισης σειρών πραγματικών αριθμών, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου και ορισμένου ολοκληρώματος.

9.1 Δυναμοσειρές

Ορισμός 9.1.1. Η ακολουθία $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, με γενικό όρο

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n,$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ και x μία πραγματική μεταβλητή, ονομάζεται **δυναμοσειρά με κέντρο** x_0 και συμβολίζεται με

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{9.1.1}$$

Η πολυωνυμική συνάρτηση

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N},$$

ονομάζεται **μερικό άθροισμα** της δυναμοσειράς και οι συναρτήσεις

$$a_0,\ a_1(x-x_0),\ a_2(x-x_0)^2, \ldots, a_n(x-x_0)^n, \ldots$$

ονομάζονται **όροι** της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Αν $x_1\in\mathbb{R}$ και η αριθμητική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ είναι συγκλίνουσα (αντίστοιχα, απόλυτα συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα), τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι **συγκλίνουσα** στο x_1 (αντίστοιχα, **απόλυτα συγκλίνουσα** στο x_1 ή **αποκλίνουσα** στο x_1).

Παράδειγμα 9.1.2.
Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-2)^n + \cdots$$

έχει κέντρο $x_0 = 2$ και συντελεστές

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3}, \ldots, a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, \ldots$$

- Είναι φανερό ότι για $x = 2$ η δοθείσα δυναμοσειρά είναι ίση με 1, άρα συγκλίνει.

- Αν x είναι συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 2, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy (βλέπε, Πρόταση 3.2.19) και χρησιμοποιώντας $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (βλέπε, Πίνακα 2.3) η δυναμοσειρά
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(x-2\right)^n\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left|\left(x-2\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|x-2\right|^{n-1}$$
συγκλίνει, αν
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|x-2\right|^{n-1}}<1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\frac{\sqrt[n]{\left|x-2\right|^n}}{\sqrt[n]{\left|x-2\right|}}\right)<1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|x-2\right|}{\sqrt[n]{\left|x-2\right|}}<1\Leftrightarrow\left|x-2\right|<1\Leftrightarrow 1<x<3.$$

Επομένως, επειδή η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(x-2\right)^n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα για $x\in(1,2)\cup(2,3)$, σύμφωνα με το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης είναι και συγκλίνουσα, (βλέπε, Πρόταση 3.2.21.). Άρα, η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(x-2\right)^n$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x\in(1,2)\cup(2,3)$, (βλέπε, Ορισμός 9.1.1.).

Παρατηρήστε ότι:

- για $x=1$ η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(1-2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$
η οποία είναι αποκλίνουσα αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2.).

- Για $x=3$ η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\left(3-2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$
η οποία είναι συγκλίνουσα εναλλάσσουσα σειρά, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).

Συνεπώς, η δοθείσα δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in(1,3]$. ◊◊

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι μία δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$, γενικά, δεν συγκλίνει για κάθε τιμή της μεταβλητής x, συγκλίνει πάντοτε στο κέντρο της x_0. Δηλαδή, υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο (το κέντρο της δυναμοσειράς), στο οποίο η δυναμοσειρά συγκλίνει. Το ερώτημα που τίθεται είναι: «ποιοί είναι οι πραγματικοί αριθμοί x, για τους οποίους η δυναμοσειρά συγκλίνει;», ισοδύναμα ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε το διάστημα του πραγματικού άξονα, όπου ανήκουν οι αριθμοί x, ώστε η δυναμοσειρά να είναι συγκλίνουσα. Θεωρώντας ότι το x λαμβάνει μία σταθερή πραγματική τιμή, μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα στη μελέτη σύγκλισης της αντίστοιχης (αριθμητικής) σειράς και να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς εφαρμόζοντας τα κριτήρια, που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Ορισμός 9.1.3. Το σύνολο όλων των $x\in\mathbb{R}$, για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ στην (9.1.1) συγκλίνει, ονομάζεται **περιοχή** ή **τόπος σύγκλισης** της δυναμοσειράς.
Έστω το σύνολο
$$S=\{r:\ r=\left|x-x_0\right|,\ \ x\in\mathbb{R}\ \ \text{και}\ \ \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\ \ \text{συγκλίνουσα}\}. \tag{9.1.2}$$
Ο αριθμός
$$R=\begin{cases}0, & \text{όταν } S=\{0\}\\ +\infty, & \text{όταν } S \text{ δεν είναι άνω φραγμένο}\\ \sup S, & \text{όταν } S\neq\{0\} \text{ και είναι άνω φραγμένο}\end{cases} \tag{9.1.3}$$
ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς στην (9.1.1), και

$$\left(x_0 - R,\, x_0 + R\right) \tag{9.1.4}$$

ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς στην (9.1.1).

Αν A είναι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς στην (9.1.1) ορίζουμε **ως άθροισμα της δυναμοσειράς** τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \text{ για κάθε } x \in A. \tag{9.1.5}$$

Παρατήρηση 9.1.4. Στην περίπτωση που η δυναμοσειρά συγκλίνει με ακτίνα σύγκλισης $0 < R < +\infty$, τότε η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς μπορεί να είναι ένα από τα διαστήματα

$$\left(x_0 - R,\, x_0 + R\right),\quad \left[x_0 - R,\, x_0 + R\right),\quad \left(x_0 - R,\, x_0 + R\right],\quad \left[x_0 - R,\, x_0 + R\right]$$

Για να προσδιορίσουμε τη μορφή της περιοχής σύγκλισης μετά τον υπολογισμό του διαστήματος σύγκλισης θέτουμε στη δυναμοσειρά τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$, και κατόπιν ελέγχουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση της αντίστοιχης (αριθμητικής) σειράς, εφαρμόζοντας τα γνωστά κριτήρια, που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Εφαρμογή 9.1.5. Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$ και διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$, και τότε το άθροισμα της δυναμοσειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \tag{9.1.6}$$

Απόδειξη: Προφανώς η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ είναι της μορφής όπως στην (9.1.1), άρα είναι μία δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 0$ και σταθερούς συντελεστές $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 1$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7. (i), αν

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1),$$

τότε η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στην τιμή $\dfrac{1}{1-x}$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τη σχέση (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \{r:\ r = |x| < 1,\ \ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ συγκλίνουσα}\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 1$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η γεωμετρική σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$, και επειδή $x_0 = 0$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1,1)$.

Επειδή η γεωμετρική σειρά για $x = \pm 1$ αποκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (ii), (iii)), η περιοχή σύγκλισης ταυτίζεται με το διάστημα σύγκλισης, δηλαδή, είναι $(-1,1)$. Θεωρώντας $A = (-1,1)$ από την (9.1.5) ορίζεται η αντίστοιχη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, η οποία είναι το άθροισμα της δυναμοσειράς, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7. (i)). ◊◊

Παραδείγματα 9.1.6.

Να προσδιορισθούν η ακτίνα, το διάστημα και η περιοχή σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} (x-3)^n$

i) Στο Παράδειγμα 9.1.2. αποδείχθηκε ότι για κάθε $x \in (1,3]$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}(x-2)^n$ με κέντρο $x_0 = 2$ συγκλίνει. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \left\{ r:\ r = |x-2| < 1,\quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}(x-2)^n \quad \text{συγκλίνουσα} \right\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 1$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$, και επειδή $x_0 = 2$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(1,3)$.

Επειδή $0 < R < +\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.4, χρειάζεται να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι για $x = 1$ αποκλίνει και για $x = 3$ συγκλίνει, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.2). Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $(1,3]$.

ii) Η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}(x-3)^n = \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2^2 \cdot 2}(x-3)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3}(x-3)^3 + \cdots + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$

Είναι φανερό ότι είναι της μορφής όπως στην (9.1.1), άρα πρόκειται για δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 3$ και με συντελεστές $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2}$, $a_3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3} \cdots$.

- Είναι φανερό ότι για $x = 3$ η δοθείσα δυναμοσειρά είναι ίση με 0, άρα συγκλίνει.
- Αν x είναι συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός διάφορος του 3, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.19) και χρησιμοποιώντας $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (βλέπε, Πίνακα 2.3) συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$

συγκλίνει αν

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n\right|} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{x-3}{2}\right|^n} < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

Επειδή η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}(x-3)^n$ για τις παραπάνω τιμές του x συγκλίνει, εφαρμόζοντας την (9.1.2) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$S = \left\{ r:\ r = |x-3| < 2,\quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}(x-3)^n \quad \text{συγκλίνουσα} \right\},$$

είναι άνω φραγμένο με $S \neq \{0\}$, συνεπώς $\sup S = 2$. Από την (9.1.3) συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 2$, και επειδή $x_0 = 3$ από την (9.1.4) το διάστημα σύγκλισης είναι $(1,5)$.

Επιπλέον, επειδή $0 < R < +\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.4, εξετάζουμε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι:

- Για $x = 1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα εναλλάσσουσα σειρά, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).

- Για $x = 5$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία είναι αποκλίνουσα αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p = 1$), (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2.).

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω, με το διάστημα σύγκλισης $(1,5)$ της δυναμοσειράς, προκύπτει ότι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $[1,5)$. ◊◊

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 9.1.3 με τα κριτήρια λόγου του D' Alembert, και ρίζας του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17, Πρόταση 3.2.19, αντίστοιχα) προκύπτει ο τρόπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης και ταυτόχρονα ένα κριτήριο σύγκλισης ή απόκλισης της δυναμοσειράς μέσω της τιμής της ακτίνας, όπως διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα, (βλέπε, Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

Θεώρημα 9.1.7. i) Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ στην (9.1.1). Τότε

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \\[2ex] 0, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty \\[2ex] \dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα,

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

ii) Έστω ότι R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, τότε

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\[2ex] 0, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\[2ex] \dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα,

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
- συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Παρατηρήσεις 9.1.8.

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 η σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ εξαρτάται από την τιμή της ακτίνας σύγκλισης, η οποία έχει μία από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:
   a) αν η ακτίνα σύγκλισης είναι $R>0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (απόλυτα).
   b) αν $R=0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο κέντρο της x_0 και αποκλίνει σε κάθε άλλο $x \neq x_0$.
   c) αν $R=+\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει (απόλυτα) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.7, όταν $R>0$, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς, επειδή το θεώρημα δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση ή μη της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης. Όπως σχολιάστηκε και στην Παρατήρηση 9.1.4, μετά τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης, θέτουμε στη δυναμοσειρά $x=x_0-R$, $x=x_0+R$ και στη συνέχεια ελέγχουμε τη σύγκλιση ή μη της (αριθμητικής) σειράς, εφαρμόζοντας τα γνωστά κριτήρια, που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Παραδείγματα 9.1.9.
Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (x-2)^n$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$, με $p>1$

i) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n!}$, παρατηρούμε ότι $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, και έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 (i), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=+\infty$. Επομένως, η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\mathbb{R}$.

ii) Θέτουμε $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ και έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1,$$

επειδή $1 < \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.8 (ii), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$, και επειδή $x_0=2$ η δυναμοσειρά συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(1,3)$. Για τον υπολογισμό της περιοχής σύγκλισης, ακολουθώντας τα σχόλια της Παρατήρησης 9.1.8 (ii), εξετάζουμε τη σύγκλιση για $x=1$ και $x=3$, με τον τρόπο που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 9.1.6 (i), και τότε συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά έχει περιοχή σύγκλισης $(1,3]$.

iii) Πρόκειται για δυναμοσειρά κέντρου $x_0=0$ με $a_n = \frac{1}{n^p}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.7 (i), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$, και επειδή $x_0=0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$.

Επιπλέον, επειδή $0<R<+\infty$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1.8 (ii), χρειάζεται να εξετάσουμε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, και διαπιστώνουμε ότι:

- για $x=-1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$, η οποία είναι εναλλάσσουσα σειρά με $p>1$, συνεπώς συγκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.3.3.).
- Για $x=1$, η δοθείσα δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, η οποία είναι αρμονική σειρά $p-$τάξης με $p>1$, συνεπώς συγκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13.).

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω με το διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$ της δυναμοσειράς, προκύπτει ότι η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $[-1,1]$. ◊◊

Στον Ορισμό 9.1.3 είδαμε ότι με τη βοήθεια μίας συγκλίνουσας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ ορίζεται στην (9.1.5) η συνάρτηση

$$f:\left(x_0-R,\,x_0+R\right)\subseteq A\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n,$$

όπου R είναι η ακτίνα και A η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς. Στις προτάσεις που ακολουθούν, παρουσιάζεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη για κάθε $x\in\left(x_0-R,\,x_0+R\right)$ του διαστήματος σύγκλισης $\left(x_0-R,\,x_0+R\right)$, δηλώνεται δηλαδή, ότι η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη (όρο-προς-όρο) και ολοκληρώσιμη (όρο-προς-όρο) για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος σύγκλισής της, όπως συμβαίνει και στα πεπερασμένα αθροίσματα. Οι αποδείξεις των προτάσεων μπορούν να αναζητηθούν σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα, (βλέπε, Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

Πρόταση 9.1.10. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ συγκλίνει για κάθε $x\in\left(x_0-R,\,x_0+R\right)$, όπου R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left(x_0-R,\,x_0+R\right)$, και ισχύει

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left((x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1} \tag{9.1.7}$$

και η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}=a_1+2a_2\left(x-x_0\right)+\cdots+na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}+\cdots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R.

Παράδειγμα 9.1.11.
Να υπολογισθεί:

i) η παράγωγος της σειράς : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

ii) η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$, όπου $-1<x<1$.

i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισής της είναι $R=+\infty$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.9 (i)). Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.10, η συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad x\in\mathbb{R},$$

είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από την (9.1.7) ισχύει

$$\begin{aligned} f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n!}x^{n-1}=1+2\frac{x}{2!}+3\frac{x^2}{3!}+\cdots+n\frac{x^{n-1}}{n(n-1)!}+\cdots= \\ &=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots=f(x). \end{aligned} \tag{9.1.8}$$

Στην επόμενη ενότητα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση στην (9.1.8) είναι η $f(x)=e^x$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.2.3).

ii) Αν θεωρηθεί ότι η δοθείσα σειρά συγκλίνει στην $f(x)$ για κάποιες τιμές του x, σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.10 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα ισχύει:

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία είναι μία γεωμετρική σειρά, αρκεί να θέσουμε στη γεωμετρική σειρά, όπου x το $-x^2$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, αν $\left|-x^2\right|=x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$, η σειρά συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$, και τότε το άθροισμα της δυναμοσειράς είναι

$$f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε, (βλέπε, Πίνακα 7.1.10)

$$f(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}. \tag{9.1.9}$$

Επειδή για την αρχική σειρά είναι $f(0)=0$ από την (9.1.9) προκύπτει ότι

$$\tan^{-1}(0)+c=0\Rightarrow c=0.$$

Επομένως, η ζητούμενη συνάρτηση, για την οποία ίσχυε

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ \text{όπου } -1<x<1,$$

είναι η $f(x)=\tan^{-1}(x)$. ◊◊

Πρόταση 9.1.12. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $x\in(x_0-R,\,x_0+R)$, όπου R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[x_0,x]$ (ή $[x,x_0]$) για κάθε $x\in(x_0-R,\,x_0+R)$, και ισχύει

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{9.1.10}$$

δηλαδή,

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}. \tag{9.1.11}$$

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}=a_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\cdots+a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R με την αρχική δυναμοσειρά.

Εφαρμογή 9.1.13. Αν $-1<x<1$, να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{9.1.12}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots\ , \tag{9.1.13}$$

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, η γεωμετρική σειρά στην (9.1.13) συγκλίνει, αν $|-x|=|x|<1$, και τότε το άθροισμά της προκύπτει αν θέσουμε στην (9.1.6) όπου x το $-x$, άρα

$$\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots. \tag{9.1.14}$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$.

Σύμφωνα με την (9.1.10) στην Πρόταση 9.1.12, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μέλη την ισότητα στην (9.1.14), οπότε υποθέτοντας ότι $x>0\Rightarrow x+1>1$, έχουμε

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\Big[\ln|1+t|\Big]_0^x=\ln|1+x|-\ln 1=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12 η παραπάνω σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης την ίδια με την αρχική δυναμοσειρά, δηλαδή, $R=1$. Επομένως, η δυναμοσειρά στην (9.1.12) συγκλίνει, αν $-1<x<1$. ◊◊

9.2 Σειρά Taylor και Maclaurin

Στην προηγούμενη ενότητα συμπεράναμε ότι μία συγκλίνουσα δυναμοσειρά αποτελεί μία συνάρτηση συνεχή, παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη στο διάστημα σύγκλισης. Στην ενότητα αυτή, θα μας απασχολήσει το αντίστροφο πρόβλημα. Μία γνωστή συνάρτηση f, που έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα *I*, μπορεί να γραφεί με τη μορφή δυναμοσειράς στο ίδιο διάστημα; Έστω ότι αυτό είναι εφικτό, δηλαδή, έστω ότι υπάρχει μία δυναμοσειρά κέντρου x_0, τέτοια ώστε

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots.$$

Αναζητούμε τους συντελεστές a_n της παραπάνω δυναμοσειράς. Είναι φανερό ότι

$$f(x_0)=a_0$$

Επιπλέον,

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\cdots\Rightarrow f'(x_0)=a_1$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+12a_4(x-x_0)^2+\cdots\Rightarrow f''(x_0)=2a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-x_0)+\cdots\Rightarrow f'''(x_0)=2\cdot 3a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}$$

……………………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1a_n+(n+1)\cdot n\cdots 2\cdot 1a_{n+1}\left(x-x_0\right)+\cdots\Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n\Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad \text{κ.ο.κ}$$

Επομένως, ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία συμπεραίνομε ότι, αν η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$, τότε η σειρά έχει τη μορφή

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\cdots.$$

Ορισμός 9.2.1. Έστω f συνάρτηση, που έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα I και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I. Ονομάζουμε **πολυώνυμο του Taylor *n* βαθμού** της συνάρτησης f στο σημείο x_0 το πολυώνυμο

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (9.2.1)$$

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (9.2.2)$$

ονομάζεται **σειρά** ή **ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης** f **με κέντρο ανάπτυξης το σημείο** x_0.

Αν $x_0=0$, η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (9.2.3)$$

ονομάζεται **σειρά** ή **ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης** f **με κέντρο ανάπτυξης το** 0.

Παρατήρηση 9.2.2.

Αν μία συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε ένα διάστημα I και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I, τότε πάντοτε μπορεί να υπολογιστεί το πολυώνυμο του Taylor της f στο σημείο x_0 από τη σχέση (9.2.1) και μάλιστα $p_n(x_0) = f(x_0)$. Το ερώτημα είναι, οι τιμές της f για τα x, που βρίσκονται σε μία περιοχή γύρω από το x_0, μπορούν να υπολογιστούν από το πολυώνυμο του Taylor (ή τη σειρά Taylor, αν αυτή συγκλίνει) της f στο σημείο x_0; Μία εικασία για την απάντηση παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 9.2.3, που ακολουθεί, η δε απάντηση δίνεται στη συνέχεια στο Θεώρημα 9.2.5.

Παράδειγμα 9.2.3.
Να υπολογισθεί η σειρά Maclaurin και τα πολυώνυμα 5ου και 10ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = e^x$. Ποιές είναι οι τιμές $p_5(1)$, $p_8(1)$; Τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τις τιμές του υπερβατικού αριθμού e ως προς την ακρίβεια της προσέγγισής του, (βλέπε, Ενότητα 2.6, Πίνακα 2.2).
Είναι γνωστό ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει παραγώγους κάθε τάξης και μάλιστα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Επομένως, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης e^x, δίνεται από την (9.2.3), και είναι

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{9.2.4}$$

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς (9.2.4) με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι το $\mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.9 (i)).
Τα πολυώνυμα της $f(x) = e^x$ υπολογίζονται από την (9.2.1) για $x_0 = 0$, και είναι:

- το πολυώνυμο 5ου βαθμού

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5,$$

- το πολυώνυμο 8ου βαθμού

$$p_8(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 = p_5(x) + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8.$$

Επειδή το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς (9.2.4) είναι το $\mathbb{R}$, επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί $x = 1$ στα παραπάνω πολυώνυμα, συνεπώς οι ζητούμενες τιμές είναι:

$$p_5(1) = 2.71666666, \quad \text{και} \quad p_8(1) = 2.718278769841270$$

Η τιμή $e = f(1) = 2.718281828459046$, που υπολογίστηκε στην Ενότητα 2.6 προσεγγίζεται από το πολυώνυμο Maclaurin 5ου βαθμού με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων και από το πολυώνυμο Maclaurin 8ου βαθμού με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Παρατηρήστε ότι, η προσέγγιση είναι «αρκετά γρήγορη» εξαιτίας του παραγοντικού που υπάρχει στον παρονομαστή του τύπου των πολυωνύμων. ◊◊

Εφαρμογή 9.2.4. Να αποδειχθεί ότι:

i) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ έχει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \tag{9.2.5}$$

ii) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \cos(x)$ έχει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \tag{9.2.6}$$

Απόδειξη: i) Είναι γνωστό ότι, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης, επομένως, για $x_0 = 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$\sin(0) = 0$

$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)'_{x=0} = \cos(0) = 1$

$\left(\sin(x)\right)'' = -\sin(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)''_{x=0} = -\sin(0) = 0$

$\left(\sin(x)\right)''' = -\cos(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)'''_{x=0} = -\cos(0) = -1$

$\left(\sin(x)\right)^{(4)} = \sin(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)^{(4)}_{x=0} = \sin(0) = 0$

Γενικά , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύουν

$$\left(\sin(x)\right)^{(2n)} = (-1)^n \sin(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)^{(2n)}_{x=0} = (-1)^n \sin(0) = 0\,,$$

και

$$\left(\sin(x)\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos(x) \Rightarrow \left(\sin(x)\right)^{(2n+1)}_{x=0} = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n\,.$$

Επομένως, οι συντελεστές των άρτιων δυνάμεων του x στη σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ είναι ίσοι με 0 και οι παράγωγοι των περιττών δυνάμενων είναι ίσοι με $(-1)^n$.

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στη σχέση (9.2.3) προκύπτει ότι η σειρά Maclaurin της $f(x) = \sin(x)$ είναι της μορφής

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,.$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης, και αποδεικνύεται ότι για $x_0 = 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύουν:

$$\left(\cos(x)\right)^{(2n)} = (-1)^n \cos(x)\,, \qquad \text{και} \qquad \left(\cos(x)\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \sin(x)\,.$$

Επομένως, θέτοντας $x = 0$ στις παραπάνω παραγώγους έχουμε αντίστοιχα

$$\left(\cos(0)\right)^{(2n)} = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n\,, \qquad \text{και} \qquad \left(\cos(x)\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \sin(0) = 0\,.$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στην (9.2.3), υπολογίζεται ότι η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \cos(x)$ είναι της μορφής

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\,.$$ ◊◊

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα της Παρατήρησης 9.2.2, δηλαδή, αν το πολυώνυμο Taylor n-οστού βαθμού της συνάρτησης f στο σημείο x_0, $p_n(x)$, προσεγγίζει ή δίνει ακριβώς τις τιμές $f(x)$ χρειαζόμαστε την έννοια του υπολοίπου $R_n(x)$. Το **υπόλοιπο** $R_n(x)$ είναι εκείνη η συνάρτηση του x, που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)\,.$$

Η απόλυτη τιμή $|R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$ λέγεται **σφάλμα** της προσέγγισης της $f(x)$ από το $p_n(x)$. Αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα (βλέπε, Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1999; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

Θεώρημα 9.2.5. (*Taylor*) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα I και το εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$. Τότε, για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,, \qquad (9.2.7)$$

όπου για κάποιο $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ το υπόλοιπο είναι της μορφής

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \text{(υπόλοιπο Lagrange)} \qquad (9.2.8)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n, \qquad \text{(υπόλοιπο Cauchy)}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad (9.2.9)$$

Για την $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για τη σειρά Taylor της f με κέντρο ανάπτυξης το εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$, γράφουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (9.2.10)$$

αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0. \qquad (9.2.11)$$

Παρατήρηση 9.2.6.
i) Μία γνωστή συνάρτηση f για να αναπτυχθεί σε *σειρά Taylor* **δεν** αρκεί να έχει παραγώγους κάθε τάξης στην περιοχή του σημείου ανάπτυξής της, και **δεν** αρκεί να γνωρίζουμε την περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς η οποία να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της f, (βλέπε, (9.1.5) στον Ορισμό 9.1.3). Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor **ικανή** και **αναγκαία** συνθήκη ώστε το άθροισμα μίας σειράς Taylor (δυναμοσειράς) να ισούται με τη συνάρτηση f είναι το υπόλοιπο να τείνει στο 0, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5), ανεξάρτητα από τον τύπο του υπολοίπου, είτε αυτό δίνεται από την (9.2.8), είτε από την (9.2.9).
Στη συνέχεια, στις εφαρμογές που ακολουθούν αποδεικνύονται ότι τα υπόλοιπα των στοιχειωδών συναρτήσεων (εκθετικής, ημιτόνου, συνημιτόνου, διωνυμικής συνάρτησης) τείνουν στο μηδέν, επομένως οι αντίστοιχες συναρτήσεις μπορούν να γράφονται ισοδύναμα ως σειρές.
ii) Οι ιδιότητες της συνάρτησης f καθορίζουν τον τύπο του υπολοίπου $R_n(x)$, που θα επιλεγεί για τον έλεγχο της (9.2.11).
Η ολοκληρωτική μορφή υπολοίπου, που δίνεται από τη (9.2.9), εφαρμόζεται όταν η παράγωγος $(n+1)$-τάξης της f ορίζεται και είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,x]$, (βλέπε, Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014). Εκτός από τους τύπους υπολοίπου, που δόθηκαν στο Θεώρημα 9.2.5, στη βιβλιογραφία δίνονται και άλλοι τύποι.

Εφαρμογή 9.2.7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad (9.2.12)$$

Για $x=1$, ο αριθμός e είναι το άθροισμα της σειράς

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

Απόδειξη: Πράγματι, συνδυάζοντας την (9.2.7) με την (9.2.4) (βλέπε, Παράδειγμα 9.2.3) μπορούμε να γράψουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

όπου το υπόλοιπο $R_n(x)$ δίνεται όπως στην (9.2.8),

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ του 0 και του x. Τότε,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ αν } x>0 \text{ ή}$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ αν } x<0.$$

Επιπλέον, για την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης των ακολουθιών προκύπτει $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$, (βλέπε, όριο λόγου του D'Alembert- Πρόταση 2.6.2), επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σύγκλιση της σειράς Maclaurin, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Συνεπώς, η e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,$$

αποδεικνύοντας την (9.2.12).

Προφανώς, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι το $\mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (βλέπε, Παράδειγμα 9.1.9 (i)). Η τιμή $x=1$ ανήκει στο διάστημα σύγκλισης, οπότε κάνοντας αντικατάσταση στη (9.2.12) προκύπτει η έκφραση του αριθμού e από μία σειρά. Δείτε και συγκρίνετε με την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην Πρόταση 2.6.6. ◊◊

Θεώρημα 9.2.8. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο ανοικτό διάστημα I, x_0 εσωτερικό σημείο του I, και έστω ότι υπάρχει $M>0$, τέτοιο ώστε

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}, \text{ και για κάθε } x \in I.$$

Τότε, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο x_0.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5), η f γράφεται από την (9.2.7)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας ως $R_n(x)$ θεωρούμε το υπόλοιπο Lagrange από την (9.2.8),

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

Η ακολουθία

$$a_n = \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

είναι μηδενική, επειδή

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1 .$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty}|R_n(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le \lim_{n\to+\infty}\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} = 0 .$$

Άρα, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, το οποίο επαληθεύει την (9.2.11), ικανή και αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος Taylor για τη σύγκλιση της ομώνυμης σειράς, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Επομένως, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο σημείο x_0. ◊◊

Εφαρμογή 9.2.9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\cos(x)$ αναπτύσσονται σε σειρά Maclaurin και οι αντίστοιχες σειρές είναι :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

Απόδειξη: Για τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$, οι παράγωγοι κάθε τάξης n εξαρτώνται από το αν ο αριθμός n είναι άρτιος ή περιττός, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.4 (i)), και είναι της ακόλουθης μορφής:

$$f^{(2n)}(x) = \left(\sin(x)\right)^{(2n)} = (-1)^n \sin(x), \quad \text{και} \quad f^{(2n+1)}(x) = \left(\sin(x)\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos(x) . \tag{9.2.13}$$

Επειδή οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι φραγμένες συναρτήσεις, από την (9.2.13) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $M > 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M .$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανίσωση με το Θεώρημα 9.2.8, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\sin(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η μορφή της οποίας υπολογίστηκε στην Εφαρμογή 9.2.4(i) δίνεται από την (9.2.5), και είναι:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin του ημιτόνου είναι το $\mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (γιατί;).

Ανάλογα, για τη συνάρτηση $g(x) = \cos(x)$, οι παράγωγοι κάθε τάξης n είναι της ακόλουθης μορφής:

$$g^{(2n)}(x) = \left(\cos(x)\right)^{(2n)} = (-1)^n \cos(x), \quad \text{και} \quad g^{(2n+1)}(x) = \left(\cos(x)\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \sin(x), \tag{9.2.14}$$

Επειδή οι συναρτήσεις του συνημιτόνου και του ημιτόνου είναι φραγμένες συναρτήσεις, από την (9.2.14) είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $M > 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\left|g^{(n)}(x)\right| \le M .$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2.8, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\cos(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η μορφή της οποίας υπολογίστηκε στην Εφαρμογή 9.2.4(ii), δίνεται από την (9.2.6), και είναι:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin του ημιτόνου είναι το $\mathbb{R}$, επειδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, (γιατί;). ◊◊

Εφαρμογή 9.2.10. Για κάθε $x \in (-1,1)$, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Απόδειξη: Γράφοντας τη συνάρτηση $f(x) = (1-x)^{-1}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους κάθε τάξης και να αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n} \tag{9.2.15}$$

Επειδή για $x_0 = 0$ η (9.2.15) δίνει $f^{(n)}(0) = n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε είναι φανερό ότι, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στην (9.2.3) προκύπτει η σειρά Maclaurin της $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ η οποία είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Είναι γνωστό ότι, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι η γεωμετρική σειρά, η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.1.5).

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ από την (9.2.7) και την παραπάνω γεωμετρική σειρά γράφεται

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + R_n(x) \tag{9. 2.16}$$

Υπενθυμίζοντας ότι $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, το υπόλοιπο $R_n(x)$ από την (9. 2.16) γράφεται:

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Επειδή $x \in (-1,1) \Rightarrow |x| < 1$ είναι γνωστό από την ιδιότητα της γεωμετρικής ακολουθίας ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} |x|^{n+1} = 0$, (βλέπε, Πρόταση2.6.1, Πίνακα 2.3), επομένως

$$\lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.11) και ικανοποιεί την προϋπόθεση σύγκλισης της σειράς Maclaurin, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Άρα, η $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

◊◊

Εφαρμογή 9.2.11. Για κάθε $x \in (-1,1)$, η διωνυμική* συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, η οποία δίνεται από:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n, \tag{9.2.17}$$

όπου $\binom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$, με $\binom{a}{0} = 1$ και $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$, με $0! = 1$.

Αν $a \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ το ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Για τη διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ είναι φανερό ότι $f(0) = 1$. Θεωρώντας ότι $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ οι παράγωγοι της συνάρτησης είναι :

$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \Rightarrow f'(0) = a$

$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \Rightarrow f''(0) = a(a-1)$

$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \Rightarrow f'''(0) = a(a-1)(a-2)$

$f^{(4)}(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)$

…

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους κάθε τάξης και να αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι :

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots\big(a-(n-1)\big)(1+x)^{a-n} \tag{9.2.18}$$

Θέτοντας $x_0 = 0$ στην (9.2.18) οι παράγωγοι κάθε τάξης είναι:

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots\big(a-(n-1)\big) = a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραγώγους στη σχέση (9.2.3) προκύπτει ότι η σειρά Maclaurin της $f(x) = (1+x)^a$ είναι της μορφής:

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n \tag{9.2.19}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.1.7 (i) αποδεικνύεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Maclaurin είναι $R = 1$, συνεπώς το διάστημα σύγκλισης της διωνυμικής σειράς είναι το $(-1,1)$.

Η διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$ από την (9.2.7) και την (9.2.19) γράφεται

$$f(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ως $R_n(x)$ θεωρούμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο από την (9.2.9),

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

στο οποίο αντικαθιστούμε από την (9.2.18) τις παραγώγους $(n+1)$-τάξης και έχουμε :

* Η σειρά που προκύπτει στην (9.2.13) ονομάζεται διωνυμικό ανάπτυγμα, και η αντίστοιχη σειρά διωνυμική, ο δε συντελεστής του x^n στη σειρά ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής και συμβολίζεται $\binom{a}{n}$.

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\cdot a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)(1+t)^{a-n-1}dt=$$
$$=\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n\cdot(1+t)^{a-n-1}dt=$$
$$=\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots(a-n+1)(a-n)}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\cdot(1+t)^{a-1}dt \qquad (9.2.20)$$

Παρατηρήστε ότι, η συνάρτηση $h(t)=\dfrac{x-t}{1+t}$, για κάθε $t\in[0,x]$, είναι γνήσια φθίνουσα, επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης h είναι $[0,x]$, (βλέπε, Κεφάλαιο 6).
Συνδυάζοντας το σύνολο τιμών της h με την (9.2.20) μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{\left|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|\int_0^x\left(h(t)\right)^n\cdot(1+t)^{a-1}dt\right|\le$$
$$\le\frac{\left|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|\int_0^x\left|h(t)\right|^n\cdot(1+t)^{a-1}dt\right|\le \qquad (\text{επειδή } 0\le\left|h(t)\right|\le\left|x\right|)$$
$$\le\frac{\left|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|\int_0^x\left|x\right|^n\cdot(1+t)^{a-1}dt\right|\le$$
$$\le\frac{\left|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|x\right|^n\left|\left[\frac{(1+t)^a}{a}\right]_0^x\right|=\frac{\left|(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|x\right|^n\left|(1+x)^a-1\right|$$

Επιπλέον, για την ακολουθία με γενικό όρο

$$a_n=\frac{\left|(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)\right|}{n!}\left|x\right|^n,\ \text{για κάθε } \left|x\right|<1,$$

έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|x\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|a-n-1\right|}{n+1}=\left|x\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|-n\right|}{n}=\left|x\right|<1,$$

και από το γνωστό κριτήριο σύγκλισης των ακολουθιών προκύπτει $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, (βλέπε, όριο λόγου του D'Alembert- Πρόταση 2.6.2).
Επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|R_n(x)\right|\le\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\left|(1+x)^a-1\right|\right)=\left|(1+x)^a-1\right|\lim_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0,$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.11) και ικανοποιεί την προϋπόθεση σύγκλισης της σειράς Maclaurin, (βλέπε, Θεώρημα 9.2.5). Άρα, η $f(x)=(1+x)^a$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin και από την (9.2.10) μπορούμε να γράψουμε

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

το οποίο επαληθεύει την (9.2.17), ολοκληρώνοντας την απόδειξη.
Τέλος, να σημειώσουμε ότι, αν $a\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$, τότε η σειρά έχει πεπερασμένο πλήθος όρων. Παρατηρήστε ότι όλοι οι παράγωγοι $(a+1)$-τάξης είναι ίσοι με μηδέν, συνεπώς, μηδενίζονται οι συντελεστές των δυνάμεων του x με $n\ge a+1$. Άρα, η σειρά είναι το πεπερασμένο άθροισμα των n-όρων με $1\le n\le a$ αυξημένο κατά τη μονάδα, σύμφωνα με τον τύπο στην (9.2.17).
Παρατήρηση: Στην απόδειξη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ο τύπος στην (9.2.8) με το υπόλοιπο Lagrange, (αφήνεται ως άσκηση). ◊◊

Παραδείγματα 9.2.12.
Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin οι ακόλουθες διωνυμικές συναρτήσεις και να δοθεί το διάστημα σύγκλισής τους:

i) $f(x)=\sqrt{1+x}$ ii) $g(x)=(1+x)^8$ iii) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ iv) $k(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$

i) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a=\dfrac{1}{2}$. Για κάθε $n\geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19) είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}=\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n\cdot n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της f, που είναι :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)}{2^n\cdot n!}x^n$$

Επειδή για κάθε $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11).

ii) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $g(x)=(1+x)^8$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a=8$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.2.11, επειδή a είναι φυσικός αριθμός, η σειρά έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων, οι συντελεστές των x^n με $n\geq 9$ είναι ίσοι με μηδέν. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $1\leq n\leq 8$, οι μη μηδενικοί συντελεστές των δυνάμεων του x δίνονται από την (9.2.19) και είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}=\frac{8\cdot 7\cdot\cdots\cdot(9-n)}{n!}.$$

Αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή του αθροίσματος της g, που είναι :

$$(1+x)^8=1+8x+\frac{8\cdot 7}{2!}x^2+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}x^3+\cdots+\frac{8\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3}{6!}x^6+\frac{8\cdot 7\cdot\cdots\cdot 2}{7!}x^7+\frac{8\cdot 7\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{8!}x^8=$$
$$=1+8x+\frac{8\cdot 7}{2!}x^2+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}x^3+\cdots+\frac{8\cdot 7}{2!}x^6+8x^7+x^8$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι ένα πολυώνυμο $8^{ου}$ βαθμού (με πραγματικούς συμμετρικούς συντελεστές) και προφανώς, για κάθε πραγματικό αριθμό x το αποτέλεσμα είναι η τιμή του πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, επειδή για $a\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11).

iii) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-1/3}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a=-\dfrac{1}{3}$. Για κάθε $n\geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19) είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}=\frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(2-3n)}{3^n\cdot n!}=\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της h, που είναι :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^n+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^n$$

Επειδή για κάθε $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1,1)$.

iv) Επειδή μπορούμε να γράψουμε $k(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}=(1+x)^{-3}$ είναι φανερό ότι πρόκειται για διωνυμική συνάρτηση με $a=-3$. Για κάθε $n\geq 1$, οι συντελεστές των δυνάμεων του x στην (9.2.19)είναι

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}=\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-2-n)}{n!}=\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (9.2.17) προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της k , που είναι :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^3} &= 1-3x+\frac{3\cdot 4}{2!}x^2-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)}{n!}x^n+\cdots= \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+2)}{n!}x^n\end{aligned} \qquad (9.2.21)$$

Επειδή για κάθε $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς Maclaurin είναι $(-1,1)$. ◊◊

Παρατήρηση 9.2.13.

i) Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού επί μία σταθερά, ή με δυνάμεις του x έχουν νόημα στις σειρές Taylor, αρκεί η νέα σειρά Taylor να είναι ορισμένη στην τομή των διαστημάτων σύγκλισης των αρχικών σειρών. Για παράδειγμα, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\sin(x)+2\cos(x)$ προκύπτει από τους τύπους στην Εφαρμογή 9.2.9, ορίζεται στο $x\in\mathbb{R}$ και είναι:

$$\sin(x)+2\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

ii) Οι σειρές Taylor σύνθετων συναρτήσεων μπορούν να προκύψουν με αντικατάσταση του x μίας γνωστής σειράς από τη σύνθετη συνάρτηση. Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας στην (9.2.5) το x με $3x$, προκύπτει η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\sin(3x)$, που είναι

$$\sin(3x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

και συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.9).

iii) Οι σειρές Taylor βρίσκουν εφαρμογές σε πολλά προβλήματα υπολογισμού του λογισμού των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, όπως είναι όρια συναρτήσεων απροσδιόριστης μορφής, υπολογισμός ολοκληρωμάτων στα οποία δεν εφαρμόζονται οι μέθοδοι ολοκλήρωσης που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 7, λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σειρές, ή και στους αριθμητικούς υπολογισμούς τριγωνομετρικών αριθμών, κ.α. (βλέπε, Παραδείγματα 9.2.14, 9.2.15)

Παραδείγματα 9.2.14.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin, οι ακόλουθες συναρτήσεις, και να δοθεί η περιοχή σύγκλισής τους: Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε κατάλληλη τιμή για την ανεξάρτητη μεταβλητή x, για να βρείτε μία πολύ καλή εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που παρουσιάζεται.

i) $f(x)=\cosh(2x)$. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}=1+\frac{4}{2!}+\frac{16}{4!}+\frac{4^3}{6!}+\cdots+\frac{4^n}{(2n)!}+\cdots=\frac{e^2+e^{-2}}{2}\cong 3.7622$

ii) $g(x)=\tan^{-1}(x)$. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$

iii) $p(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{4^n}=\frac{8}{27}$

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.5 του υπερβολικού συνημιτόνου η συνάρτηση $f(x)=\cosh(2x)$ γράφεται: $\cosh(2x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$, επομένως είναι το ημι-άθροισμα δύο σύνθετων εκθετικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $2x$ μπορούμε να πάρουμε τη μορφή της σειράς Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης e^{2x}, που είναι :

$$e^{2x}=1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\frac{16}{4!}x^4+\cdots+\frac{2^n}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n \qquad (9.2.22)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $-2x$, να πάρουμε:

$$e^{-2x}=1+(-2x)+\frac{4}{2!}x^2-\frac{8}{3!}x^3+\frac{16}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n2^n}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n!}x^n \tag{9.2.23}$$

Επομένως, προσθέτοντας τις (9.2.22), (9.2.23) κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned}\cosh(2x)&=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+2\frac{4}{2!}x^2+2\frac{16}{4!}x^4+\cdots\right)=\\&=1+\frac{4}{2!}x^2+\frac{16}{4!}x^4+\frac{16}{4!}x^4+\cdots\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned} \tag{9.2.24}$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση έχει σειρά Maclaurin, που συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.7), η σειρά Maclaurin του υπερβολικού συνημιτόνου συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{R}$, (βλέπε, Παρατήρηση 9.2.13 (i)). Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $x=1$ στην (9.2.24), οπότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}=1+\frac{4}{2!}+\frac{16}{4!}+\frac{4^3}{6!}+\cdots+\frac{4^n}{(2n)!}+\cdots=\frac{e^2+e^{-2}}{2}\cong 3.7622$$

ii) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.10) και αντικαθιστώντας το x με $-x^2$ στην (9.1.6), προκύπτει:

$$g(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n} \tag{9.2.25}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.1.5, η σειρά συγκλίνει αν $\left|-x^2\right|=x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$, η σειρά στην (9.2.25) συγκλίνει, με διάστημα σύγκλισης $(-1,1)$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, η σειρά στην (9.2.25) ταλαντεύεται στα άκρα του διαστήματος $(-1,1)$, επειδή για $x=\pm1$ είναι $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Συνεπώς, το διάστημα σύγκλησης είναι το $(-1,1)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12, η σειρά στην (9.2.25) είναι ολοκληρώσιμη και χρησιμοποιώντας την (9.1.11) ολοκληρώνουμε όρο προς όρο, ως ακολούθως:

$$\int g(x)dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \tag{9.2.26}$$

Επιπλέον ισχύει $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Άρα, η (9.2.26) γράφεται

$$\tan^{-1}(x)+c=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}. \tag{9.2.27}$$

Στην τελευταία ισότητα, αν θέσουμε $x=0$, τότε $\tan^{-1}(0)+c=0\Rightarrow c=0$. Επομένως, η (9.2.27) γράφεται:

$$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \tag{9.2.28}$$

Τέλος, η δυναμοσειρά $k(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$, όπως και η αρχική δυναμοσειρά $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$, (βλέπε, Πρόταση 9.1.12). Ως γνωστός, χρειάζεται να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος $(-1,1)$.

Παρατηρήστε ότι, για $x=1$ η σειρά $k(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, και για $x=-1$ είναι $k(-1)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Πρόκειται για εναλλάσσουσες σειρές με γενικό όρο $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Προφανώς, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι

θετικών όρων, είναι φθίνουσα και μηδενική. Επομένως, ισχύει το κριτήριο Leibniz, άρα οι σειρές $k(1)$, $k(-1)$ συγκλίνουν.
Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης της σειράς Maclaurin στην (9.2.28) είναι $[-1,1]$. Έτσι αποδείχθηκε και ο τύπος (7) στον Πίνακα 9.1.
Θέτοντας $x=1\in[-1,1]$ στην (9.2.28), οπότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$ ⦿

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι, αν και πρόκειται για την ίδια σειρά και την ίδια συνάρτηση με αυτήν του Παραδείγματος 9.1.11 (ii), το διάστημα σύγκλισης είναι διαφορετικό στις δύο περιπτώσεις. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

iii) Η δοθείσα συνάρτηση γράφεται ως γινόμενο συναρτήσεων: $p(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}=2x^2\dfrac{1}{(1-x)^3}$ και ο δεύτερος παράγοντας θυμίζει τη διωνυμική συνάρτηση με $a=-3$, η διαφορά των δύο συναρτήσεων είναι το πρόσημο της ανεξάρτητης μεταβλητής. Χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 9.2.12 (iv), αντικαθιστώντας στην (9.2.21) το x με $-x$ προκύπτει η σειρά Maclaurin της $\dfrac{1}{(1-x)^3}$, που είναι:

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}(-x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}(-1)^n x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}x^n$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της τελευταίας σειράς επί $2x^2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2}{(1-x)^3}&=2x^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}x^n\right)=2x^2+2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}x^n=\\&=2x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}x^{n+2}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+2)}{n!}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+2}\end{aligned}$$

Άρα,

$$p(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+2} \tag{9.2.29}$$

Επειδή για κάθε $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ η διωνυμική σειρά Maclaurin συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.11), το διάστημα σύγκλισης της σειράς Maclaurin στην (9.2.29) είναι $(-1,1)$.

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $x=\dfrac{1}{4}$ στην (9.2.29), οπότε προκύπτει μία εκτίμηση για το άθροισμα της σειράς, που είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{4^n}=\frac{8}{27}.$$ ◊◊

Παραδείγματα 9.2.15.
Χρησιμοποιήστε κατάλληλη σειρά Maclaurin από τον Πίνακα 9.1, για να κάνετε τους επόμενους υπολογισμούς:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin(3x)}{4x^3}$ ii) $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ iii) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{18}+\dfrac{8}{81}-\dfrac{4}{81}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$

i) Παρατηρήστε, με απλή αντικατάσταση, ότι το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$. Χωρίς να εφαρμοστεί η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 6, (κανόνα Hospital), μπορεί να γίνει άρση της απροσδιοριστίας,

⦿ Το 1671, η εναλλάσσουσα σειρά χρησιμοποιήθηκε από τον James Gregory (1638 - 1675), για να υπολογίσει μία προσέγγιση του αριθμού π.

χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της $f(x)=\sin(3x)$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.5) το x με $3x$ προκύπτει η σειρά Maclaurin της $\sin(3x)$, που είναι

$$\sin(3x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=3x-\frac{3^3}{3!}x^3+\frac{3^5}{5!}x^5-\frac{3^7}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots.$$

Επομένως, το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin(3x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\left(3x-\frac{3^3}{3!}x^3+\frac{3^5}{5!}x^5-\frac{3^7}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\right)}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^3}{3!}x^3-\frac{3^5}{5!}x^5+\frac{3^7}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{3^3}{3!}-\frac{3^5}{5!}x^2+\frac{3^7}{7!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n-1}+\cdots\right)}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^3}{4\cdot 3!}-\frac{3^5}{4\cdot 5!}x^2+\frac{3^7}{4\cdot 7!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n+1}}{4\cdot(2n+1)!}x^{2n-1}+\cdots\right)=\frac{9}{8}$$

ii) Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 9.2.13 (ii), αντικαθιστώντας στην (9.2.12) το x με $-t^2$ προκύπτει η μορφή της σειράς Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης e^{-t^2}, που είναι :

$$h(t)\equiv e^{-t^2}=1-t^2+\frac{1}{2!}t^4-\frac{1}{3!}t^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} \tag{9.2.30}$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση έχει σειρά Maclaurin, που συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (βλέπε, Εφαρμογή 9.2.7), η σειρά Maclaurin στην (9.2.30) συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{R}$, (βλέπε, Παρατήρηση 9.2.13 (i)).

Επιπλέον, επειδή η δυναμοσειρά $h(t)$ συγκλίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.12 η $h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$ είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα χρησιμοποιώντας την (9.1.10) μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο τη δυναμοσειρά και να γράψουμε

$$g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\right)dt=\int_0^x\left(1-t^2+\frac{1}{2!}t^4-\frac{1}{3!}t^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}+\cdots\right)dt=$$

$$=\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5\cdot 2!}-\frac{t^7}{7\cdot 3!}+\cdots\right]_0^x=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5\cdot 2!}x^5-\frac{1}{7\cdot 3!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}$$

Τέλος, η δυναμοσειρά $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}$ συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως και η αρχική δυναμοσειρά $h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$, (βλέπε, Πρόταση 9.1.12).

iii) Παρατηρήστε από τον γενικό όρο της σειράς που δίνεται ότι, ο παρονομαστής δεν έχει παραγοντικό και είναι πολλαπλάσιο του 3^n, (όχι μόνο το περιττό πολλαπλάσιό του), και με αυτά ως κριτήρια αναζητήστε τον τύπο της κατάλληλης σειράς Maclaurin. Η μόνη σειρά, που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις, είναι η σειρά που προκύπτει από τη λογαριθμική συνάρτηση, $\ln(1+x)$. Συνεπώς, η δοθείσα σειρά πρέπει να προσαρμοστεί κατάλληλα, ώστε να έχει τη μορφή της σειράς στο (2) του Πίνακα 9.1. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{18}+\frac{8}{81}-\frac{4}{81}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n\cdot 3^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για τη λογαριθμική συνάρτηση $\ln(1+x)$, με $x=\frac{2}{3}$. Επειδή η συγκεκριμένη σειρά έχει περιοχή σύγκλισης $(-1,1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 9.1.13), και $x\in(-1,1)$, είναι φανερό ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\ln\left(1+\frac{2}{3}\right)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)\cong 0.5108 \qquad \Diamond\Diamond$$

Οι σημαντικότερες σειρές Maclaurin των συναρτήσεων, που αποδείχθηκαν στις εφαρμογές της παρούσας ενότητας και η περιοχή σύγκλισης κάθε σειράς παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 9.1: Αναπτύγματα Maclaurin στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	**Maclaurin**	Περιοχή σύγκλισης
1.	e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$x\in\mathbb{R}$
2.	$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
3.	$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$	$x\in\mathbb{R}$
4.	$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$	$x\in\mathbb{R}$
5.	$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$	$x\in\mathbb{R}$
6.	$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$	$x\in\mathbb{R}$
7.	$\tan^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$	$\lvert x\rvert\le 1$
8.	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
9.	$(1+x)^a$ $a\in\mathbb{R}-\{0\}$	$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=$ $=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4+$ $+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
10.	$(1+x)^a$ $a\in\mathbb{N}_0$	$1+\sum_{n=1}^{a}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+$ $=+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4+\cdots+x^a$	$x\in\mathbb{R}$

9.3 Σειρές Fourier

Στην προηγούμενη ενότητα διατυπώθηκαν οι προϋποθέσεις ώστε μία συνάρτηση f, που έχει παραγώγους κάθε τάξης, να μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά κέντρου x_0, δηλαδή, διατυπώθηκαν οι συνθήκες και υπολογίστηκαν οι συντελεστές της δυναμοσειράς ώστε το ανάπτυγμα να συγκλίνει στη ίδια τη συνάρτηση f, δηλαδή, να ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x σε μια περιοχή που περιέχει το x_0.

Στην ενότητα αυτή, θα μας απασχολήσει ένα παρόμοιο πρόβλημα: θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις, ώστε μία γνωστή συνάρτηση f, να μπορεί να γραφεί ως σειρά των συναρτήσεων μίας ταλάντωσης, δηλαδή, να αναλυθεί σε σειρά με όρους τις περιοδικές συναρτήσεις του ημιτόνου και συνημιτόνου, αυτές οι σειρές ονομάζονται σειρές Fourier.

Η ανάγκη προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας, η οποία είναι μία μερική διαφορική εξίσωση. Πριν από το έργο του Fourier, καμία γενική λύση της εξίσωσης της θερμότητας δεν ήταν γνωστή. Γνωστές ήταν μόνο οι μερικές λύσεις της, οι οποίες ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις, και αυτές μόνο για την περίπτωση που η πηγή θερμότητας περιγραφόταν ως ένα απλό ημιτονικό ή συνημιτονικό κύμα. Το βασικό πρόβλημα είναι να βρεθεί, κατά μήκος μίας λεπτής ράβδου, το πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η θερμοκρασία με βάση το πρότυπο της αρχικής θερμοκρασίας. Ο Fourier[**] θεώρησε ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται ως ημιτονοειδές κύμα κατά μήκος της ράβδου, αναπαράστησε το (σύνθετο) πρότυπο με ένα γραμμικό συνδυασμό ημιτονικών και συνημιτονικών καμπυλών με διαφορετικά μήκη κύματος, έλυσε την εξίσωση για κάθε συνιστώσα, ημιτονική /συνημιτονική καμπύλη (αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση), και έγραψε τη λύση ως γραμμικό συνδυασμό όλων των ιδιοσυναρτήσεων. Ο Fourier υποστήριξε ότι η μέθοδος αυτή ίσχυε για οποιοδήποτε πρότυπο, ακόμη και για εκείνα στα οποία η θερμοκρασία αλλάζει απότομα τιμή. Το άπειρο άθροισμα των συνιστωσών των ημιτονοειδών και συνημιτονικών καμπυλών είναι η σειρά Fourier ή ανάπτυγμα Fourier.

Οι σειρές Fourier είναι ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο της Μαθηματική Ανάλυσης, που βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορα πεδία της επιστήμης, π.χ. στην απάλειψη του θορύβου από παλαιές ηχογραφήσεις, στην ψηφιακή φωτογραφία, γενικά στην ανάλυση σήματος και εικόνας, στην ανακάλυψη της δομής του DNA μέσω της απεικόνισης με ακτίνες Χ, στη βελτίωση της λήψης των ραδιοηλεκτρικών σημάτων και στην αποφυγή ανεπιθύμητων κραδασμών στα αυτοκίνητα, στις χρονολογικές σειρές στη στατιστική, στην οικονομετρία, στη μηχανική κλπ.

Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, η σειρά Fourier είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο των συναρτήσεων $\sin(nx)$ και $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, μέσω του οποίου *προσεγγίζουμε* τις τιμές μίας περιοδικής συνάρτησης f, καθώς $n \to +\infty$. Για να προσδιορισθεί η σειρά Fourier αρκεί να υπολογισθούν οι όροι-συντελεστές του αντίστοιχου τριγωνομετρικού πολυωνύμου, το οποίο μελετούμε στη συνέχεια.

[**] Το 1807, ο Jean-Baptiste Joseph Fourier επινόησε μία εξίσωση θερμότητας και υπέβαλε ένα άρθρο στη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών, όμως αυτό απερρίφθη. Το 1812 η Ακαδημία όρισε τη θερμότητα ως θέμα για το ετήσιο βραβείο της. Ο Fourier υπέβαλε εκ νέου ένα αναθεωρημένο άρθρο και κέρδισε το βραβείο.

Το άρθρο του Fourier επικρίθηκε ότι δεν ήταν αρκετά τεκμηριωμένο και η Γαλλική Ακαδημία αρνήθηκε να το δημοσιεύσει. Το 1822 ο Fourier αγνόησε τις αντιρρήσεις και δημοσίευσε τη θεωρία του ως βιβλίο. Ωστόσο οι επικριτές είχαν ένα δίκιο. Οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να συνειδητοποιούν ότι οι άπειρες σειρές ήταν «επικίνδυνα όντα»: δεν συμπεριφέρονταν πάντα «καλά, όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα». Η επίλυση των ζητημάτων που τέθηκαν αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολη, και η ιδέα του Fourier τεκμηριώθηκε πλήρως. Το αποτέλεσμα είναι η σειρά Fourier, μία εξίσωση η οποία αντιμετωπίζει ένα μεταβαλλόμενο με τον χρόνο σήμα ως το άθροισμα μίας σειράς με συνιστώσες, ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς καμπύλες, υπολογίζοντας τα πλάτη και τις συχνότητές τους.

Ορισμός 9.3.1. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο k βαθμού έχει τη μορφή

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

όπου $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, και $x \in \mathbb{R}$.

Ο ελάχιστος αριθμός T_n για τον οποίο ισχύει

$$\sin\left(n(x+T_n)\right) = \sin(nx) \quad \text{ή} \quad \cos\left(n(x+T_n)\right) = \cos(nx)$$

ονομάζεται **περίοδος** των αντίστοιχων συναρτήσεων $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, και ισούται με

$$T_n = \frac{2\pi}{n} \ .$$

Τριγωνομετρική σειρά ονομάζεται το παραπάνω τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\varphi_k(x)$, όταν $k \to +\infty$, και έχει τη μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \qquad (9.3.1)$$

όπου a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$.

Τα ερωτήματα που εύλογα τίθενται είναι: (α) πώς υπολογίζονται οι συντελεστές a_0, a_n, b_n της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1); (β) η τριγωνομετρική σειρά στον Ορισμό 9.3.1 συγκλίνει; Σε περίπτωση θετικής απάντησης για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ και ποιο είναι το άθροισμά της;
Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα θα δοθεί στη συνέχεια της ενότητας, χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση που «προσεγγίζει» τη σειρά για κατάλληλες τιμές του x. Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα σχετίζεται με τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς των συντελεστών a_n, b_n. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right)$ συγκλίνει, τότε η σειρά στην (9.3.1) συγκλίνει απόλυτα σε μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο 2π, (βλέπε, Παντελίδης, (1999), Πρόταση 2.1). Η προηγούμενη πρόταση αναφέρεται σε σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς σε μία συνάρτηση, εφόσον έχει εξασφαλιστεί η απόλυτη σύγκλιση της σειράς των συντελεστών, οπότε ας προσπαθήσουμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη της ενότητας με τον υπολογισμό των συντελεστών a_0, a_n, b_n της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1).

Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η οποία προσεγγίζει την τριγωνομετρική σειρά στην (9.3.1), δηλαδή γνωρίζουμε τη συνάρτηση όπου συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά, έστω

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \ x \in [0, 2\pi], \qquad (9.3.2)$$

αναρωτιόμαστε αν υπάρχει κάποια σχέση, που συνδέει τους συντελεστές a_0, a_n, b_n με τη συνάρτηση f.

- Γράφουμε την (9.3.2) με τη μορφή

  $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

  την ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο διάστημα $[0, 2\pi]$, θεωρώντας ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε όρο-προς-όρο την τριγωνομετρική σειρά, και προκύπτει

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx. \qquad (9.3.3)$$

Σύμφωνα με την Ενότητα 7.5, όταν $m, n \in \mathbb{N}$, με $m \neq n$, τα ολοκληρώματα γινομένου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου (βλέπε, περίπτωση II, Ενότητα 7.5) δίνουν

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)dx = 0, \qquad (9.3.4)$$

και όταν $m = n$ τα ολοκληρώματα των δυνάμεων του ημιτόνου και συνημιτόνου (βλέπε, περίπτωση Ι (β), Ενότητα 7.5), δίνουν

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \pi . \tag{9.3.5}$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (9.3.2) με $\cos(mx)$, στη συνέχεια ολοκληρώσουμε κατά μέλη, και χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα από τις (9.3.3)-(9.3.4) προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(mx)dx = a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(mx)dx + b_m \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\sin(mx)dx = \pi a_m$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{9.3.6}$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (9.3.2) με $\sin(mx)$, στη συνέχεια ολοκληρώσουμε κατά μέλη, και χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα από τις (9.3.3)-(9.3.4) προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(mx)dx = a_m \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(mx)dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(mx)dx = \pi b_m$$

Επομένως,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{9.3.7}$$

Από την παραπάνω διαδικασία συμπεραίνεται ότι οι συντελεστές a_0, a_n, b_n, $n\in\mathbb{N}$, της τριγωνομετρικής σειράς στην (9.3.1) σχετίζονται με τη συνάρτηση f, οπότε μπορούμε να διακρίνουμε μία κατηγορία τριγωνομετρικών σειρών, όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 9.3.2. Έστω μία συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,2\pi]$. **Σειρά Fourier** ή **ανάπτυγμα Fourier** της συνάρτησης f ονομάζεται η τριγωνομετρική σειρά της (9.3.1)

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

όπου οι συντελεστές a_0, a_n, b_n υπολογίζονται από τις σχέσεις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), και σημειώνεται με

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right). \tag{9.3.8}$$

Στην (9.3.8) χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\approx$ επειδή η f θεωρήθηκε ως μία προσέγγιση της σειράς Fourier του δεξιού μέλους, η ίδια η σειρά μπορεί να μην συγκλίνει ή και αν συγκλίνει να μη συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης f.

Παράδειγμα 9.3.3.

Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x\in[0,2\pi]$ και να δοθεί η γραφική παράσταση της f και των τριγωνομετρικών πολυωνύμων 1^ου^, 2^ου^, 3^ου^ και 4^ου^ βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Η σειρά Fourier απαιτεί τον υπολογισμό:

- του συντελεστή a_0 από την (9.3.3), που είναι ίσος με:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi}\left[e^x\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi} - 1),$$

- των συντελεστών a_n, $n\in\mathbb{N}$, από την (9.3.6), οι οποίοι υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Ενότητα 7.3, Παραδείγματα 7.3.3 (iii)) και είναι ίσοι με:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)}\Big[e^x(\cos(nx)+n\sin(nx))\Big]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{(n^2+1)\pi}\Big(e^{2\pi}\left(\cos(2\pi n)+n\sin(2\pi n)\right) - e^0\left(\cos(0)+n\sin(0)\right)\Big) =$$
$$= \frac{1}{(n^2+1)\pi}\Big(e^{2\pi}\left(\cos(2\pi n)+0\right) - (1+0)\Big) = \frac{1}{(n^2+1)\pi}(e^{2\pi}-1),$$

- και των συντελεστών b_n, $n \in \mathbb{N}$, από την (9.3.7), οι οποίοι υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Παραδείγματα 7.3.3 (iii)) και είναι ίσοι με:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cdot \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)}\Big[e^x(\sin(nx)-n\cos(nx))\Big]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{(n^2+1)\pi}\Big(e^{2\pi}\left(\sin(2\pi n)-n\cos(2\pi n)\right) - e^0\left(\sin(0)-n\cos(0)\right)\Big) =$$
$$= \frac{1}{(n^2+1)\pi}\Big(e^{2\pi}\left(0-n\cos(2\pi n)\right) - (0-n)\Big) = \frac{n}{(n^2+1)\pi}(1-e^{2\pi}).$$

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0, a_n, b_n, η σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &\approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\cos(nx) + \frac{n(1-e^{2\pi})}{(n^2+1)\pi}\sin(nx)\right) \end{aligned} \tag{9.3.9}$$

Στο Σχήμα 9.1 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$ στο $x\in[0,2\pi]$ με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 1ου βαθμού, $\varphi_1(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) = \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1) + \frac{(e^{2\pi}-1)}{2\pi}\cos(x) + \frac{(1-e^{2\pi})}{2\pi}\sin(x)$, σχεδιάζεται με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή, το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier στην (9.3.9), κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο της σειράς και παραλείποντας όλους τους άλλους.

Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 2ου βαθμού,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1) + \frac{(e^{2\pi}-1)}{2\pi}\cos(x) + \frac{(1-e^{2\pi})}{2\pi}\sin(x) + \frac{(e^{2\pi}-1)}{5\pi}\cos(2x) + \frac{2(1-e^{2\pi}-1)}{5\pi}\sin(2x), \end{aligned}$$

σχεδιάζεται με ανοικτό μωβ χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dot), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους δύο πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9) και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 3ου βαθμού,

$$\varphi_3(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x) =$$
$$= \varphi_2(x) + \frac{(e^{2\pi}-1)}{10\pi}\cos(3x) + \frac{3(1-e^{2\pi})}{10\pi}\sin(3x)$$

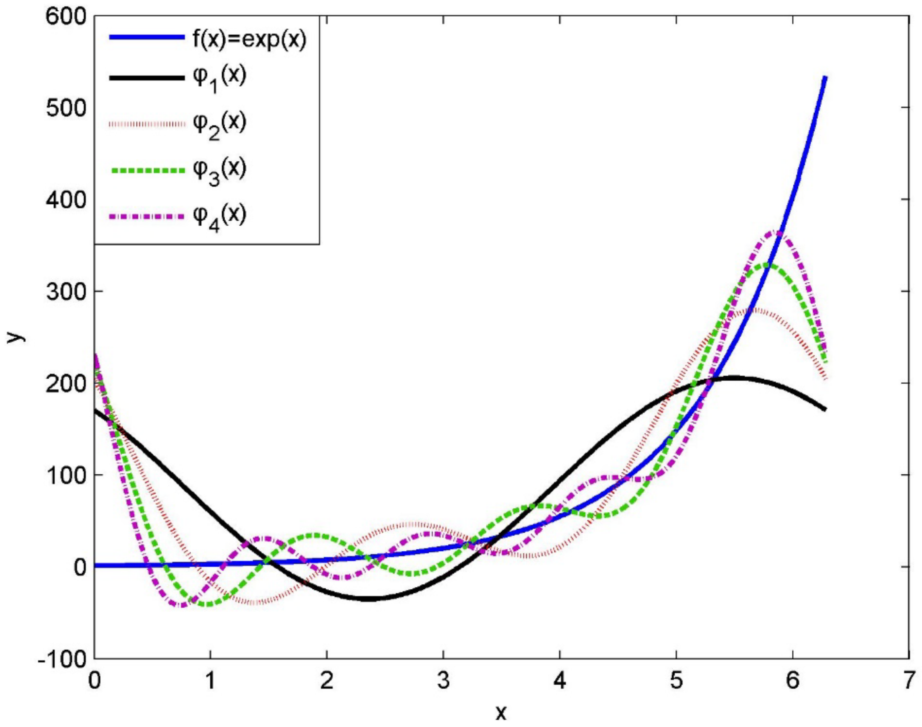
σχεδιάζεται με πράσινο χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dash), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους τρεις πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9) και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

Τέλος, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 4ου βαθμού,

$$\varphi_4(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x) + a_4\cos(4x) + b_4\sin(4x) =$$
$$= \varphi_3(x) + \frac{(e^{2\pi}-1)}{17\pi}\cos(4x) + \frac{4(1-e^{2\pi})}{17\pi}\sin(4x)$$

σχεδιάζεται με μωβ χρώμα και διακεκομμένη γραμμή (dash-dot), το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς στην (9.3.9), παραλείποντας όλους τους άλλους.

Σχόλια: Παρατηρήστε στο Σχήμα 9.1, ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα πολύ «αργά» προσεγγίζουν τη γραφική παράσταση της $f(x)=e^x$, και μάλιστα στα άκρα του διαστήματος $[0,2\pi]$ προσεγγιστικές τιμές των τριγωνομετρικών πολυωνύμων απέχουν αρκετά από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης.



Σχήμα 9.1: Η προσέγγιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=e^x$ από τα $\varphi_i(x)$, $i=1,2,3,4$, στο $x\in[0,2\pi]$.

◊◊

Παρατήρηση 9.3.4.
Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή t μίας συνάρτησης f μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,2\pi]$, αν θέσουμε

$$t=\frac{2\pi a+x(b-a)}{2\pi},$$

η $f(t)$ μετασχηματίζεται στην $f(x)$, με $x\in[a,b]$, και αντίστροφα.

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι η αρχική συνάρτηση f έχει ανεξάρτητη μεταβλητή t με $t\in[0,2\pi]$ χρησιμοποιώντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, την $t=x-\pi$, μπορεί να μετασχηματιστεί στην $f(x)$, με $x\in[-\pi,\pi]$ (πλάτους 2π).

Τότε, είναι φανερό ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier, που υπολογίστηκαν στις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), δίνουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα, αρκεί τα ολοκληρώματα να είναι ορισμένα στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή, οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \tag{9.3.10}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx,\ \text{για κάθε}\ n\in\mathbb{N}, \tag{9.3.11}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx,\ \text{για κάθε}\ n\in\mathbb{N}. \tag{9.3.12}$$

Εφαρμογή 9.3.5. i) Αν μία περιττή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \tag{9.3.13}$$

με τους συντελεστές b_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίζονται από τον τύπο

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)dx. \tag{9.3.14}$$

Δηλαδή, το ανάπτυγμα Fourier μίας περιττής συνάρτησης περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις.
ii) Αν μία άρτια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \tag{9.3.15}$$

με τους συντελεστές a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, να υπολογίζονται από τούς τύπους

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \tag{9.3.16}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \cos(nx)dx, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{9.3.17}$$

Δηλαδή, το ανάπτυγμα Fourier μίας άρτιας συνάρτησης περιέχει μόνο συνημιτονικές συναρτήσεις.

Απόδειξη: i)Υποθέτουμε ότι f είναι περιττή στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή, ισχύει

$$f(-x) = -f(x).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και $\sin(nx)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι περιττές και ορισμένες στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της περιττής και της άρτιας συνάρτησης, (βλέπε, Ορισμός 1.2.15.), εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $g(x) = f(x)\cdot\sin(nx)$, για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ είναι άρτια συνάρτηση και η $h(x) = f(x)\cdot\cos(nx)$ είναι περιττή συνάρτηση. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) για την περιττή συνάρτηση h ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = 0,$$

και από την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx. \tag{9.3.18}$$

Τώρα, επειδή η f είναι περιττή συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) ο τύπος στην (9.3.10), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Με ανάλογο τρόπο ο τύπος στην (9.3.11), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, γράφεται

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = 0.$$

Επομένως, αν η f είναι περιττή στο $[-\pi,\pi]$, επειδή $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, η (9.3.8) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας την (9.3.18) με την (9.3.12) για τους συντελεστές b_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx,$$

αποδεικνύοντας την (9.3.14).

ii) Ανάλογα, αν η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$, τότε ισχύει

$$f(-x) = f(x).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και $\cos(nx)$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, είναι άρτιες και ορισμένες στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της άρτιας και της περιττής συνάρτησης εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $h(x) = f(x)\cdot\cos(nx)$, για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ είναι άρτια συνάρτηση και η $g(x) = f(x)\cdot\sin(nx)$ είναι περιττή. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (i) για την περιττή συνάρτηση g ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = 0, \tag{9.3.19}$$

και από την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx. \tag{9.3.20}$$

Τώρα, συνδυάζοντας την (9.3.19) με την (9.3.12) για τους συντελεστές b_n, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = 0.$$

Επομένως, αν η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$, επειδή $b_n = 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η (9.3.8) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη της (9.3.15) και επιβεβαιώνοντας ότι το ανάπτυγμα Fourier είναι μία σειρά με συνημιτονικές συναρτήσεις.

Επειδή η f είναι άρτια συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.6.12 (ii) ο τύπος στην (9.3.10), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Επιπλέον, ο τύπος στην (9.3.11), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, από την (9.3.20) γράφεται

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◊◊

Παραδείγματα 9.3.6.

Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι συναρτήσεις

i) $f(x) = -x$, για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ ii) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } -\pi \le x < 0 \\ -x+1, & \text{αν } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Για τη συνάρτηση $f(x) = -x$ στο (i) να δοθεί η γραφική παράστασή της καθώς και των τριγωνομετρικών πολυωνύμων 1ου, 2ου, 3ου και 4ου βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.

i) Επειδή για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ ισχύει $f(-x) = -(-x) = x = -f(x)$, η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-\pi,\pi]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.5 (i), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις και δίνεται από την (9.3.13) ως $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$, οι δε συντελεστές b_n , για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.14), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\cdot\sin(nx)dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x\cdot(\cos(nx))'\,dx=$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right)=$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left((\pi\cos(n\pi)-0)-\frac{1}{n}(\sin(n\pi)-\sin(0))\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\pi\cos(n\pi)\right)=\frac{2}{n}\left((-1)^n\right)=\frac{2(-1)^n}{n}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\cos(n\pi)=(-1)^n$, $\sin(n\pi)=\sin(0)=0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές b_n στην (9.3.13) προκύπτει η σειρά των ημιτονικών όρων:

$$-x\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx)=-2\sin(x)+\sin(2x)-\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{2}{4}\sin(4x)-\frac{2}{5}\sin(5x)+\cdots.$$

Στο Σχήμα 9.2 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=-x$ στο $x\in[-\pi,\pi]$ με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή καθώς και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα 1ου, 2ου, 3ου και 4ου βαθμού, που προκύπτουν από τη σειρά Fourier, κρατώντας τους αντίστοιχους πρώτους όρους της και παραλείποντας τους υπόλοιπους.
Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 1ου βαθμού,

$$\varphi_1(x)=-2\sin(x),$$

σχεδιάζεται με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή, το οποίο έχει προκύψει από τη σειρά Fourier στην (9.3.13), κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο της σειράς και παραλείποντας τους υπόλοιπους. Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 2ου βαθμού,

$$\varphi_2(x)=-2\sin(x)+\sin(2x),$$

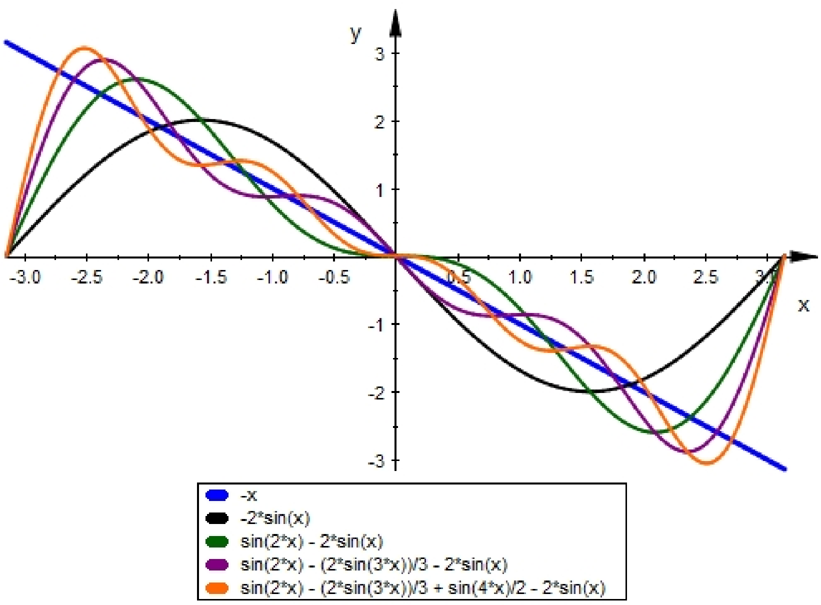
σχεδιάζεται με ανοικτό πράσινο χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dot)), το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 3ου βαθμού,

$$\varphi_3(x)=-2\sin(x)+\sin(2x)-\frac{2}{3}\sin(3x),$$

σχεδιάζεται με μωβ χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dash)), και το τριγωνομετρικό πολυώνυμο 4ου βαθμού,

$$\varphi_4(x)=-2\sin(x)+\sin(2x)-\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{2}{4}\sin(4x),$$

σχεδιάζεται με πορτοκαλί χρώμα (διακεκομμένη γραμμή (dash-dot)).



Σχήμα 9.2: Η προσέγγιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=-x$ από τα $\varphi_i(x)$, $i=1,2,3,4$, στο $x\in[-\pi,\pi]$.

Σχόλια: Παρατηρήστε ότι, στο Σχήμα 9.2 υπάρχουν υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα βρίσκονται «πολύ κοντά» στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και υπάρχουν και τιμές του x, που οι αντίστοιχες τιμές των τριγωνομετρικών πολυωνύμων δεν προσεγγίζουν την τιμή της συνάρτησης. Για παράδειγμα, για $x=0$, προφανώς οι τιμές των αντίστοιχων τριγωνομετρικών πολυωνύμων, όπως και το άθροισμα της ημιτονικής σειράς Fourier, είναι ίσο με $f(0)=0$, ενώ για $x=\pm\pi$, η τιμή των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, όπως και της σειράς Fourier, είναι ίση με μηδέν, και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι $f(\pm\pi)=\mp\pi$.

Επιπλέον, επειδή η σειρά Fourier της $f(x)=-x$ μπορεί να γραφεί

$$-x \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) = 2\left(-\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(4x)-\frac{1}{5}\sin(5x)+\cdots\right)$$

αντικαθιστώντας στην παραπάνω παράσταση $x=\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \approx 2\left(-\sin(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2})-\frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2})-\frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2})-\cdots\right) = 2\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots\right)$$

Παρατηρήστε ότι,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$$

επομένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί

$$\frac{\pi}{2} \approx 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots\right) = 2\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right),$$

από όπου προκύπτει :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \approx 1-\frac{\pi}{4}$$

Η παραπάνω (αριθμητική) σειρά είναι μία εναλλάσσουσα σειρά, στην οποία εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz, διαπιστώνουμε ότι συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2). Επιπλέον, από την εφαρμογή της Πρότασης 3.3.5 προκύπτει μία εκτίμηση του αθροίσματός της. Στο Παράδειγμα 3.3.6, αποδείχθηκε ότι απαιτείται ο υπολογισμός του αθροίσματος των 50 πρώτων όρων της σειράς, προκειμένου να υπάρχει ακρίβεια με 2 δεκαδικά ψηφία της προσέγγισης του αθροίσματός της. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας Matlab/Octave και τις συμβολικές εντολές `syms`, `symsum`, παρουσιάστηκε η παραπάνω προσέγγιση του αθροίσματος της εναλλάσσουσας σειράς, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.3). Συνεπώς, η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει στην προσεγγιστική τιμή που υπολογίστηκε μέσω της σειράς Fourier της $f(x)=-x$ για $x=\frac{\pi}{2}$.

Παρατηρήστε στο Σχήμα 9.2, ότι η προσεγγιστική τιμή των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «αρκετά διαφορετική» από την τιμή της συνάρτησης, επειδή $\varphi_1(\frac{\pi}{2})=\varphi_2(\frac{\pi}{2})=-2\neq-\frac{\pi}{2}\approx-1.5708$, καθώς και $\varphi_3(\frac{\pi}{2})=\varphi_4(\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{3}\neq-\frac{\pi}{2}$.

ii) Επειδή, για κάθε $x\in[0,\pi]\Rightarrow -x\in[-\pi,0]$ ισχύει $f(-x) \underset{y\in[-\pi,0]}{\overset{y=-x}{=}} f(y)=y+1=-x+1=f(x)$, και για κάθε $x\in[-\pi,0]\Rightarrow -x\in[0,\pi]$ ισχύει $f(-x) \underset{y\in[0,\pi]}{\overset{y=-x}{=}} f(y)=-y+1=x+1=f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.5 (ii), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο συνημιτονικές συναρτήσεις και δίνεται από την (9.3.15) ως $f(x)\approx\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$.

Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.16) και είναι

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+1)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right) = 1-\frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2},$$

οι δε συντελεστές a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.17), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+1)\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(-x+1)\cdot\left(\sin(nx)\right)'\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(-x+1)\cdot\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-x+1)'\cdot\sin(nx)dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\left[(-x+1)\cdot\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(-x+1)\cdot\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left((-\pi+1)\cdot\sin(n\pi) - (0+1)\cdot\sin(0) - \frac{1}{n}(\cos(n\pi)-\cos(0))\right) =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, & \text{αν} \quad n = 2k+1,\ k\in\mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{αν} \quad n = 2k,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(n\pi)=0$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0 και a_n στην (9.3.15) προκύπτει:

$$f(x) \approx \frac{2-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx) =$$

$$= \frac{2-\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos((2k+1)x) = \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) =$$

$$= \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{9\pi}\cos(3x) + \frac{4}{25\pi}\cos(5x) + \frac{4}{49\pi}\cos(7x) + \cdots =$$

$$= \frac{2-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

◊◊

Γενικεύοντας τα αποτελέσματα της Παρατήρησης 9.3.4. μπορούμε να αναλύσουμε μία συνάρτηση ορισμένη σε συμμετρικό διάστημα σε σειρά Fourier, δηλαδή, σε μία σειρά συναρτήσεων που αποτελείται από συνδυασμό ημιτονικών και συνημιτονικών συναρτήσεων, όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 9.3.7. Έστω μία συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a,a]$ με $a>0$. Η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right), \tag{9.3.21}$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx \tag{9.3.22}$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,\quad n\in\mathbb{N} \tag{9.3.23}$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{9.3.24}$$

Βασιζόμενοι στην Εφαρμογή 9.3.5 και παρατηρώντας ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι περιττές, ενώ $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι άρτιες, όταν πρόκειται για μία περιττή/άρτια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[-a,a]$, με $a>0$, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 9.3.8. i) Αν μία περιττή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a,a]$ με $a>0$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \tag{9.3.25}$$

με τους συντελεστές b_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίζονται από τον τύπο

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx. \tag{9.3.26}$$

ii) Αν μία άρτια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-a,a]$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \tag{9.3.27}$$

με τους συντελεστές a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, να υπολογίζονται από τούς τύπους

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \tag{9.3.28}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{9.3.29}$$

Απόδειξη: Έστω f περιττή στο διάστημα $[-a,a]$ με $a>0$, δηλαδή, $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in [-a,a]$. Τότε, από την (9.3.23) για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^0 f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \\
&= \frac{1}{a}\int_a^0 f(-x)\cdot\cos\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)d(-x) + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \ (f \text{ περιττή}) \\
&= \frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \\
&= -\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = 0
\end{aligned}$$

Επομένως, αν η f είναι περιττή στο $[-a,a]$, επειδή $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, η (9.3.21) γράφεται

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Επιπλέον, από την (9.3.24) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(-x)\cdot\sin\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)d(-x) + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \qquad (f \text{ περιττή})$$
$$= -\frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,$$
αποδεικνύοντας την (9.3.26).
ii) Με ανάλογο τρόπο, αν η f είναι άρτια στο $[-a,a]$, με $a>0$, τότε $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in[-a,a]$, τότε, από την (9.3.24) για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε:
$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(-x)\cdot\sin\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)d(-x) + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \quad (f \text{ άρτια})$$
$$= \frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = 0$$
Επομένως, αν η f είναι άρτια στο $[-a,a]$, επειδή $b_n=0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η (9.3.21) γράφεται
$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$
αποδεικνύοντας την (9.3.27).
Επιπλέον, ο τύπος στην (9.3.22), από τον οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής a_0 της σειράς, γράφεται
$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{0} f(x)dx + \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{a}^{0} f(-x)d(-x) + \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} f(x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2a}\int_{a}^{0} f(x)dx + \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} f(x)dx + \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)dx,$$
επαληθεύοντας τον τύπο στην (9.3.28).
Τέλος, ο τύπος στην (9.3.23), από τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές a_n της σειράς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, γράφεται:
$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(-x)\cdot\cos\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)d(-x) + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \qquad (f \text{ άρτια})$$
$$= -\frac{1}{a}\int_{a}^{0} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)d(x) + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,$$
αποδεικνύοντας τον τύπο στην (9.3.29) . ◊◊

Παραδείγματα 9.3.9.
Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι ακόλουθες συναρτήσεις:
i) $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in[-3,3]$.
ii) $f(x)=x^3$, για κάθε $x\in[-1,1]$.
i) Από τον ορισμό της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι $a=3$ και από τον ορισμό της απόλυτης τιμής μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{αν } -3\le x<0\\ x, & \text{αν } 0\le x\le 3\end{cases}$$

Επειδή, για κάθε $x\in[0,3]\Rightarrow -x\in[-3,0]$ ισχύει $f(-x)=-(-x)=x=f(x)$, και για κάθε $x\in[-3,0]\Rightarrow -x\in[0,3]$ ισχύει $f(-x)=-x=f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια στο $[-3,3]$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.8 (ii), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο συνημιτονικές συναρτήσεις, δίνεται από την (9.3.27) και έχει τη μορφή $f(x)\approx\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$.

Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.28) και είναι

$$a_0=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^3 xdx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{1}{3}\left(\frac{3^2}{2}-0\right)=\frac{3}{2},$$

οι δε συντελεστές a_n, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.29), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)}{\frac{n\pi}{3}}\right)'dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(n\pi/3)}\int_0^3 x\cdot\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)'dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3-\int_0^3\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3+\frac{1}{(n\pi/3)}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(3\cdot\sin(n\pi)-0\cdot\sin(0)+\frac{3}{n\pi}(\cos(n\pi)-\cos(0))\right)=$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\dfrac{-12}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{αν } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}_0\\ 0, & \text{αν } n=2k,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(n\pi)=0$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$.

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0 και a_n στην (9.3.27) προκύπτει:

$$f(x)\approx\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-12}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)-\frac{12}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{3}\right)-\frac{12}{25\pi^2}\cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right)-\frac{12}{49\pi^2}\cos\left(\frac{7\pi x}{3}\right)-\cdots=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)$$

ii) Από τον ορισμό της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι $a=1$. Επειδή, το διάστημα όπου ορίζεται η συνάρτηση είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, προφανώς για κάθε $x\in[0,1]\Rightarrow -x\in[-1,0]$ και για κάθε $x\in[-1,0]\Rightarrow -x\in[0,1]$ και επιπλέον ισχύει $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-1,1]$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 9.3.8 (i), το ανάπτυγμα Fourier περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις, δίνεται από την (9.3.25) και έχει τη μορφή $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, όπου οι συντελεστές $b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.26). Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (βλέπε, Ενότητα 7.3) ή χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, (βλέπε, Ενότητα 9.4) υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \int x^3\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx = \int x^3\cdot\sin(n\pi x)dx$$

για το οποίο βρίσκουμε

$$I = \int x^3\cdot\sin(n\pi x)dx = \left(-\frac{1}{n\pi}x^3 + \frac{6}{n^3\pi^3}x\right)\cos(n\pi x) - \left(-\frac{3}{n^2\pi^2}x^2 - \frac{6}{n^4\pi^4}\right)\sin(n\pi x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}.$$

Οι συντελεστές b_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δίνονται από το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^3\cdot\sin(n\pi x)dx = 2\left[\left(-\frac{1}{n\pi}x^3 + \frac{6}{n^3\pi^3}x\right)\cos(n\pi x) - \left(-\frac{3}{n^2\pi^2}x^2 - \frac{6}{n^4\pi^4}\right)\sin(n\pi x) + c\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\left(-\frac{1}{n\pi} + \frac{6}{n^3\pi^3}\right)\cos(n\pi) - \left(-\frac{3}{n^2\pi^2} - \frac{6}{n^4\pi^4}\right)\sin(n\pi) + c\right) - 2\left(-\left(-\frac{6}{n^4\pi^4}\right)\sin(0) + c\right) =$$

$$= 2\frac{(-1)^n(6 - n^2\pi^2)}{n^3\pi^3} = \frac{(-1)^n(12 - 2n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}$$

Άρα, αντικαθιστώντας τους συντελεστές b_n στην (9.3.25) προκύπτει:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(12 - 2n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(12 - 2n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)$$ ◊◊

Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.3.7, μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και από την (9.3.21) είναι φανερό ότι, οι τιμές της f βρίσκονται «πολύ κοντά» στις τιμές της σειράς, ωστόσο όπως σχολιάστηκε και στα Παραδείγματα 9.3.3 και 9.3.6 (i), δεν γνωρίζουμε, αν η σειρά συγκλίνει ή και αν συγκλίνει μπορεί να μη συγκλίνει στις τιμές $f(x)$, για κάθε $x \in [-a, a]$. Επιπλέον, δεν εξετάσαμε αν ήταν ορθό, που ολοκληρώσαμε όρο-προς-όρο τη σειρά Fourier, προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς, υπενθυμίζεται ότι, αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει στις δυναμοσειρές χωρίς περιορισμούς, (βλέπε, Πρόταση 9.1.12). Η απάντηση στο ερώτημα σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς Fourier δίνεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία, (βλέπε, Παντελίδης, 1999).

Θεώρημα 9.3.10. Έστω ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και η παράγωγος f' είναι τμηματικά συνεχείς[§] στο διάστημα $[-a, a]$. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην $f(x)$, για κάθε $x \in (-a, a)$, όπου η f είναι συνεχής. Αν x_0 σημείο ασυνέχειας της f, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \tag{9.3.30}$$

όπου $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ με $f(x_0^+),\ f(x_0^-) \in \mathbb{R}$.

[§] Μία συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα I, αν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας $x_0 \in I$, δηλαδή, οι πλευρικές οριακές τιμές στο x_0 υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιώντας είτε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, είτε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$.

Παρατηρήσεις 9.3.11. i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f μέσω της σχέσης στην (9.3.21) ισούται με την τιμή της f σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $(-a,a)$, όπου η συνάρτηση είναι συνεχής. Ακόμη και σε σημεία, όπου η συνάρτηση f είναι ασυνεχής, έστω $x_0 \in (-a,a)$, αν είναι πραγματικοί αριθμοί τα πλευρικά όρια καθώς και οι πλευρικές παράγωγοι σε αυτές τις θέσεις ασυνέχειας, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$, δηλαδή την (9.3.21) την γράφουμε:

$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right)\right)$$

Τέλος, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.3.10, η σειρά Fourier μπορεί να συγκλίνει στα άκρα $\pm a$ του διαστήματος $(-a,a)$, με αντίστοιχες τιμές

$$\frac{f(-a^-)+f(-a^+)}{2} \quad \text{και} \quad \frac{f(a^-)+f(a^+)}{2} \tag{9.3.31}$$

όπου οι τιμές $f(-a^-)$ και $f(a^+)$ υπολογίζονται από την επέκταση της συνάρτησης f, δείτε στη συνέχεια.

ii) Επειδή με το Θεώρημα 9.3.10 εξασφαλίζεται ένα κριτήριο ελέγχου σύγκλισης της σειράς Fourier στην τιμή της συνάρτησης, μπορούμε μετά τον έλεγχο του κριτηρίου, να αντικαθιστούμε το συμβολισμό $\approx$ με $=$ στις περιπτώσεις, στις περιπτώσεις που γνωρίζουμε ότι η σειρά Fourier συγκλίνει.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=-x$, για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ του Παραδείγματος 9.3.6 (i) είναι συνεχής για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10. μπορούμε να σημειώσουμε:

$$-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx)=-2\sin(x)+\sin(2x)-\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{2}{4}\sin(4x)-\frac{2}{5}\sin(5x)+\cdots$$

Όπως αναφέρεται και στα Σχόλια του παραδείγματος, στα άκρα του διαστήματος $[-\pi,\pi]$, οι τιμές της f είναι

$$f(-\pi)=\pi \quad \text{και} \quad f(\pi)=-\pi\,,$$

και τότε ισχύει

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0\neq f(\mp\pi)\,,$$

άρα δεν επαληθεύεται η (9.3.30), (βλέπε, τη σχετική παρατήρηση παραπάνω στο (i)).

Επομένως, για $x=\pm\pi$ η σειρά Fourier προσεγγίζει τις τιμές της συνάρτησης, (βλέπε σχετικά και το Σχήμα 9.2). Προφανώς, αν η συνάρτηση οριζόταν

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{αν } -\pi<x<\pi\\ 0, & \text{αν } x=\pm\pi\end{cases},$$

τότε για κάθε x θα σημειωνόταν

$$-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx)=-2\sin(x)+\sin(2x)-\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{2}{4}\sin(4x)-\frac{2}{5}\sin(5x)+\cdots$$

Ανάλογα, μπορούμε να συμπεράνουμε για τη συνάρτηση του Παραδείγματος 9.3.6 (ii), όπου η συνάρτηση είναι συνεχής για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(-x+1)=1, \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1\,,$$

$$f(-\pi^+)=\lim_{x\to-\pi^+}(x+1)=-\pi+1, \quad \text{και} \quad f(\pi^-)=\lim_{x\to\pi^-}(-x+1)=-\pi+1$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10. , για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$, μπορούμε να σημειώσουμε

$$f(x)=\frac{2-\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)\,.$$

Παρατηρήστε ότι, οι συναρτήσεις $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ και $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2a$, επειδή από τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Τυπολόγιο 1.5.18 (6) και (7)), μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin\left(\frac{n\pi(x+2a)}{a}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(2n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(2n\pi) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^{◈},$$

$$\cos\left(\frac{n\pi(x+2a)}{a}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(2n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(2n\pi) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier ως άθροισμα περιοδικών συναρτήσεων είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2a$. Επομένως, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.3.10 από μία περιοδική συνάρτηση f, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier, που αντιστοιχεί σε αυτήν την f, συγκλίνει στην

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να σκεφτούμε έναν τρόπο ώστε η συνάρτηση f, που είναι ορισμένη στο $[-a,a]$, να μπορεί να **επεκταθεί** στο $\mathbb{R}$ μέσω μίας περιοδικής συνάρτησης, η οποία να συγκλίνει στην αντίστοιχη σειρά Fourier.

Ορισμός 9.3.12. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-a,a]$, η οποία μπορεί να επεκταθεί με περίοδο $T = 2a$. Η **περιοδική επέκταση** της συνάρτησης f είναι μία συνάρτηση f_e ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-a,a] \\ f(x_i), & \text{αν } x = x_i + 2ka,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{ όπου } x \notin [-a,a],\ \text{ και } x_i \in [-a,a] \end{cases} \tag{9.3.32}$$

Στην (9.3.32) ο ακέραιος k δηλώνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση της f.

Παραδείγματα 9.3.13.

Να υπολογισθούν οι περιοδικές επεκτάσεις σε όλο τον πραγματικό άξονα των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in [-2,2]$

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = \pm 1 \end{cases}$

i) Από τον ορισμό της f προκύπτει ότι $a = 2$, οπότε θεωρώντας ότι η f επεκτείνεται με περίοδο $T = 2a = 4$ σε όλο τον πραγματικό άξονα, η επέκτασή της δίνεται από τον Ορισμό 9.3.12 και την (9.3.32) και είναι:

$$f_e(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x \in [-2,2] \\ e^{x-4k}, & \text{αν } x \notin [-2,2],\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

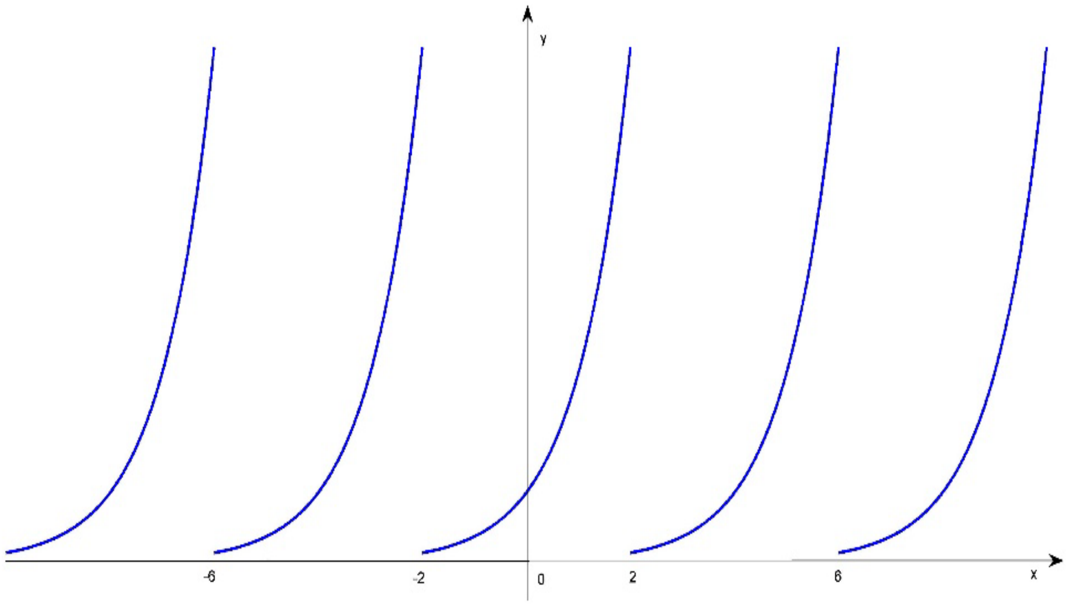
Στο Σχήμα 9.3 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της f_e, περιοδική επέκταση της f, στο $[-10,10]$.

ii) Από τον ορισμό της g προκύπτει ότι $a = 1$, επομένως η περιοδική επέκταση της συνάρτησης g δίνεται από την (9.3.32) και είναι:

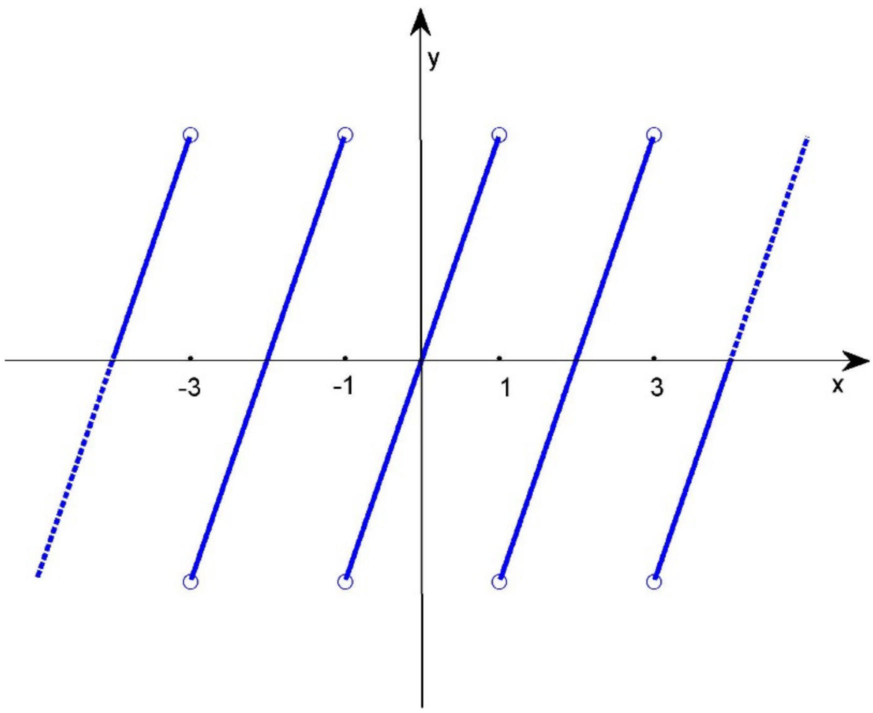
$$g_e(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{αν } x = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \\ x - 2k, & \text{αν } x \notin (-1,1),\ x \neq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9.4 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της g_e, περιοδική επέκταση της g, στο $(-5,5)$.

◈ Υπενθυμίζεται ότι, $\sin(2n\pi) = 0$ και $\cos(2n\pi) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.



Σχήμα 9.3: Η γραφική παράσταση της f_e.



Σχήμα 9.4: Η γραφική παράσταση της g_e. ◊◊

Συνδυάζοντας τον παραπάνω ορισμό της περιοδικής επέκτασης της f στην (9.3.32), με το Θεώρημα 9.3.10 συμπεραίνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.3.14. Έστω ότι η συνάρτηση f και η παράγωγος f' είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα $[-a,a]$. Έστω f_e η περιοδική επέκταση της f, όπως στον Ορισμό 9.3.12. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-a,a] \text{ και } f \text{ συνεχής στο } x \\ \dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}, & \text{αν } x = x_0 \text{ σημείο ασυνέχειας της } f \text{, όπου } x_0 \in [-a,a] \\ f(x_{i0}), & \text{αν } x = x_{i0} + 2ka,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-a,a], \\ & \quad \text{και } x_{i0} \in [-a,a], \text{ με } x_{i0} \text{ σημείο συνέχειας της } f \\ \dfrac{f(x_{i0}^+)+f(x_{i0}^-)}{2}, & \text{αν } x = x_{i0} + 2ka,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } x \notin [-a,a], \\ & \quad \text{και } x_{i0} \in [-a,a], \text{ με } x_{i0} \text{ σημείο ασυνέχειας της } f \end{cases} \tag{9.3.33}$$

όπου $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ και $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.3.15.
Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική επέκταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.3.13.
Είναι φανερό ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \in (-1,1)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10 η σειρά Fourier της f, για κάθε $x \in (-1,1)$, συγκλίνει στην $f(x)$.
Τώρα για τον υπολογισμό της σειράς Fourier, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για μία περιττή συνάρτηση, επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει $f(-x) = -x = f(x)$. Συνεπώς, η σειρά Fourier της f περιέχει μόνο ημιτονικές συναρτήσεις (βλέπε, Εφαρμογή 9.3.8 (i)), υπολογίζεται από την (9.3.25), οι δε συντελεστές b_n δίνονται από την (9.3.26), και είναι $b_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (δείτε, άσκηση αυτοαξιολόγησης 9.5.14). Επομένως, για κάθε $x \in (-1,1)$, η σειρά είναι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) \tag{9.3.34}$$

Επειδή η f είναι συνεχής $x \in [-1,1]$, η σειρά συγκλίνει στην f, οπότε γράφουμε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x)$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.3.11 (i) μπορούμε να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς και στα άκρα του διαστήματος $(-1,1)$, χρησιμοποιώντας τις τιμές της επέκτασης της f και από την (9.3.31) να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς.
Για το αριστερό άκρο του διαστήματος $(-1,1)$ είναι:

$$f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f_e(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1, \qquad f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1,$$

και για το δεξιό άκρο του διαστήματος είναι:

$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1, \qquad f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f_e(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1,$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά συγκλίνει

- στην τιμή $\dfrac{f(-1^-)+f(-1^+)}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$, αν $x = -1$, και

- στην τιμή $\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\frac{1-1}{2}=0$, για $x=-1$.

Η περιοδική επέκταση της f δίνεται στο Παράδειγμα 9.3.13. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με την Πρόταση 9.3.14, η σειρά Fourier στην (9.3.34) συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ στην περιοδική επέκταση της f, η οποία δίνεται από την (9.3.33) και είναι :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\in(-1,1)\\ 0, & \text{αν } x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\\ x-2k, & \text{αν } x\in\mathbb{R},\ \text{με } x\notin(-1,1),\ \ x\neq 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

◊◊

Παράδειγμα 9.3.16.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & \text{αν } -\pi\le x\le 0\\ x, & \text{αν } \ \ 0< x\le\pi\end{cases}$$

i) Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης f.

ii) Να εξετάσετε ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας της f;

iii) Να ορίσετε μία επέκταση της f ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, την f_e, ώστε η σειρά Fourier του (i) να συγκλίνει στην f_e.

iv) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier στο (i) και για $x=\pi$, να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

i) Προφανώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην $f(x)$, αρκεί να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς.

- Ο συντελεστής a_0 υπολογίζεται από την (9.3.22) και είναι:

$$a_0=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{2}[x]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi^2}{2})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

- Οι συντελεστές a_n, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.23), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$a_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)dx=$$
$$=\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx=$$
$$=\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x\left(\sin(nx)\right)'dx=\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(x)'\sin(nx)dx=$$
$$=\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx=\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(nx)\right)'dx=$$
$$=\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}[x\sin(nx)]_0^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right)=\frac{1}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

- Οι συντελεστές b_n, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπολογίζονται από την (9.3.24), εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως ακολούθως :

$$b_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(nx)dx=$$
$$=\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(nx)dx=$$
$$=-\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}x\left(\cos(nx)\right)'dx=-\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}(x)'\cos(nx)dx=$$
$$=-\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx=-\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin(nx)\right)'dx=$$
$$=-\frac{1}{n}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2\pi}\left[x\sin(nx)\right]_{0}^{\pi}=$$
$$=-\frac{1}{n}\left(\cos(0)-\cos(n(-\pi))\right)-\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos(n\pi)\right)+\frac{1}{n^2\pi}\left(\pi\sin(\pi)\right)_{0}^{\pi}=$$
$$=\frac{\cos(n\pi)-1}{n}-\frac{\cos(n\pi)}{n}+0=-\frac{1}{n}$$

Άρα, η σειρά Fourier προκύπτει αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_0, a_n και b_n από παραπάνω στην (9.3.21):

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)=\\&=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos(nx)+\frac{1}{n}\sin(nx)\end{aligned}\tag{9.3.35}$$

ii) Στο σημείο 0 υπάρχει ασυνέχεια, επειδή

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\pi\,,\qquad f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0\,.\tag{9.3.36}$$

Για το αριστερό άκρο του διαστήματος έχουμε:

$$f(-\pi^-)=\lim_{x\to-\pi^-}f(x)=\lim_{x\to-\pi^-}f_e(x)=\pi\,,\qquad f(-\pi^+)=\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=\lim_{x\to-\pi^+}\pi=\pi\,.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}f(x)=\pi=f(-\pi)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $-\pi$.

Για το δεξιό άκρο του διαστήματος έχουμε:

$$f(\pi^-)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}x=\pi\,,\qquad f(\pi^+)=\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}f_e(x)=\pi\,.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\pi=f(\pi)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο π.

Συνεπώς, η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, ενώ, στο $\mathbb{R}$ τα σημεία ασυνέχειας είναι τα $2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

iii) Θεωρώντας ότι η f επεκτείνεται με περίοδο $T=2\pi$, σύμφωνα με τον Ορισμό 9.3.12 και την (9.3.32) η περιοδική επέκταση της f είναι:

$$f_e(x)=\begin{cases}f(x), & \text{αν}\ \ x\in[-\pi,\pi]\\ f(x-2k\pi), & \text{αν}\ \ x=x_i+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \ \text{όπου}\ x\notin[-\pi,\pi],\ \ \text{και}\ x_i\in[-\pi,\pi]\end{cases}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.3.14, η σειρά Fourier στην (9.3.35) συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε x, όπου η f είναι συνεχής.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.3.10, η σειρά Fourier συγκλίνει και σε σημεία ασυνέχειας με άθροισμα (τιμή σύγκλισης), την τιμή που υπολογίζεται από την (9.3.30). Επειδή στο (ii) αποδείχθηκε ότι τα σημεία ασυνέχειας είναι για $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}_0=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$, αντικαθιστώντας τις τιμές της συνάρτησης από την (9.3.36) στην (9.3.30) έχουμε:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}\tag{9.3.37}$$

Συνεπώς από (9.3.35), (9.3.37) και την (9.3.33), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει ως ακολούθως :

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) = \begin{cases} \pi, & \text{αν} \;\; x \in [-\pi, 0] \\ x, & \text{αν} \;\; x \in (0, \pi] \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{αν} \;\; x = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}_0 \\ \pi, & \text{αν} \;\; x = x_i + 2k\pi, \; x_i \in [-\pi, 0], \; x \notin [-\pi, \pi], \;\; x \neq 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ x - 2k\pi, & \text{αν} \;\; x = x_i + 2k\pi, \; x_i \in [0, \pi], \; \text{με} \; x \notin [-\pi, \pi], \;\; x \neq 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

iv) Επειδή η $f(\pi) = \pi$, αν στη σειρά Fourier στην (9.3.35) θέσουμε $x = \pi$ έχουμε:

$$\pi = f(\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \sin(n\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} =$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^1}{1^2} + \frac{1 - (-1)^2}{2^2} + \frac{1 - (-1)^3}{3^2} + \frac{1 - (-1)^4}{4^2} + \frac{1 - (-1)^5}{5^2} + \cdots \right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

◊◊

9.4. Σειρές συναρτήσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον

9.4.1. Σειρές Taylor

Η εντολή `taylor` χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μίας συνάρτησης f από το πολυώνυμο Taylor n βαθμού.

Η εντολή είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για τον υπολογισμό του *πολυωνύμου* Taylor, η εντολή `taylor` δέχεται ως εισόδους:
- τη συνάρτηση `f`
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.
  Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι η μεταβλητή είναι η `x`
- τον αριθμό `n`, ο οποίος δηλώνει το $(n-1)$ βαθμό του πολυωνύμου Taylor.
  Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι $5^{ου}$ βαθμού.
- το κέντρο ανάπτυξης x_0 του πολυωνύμου (και της σειράς) Taylor
  Αν παραληφθεί, τότε θεωρείται ότι το κέντρο ανάπτυξης είναι το 0, συνεπώς πρόκειται για πολυώνυμο Maclaurin.

Σύνταξη εντολής: `taylor(f,x,n,x0)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Taylor $5^{ου}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x)=\sin(x)$ με κέντρο ανάπτυξης το $x_0=\frac{\pi}{6}$, γράφουμε:

```
syms x
f = sin(x);
[y]=taylor(f,x,6,
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y =  -(3^(1/2)*(pi/6 - x)^5)/240+ (pi/6 - x)^4/48 +
     +(3^(1/2)*(pi/6 - x)^3)/12 – (pi/6 - x)^2/4 +
     - (3^(1/2)*(pi/6 - x))/2 + 1/2
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε το πολυώνυμο Taylor $5^{ου}$ βαθμού με κέντρο ανάπτυξης το $x_0=\frac{\pi}{6}$ σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$-\frac{\sqrt{3}}{240}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^5+\frac{1}{48}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^4+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\frac{1}{2}$$

Για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Maclaurin $6^{ου}$ βαθμού της συνάρτησης $p(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$ με κέντρο ανάπτυξης το $x_0=0$, σύμφωνα με το Παραδείγματα 9.2.14 (iii), γράφουμε:

```
syms x
 p = (2x^2)/(1-x)^3
 [y]=taylor(p,x,7,0);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το πολυώνυμο 6ου βαθμού, που είναι:

```
y = 30*x^6 + 20*x^5 + 12*x^4 + 6*x^3 + 2*x^2
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

y = $30x^6 + 20x^5 + 12x^4 + 6x^3 + 2x^2$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν δεν βάζαμε το κέντρο ανάπτυξης στην εντολή `taylor`, αν γράφαμε:

```
syms x
p = (2x^2)/(1-x)^3
[y]=taylor(p,x,7);
```

Η απάντηση είναι :

```
y = 30*x^6 + 20*x^5 + 12*x^4 + 6*x^3 + 2*x^2
```

◊◊

9.4.2. Σειρές Fourier

Οι συντελεστές a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, της σειράς Fourier στις (9.3.22), (9.3.23), (9.3.24)◆, επειδή δίνονται από ορισμένα ολοκληρώματα, μπορούν να υπολογιστούν με Matlab/Octave. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τη συμβολική εντολή `syms` δηλώνονται δύο μεταβλητές, η ανεξάρτητη μεταβλητή `n` της ακολουθίας των συντελεστών και η ανεξάρτητη μεταβλητή `x` της συνάρτησης `f`, επίσης απαιτείται η εντολή `int` για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, (βλέπε, Ενότητα 7.7). Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των τύπων των συντελεστών που χρησιμοποιούνται και στα αντίστοιχα διαστήματα ολοκλήρωσης.

Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ του Παραδείγματος 9.3.3, ο υπολογισμός των συντελεστών a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, της σειράς Fourier γίνεται με τη χρήση των τύπων στις (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7), ως ακολούθως:

```
syms n x
f = exp(x);
[a0]= (int(f,x,0,2*pi))/(2*pi)
[an]= (int(f*cos(n*x),x,0,2*pi)/pi
[bn]= (int(f*sin(n*x),x,0,2*pi))/pi
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
a0 = (exp(2*pi) - 1)/(2*pi)

an = -(1/(n^2 + 1)-(exp(2*pi)*(cos(2*n*pi)+n*sin(2*n*pi)))/(n^2 + 1))/pi

bn = (exp(2*pi)*sin(2*n*pi)-n*(exp(2*pi)*cos(2*n*pi) - 1))/((n^2 + 1)*pi)
```

Εκτελώντας την εντολή `pretty` για τον κάθε συντελεστή ξεχωριστά

```
pretty(a0)
pretty(an)
pretty(bn)
```

παίρνουμε τη ρητή μορφή των συντελεστών ως ακολούθως:

$$\text{a0} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

$$\text{an} = -\frac{1 - e^{2\pi}\left(\cos(2n\pi) + n\sin(2\pi n)\right)}{(n^2+1)\pi}$$

$$\text{bn} = \frac{e^{2\pi}\sin(2\pi n) - n\left(e^{2\pi}\cos(2n\pi) - 1\right)}{(n^2+1)\pi}$$

Παρατηρήστε ότι, αν γίνουν οι αντικαταστάσεις $\sin(2n\pi) = 0$ και $\cos(2n\pi) = 1$ στην παραπάνω μορφή, επαληθεύονται τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 9.3.3.

◆ Οι συντελεστές στη σειρά Fourier που δίνονται από οποιονδήποτε από τους τύπους, (9.3.26), (9.3.28), (9.3.29), (9.3.3), (9.3.6), (9.3.7), ή (9.3.10)-(9.3.12), ή (9.3.14), (9.3.16), (9.3.17) αρκεί να δίνονται σωστά τα άκρα ολοκλήρωσης.

Στην περίπτωση που υπάρχει συμμετρία στη συνάρτηση, άρτια ή περιττή, το ανάπτυγμα Fourier απαιτεί ορισμένους συντελεστές, (βλέπε Εφαρμογή 9.3.5 και 9.3.8), οπότε οι υπολογισμοί απλοποιούνται. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x)=x^3$, για κάθε $x\in[-1,1]$ του Παραδείγματος 9.3.9 (ii), επειδή απαιτείται ο υπολογισμός μόνο των συντελεστών b_n, οι οποίοι δίνονται από την (9.3.26), $b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$, γράφουμε:

```
syms n x
f = x^3;
[bn]= 2*(int(f*sin(n*pi*x),x,0,1))
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
bn = 2*sin(pi*n)*(3/(pi^2*n^2) - 6/(pi^4*n^4)) –
    -2*cos(pi*n)*(1/(pi*n) - 6/(pi^3*n^3))
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(bn)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

bn = $2\sin(n\pi)\left(\frac{3}{n^2\pi^2}-\frac{6}{n^4\pi^4}\right)-2\cos(n\pi)\left(\frac{1}{n\pi}-\frac{6}{n^3\pi^3}\right)$

Παρατηρήστε ότι, αν στην παραπάνω μορφή γίνουν οι αντικαταστάσεις $\sin(n\pi)=0$ και $\cos(n\pi)=(-1)^n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, επαληθεύονται τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 9.3.9 (ii). ◊◊

9.5 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

9.5.1 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 9.1.6.
Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$ και το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1,1)$.

9.5.2 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} x^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 9.1.9.
Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$ και η περιοχή σύγκλισης είναι $(-1,1]$.

9.5.3 Να προσδιορισθούν η ακτίνα και η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-3)^{2n}$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 9.1.9.
Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=+\infty$ και η περιοχή σύγκλισης είναι $\mathbb{R}$.

9.5.4 Να προσδιορισθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)|}{n!} x^n$, όπου $a \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 9.1.9. και συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 9.2.11.
Απάντηση: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=1$.

9.5.5 Να προσδιορισθεί η περιοχή σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1}(x-4)^n$

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 9.1.9.
Απάντηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι $(3,5)$.

9.5.6 Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)=4x^3-3x^2+5x-1$ σε δυνάμεις του $x-2$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $f^{(n)}(x)=0$ και χρησιμοποιείστε την (9.2.2).

Απάντηση: Η σειρά Taylor είναι: $f(x)=29+41(x-2)+21(x-2)^2+4(x-2)^3$.

9.5.7 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x)=\sinh(x)$ και να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 9.2.14. (i) και τον ορισμό του υπερβολικού ημιτόνου.

Απάντηση: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ζητούμενη σειρά Maclaurin είναι : $\sinh(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

9.5.8 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 9.2.10 και στην (9.2.5) αντικαταστήστε όπου x το $-x^2$.

Απάντηση: Η ζητούμενη σειρά Maclaurin είναι : $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, αν $-1<x<1$.

9.5.9 Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x)=\sin^2(x)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τριγωνομετρικό τύπο $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$, την (9.2.6) και συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 9.2.14.

Απάντηση: Η ζητούμενη σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι : $\sin^2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

9.5.10 Να υπολογισθεί το $\int \sin(x^2)\,dx$ με τη μορφή δυναμοσειράς Maclaurin.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε στην (9.2.5), όπου x το x^2 και χρησιμοποιείστε την Πρόταση 9.1.12 και συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 9.2.15 (ii).

Απάντηση: Η ζητούμενη δυναμοσειρά Maclaurin είναι : $\int \sin(x^2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 3!}x^7 + \frac{1}{11\cdot 5!}x^{11} - \cdots$

9.5.11 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^2$, με $x \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον Ορισμό 9.3.2, για τους συντελεστές χρησιμοποιήστε τους τύπους (9.3.3), (9.3.6) και (9.3.7). Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 9.3.3.

Απάντηση: Το ανάπτυγμα Fourier για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι:

$$f(x) \approx \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

9.5.12 Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x) = |x|$, με $x \in [-\pi, \pi]$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, η f είναι άρτια και συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 9.3.6.(ii)

Απάντηση: Το ανάπτυγμα της f είναι $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

9.5.13 Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Απάντηση: Από τις σχέσεις (9.3.10), (9.3.11) και (9.3.12) υπολογίζονται οι συντελεστές της σειράς Fourier, οι οποίοι είναι: $a_0 = 1 + \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ και $b_n = \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi}$, και η σειρά Fourier δίνεται από την (9.3.8).

9.5.14 Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για περιττή συνάρτηση, από την (9.3.26) υπολογίζονται οι συντελεστές b_n και από την (9.3.25) η σειρά Fourier.
Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 9.3.8 (i) και το Παράδειγμα 9.3.9.(ii) .

Απάντηση: Η σειρά Fourier είναι: $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.

Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). Ολοκληρωτικός λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση, τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παντελίδης, Γ. Ν. (1999). Μαθηματική Ανάλυση (τόμος Ι, ΙΙ). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from http://www.gnu.org/software/octave

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

9.1. Να προσδιορισθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης στις ακόλουθες δυναμοσειρές:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} (x-1)^n$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \cdot n^2} (x-2)^{n-1}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n \cdot n^2} (x-3)^n$ vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-4)^n$

vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n+1} \cdot (n+1)^2} (x+1)^n$ viii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (2n+1)} (2x+1)^n$

9.2. Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin οι ακόλουθες συναρτήσεις και να δοθεί το διάστημα σύγκλισής τους:

i) $f_1(x) = -1 + 2x + e^{-x^2}$ ii) $f_2(x) = \frac{e^{4x+1} - 1}{e^x}$

iii) $f_3(x) = x \ln(1+2x)$ iv) $f_4(x) = \ln\left(\frac{4+2x}{1-x}\right)$

v) $f_5(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ vi) $f_6(x) = \frac{3-2x}{(1+x)(4+x^2)}$

vii) $f_7(x) = \frac{x^2+4}{-2x^6+x}$ viii) $f_8(x) = \frac{-x}{3+2x^4}$

ix) $f_9(x) = \sqrt{3-2x^2}$ x) $f_{10}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

xi) $f_{11}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ xii) $f_{12}(x) = \frac{x+2}{(x^6+1)^2}$

9.3. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σειρές Maclaurin:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2 e^{-2x}}$ ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 - e^{x^2}}{2 + 2x - 2\cos(2x)}$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x) - \sin(x)}{x^3 \cos(x)}$ iv) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(e^{-1/x^2} - 1\right)}{\ln(x+1)}$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\ln(1-x) + \sin(x)}$ vi) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x) - \cosh(x)}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.4. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σειρές Maclaurin:

i) $\int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx$ ii) $\int_{0}^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2} dx$

iii) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x - \sin(x)}{x^2} dx$ iv) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x^2 - \cos(x)}{x^3} dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.5. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, και να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{4^n}$.

9.6. i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = xe^{2x}$, και να υπολογισθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n}{(n-1)!}$.

9.7. Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι ακόλουθες συναρτήσεις:

i) $f_1(x) = -2x+1$, $x \in [0, 2\pi]$

ii) $f_2(x) = \pi x - x^2$, $x \in [0, 2\pi]$

iii) $f_3(x) = -2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

iv) $f_4(x) = \pi^2 x - x^3$, $x \in [-\pi, \pi]$

v) $f_5(x) = -x^2$, $x \in [-3, 3]$

vi) $f_6(x) = 4|x|$, $x \in [-2, 2]$

vii) $f_7(x) = |\sin(x)|$, $x \in [-\pi, \pi]$

viii) $f_8(x) = |\cos(x)|$, $x \in [-\pi, \pi]$

ix) $f_9(x) = \begin{cases} -x(\pi - x), & \text{αν } -\pi \le x \le 0 \\ x(\pi - x), & \text{αν } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

x) $f_{10}(x) = \begin{cases} -4x - \pi, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ 4x - \pi, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

xi) $f_{11}(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -2 \le x < 0 \\ 0, & \text{αν } 0 \le x \le 2 \end{cases}$

xii) $f_{12}(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{αν } -\pi \le x < 0 \\ 0, & \text{αν } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

xii) $f_{13}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -\pi \le x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x), & \text{αν } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

xiv) $f_{14}(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -2 \le x < -1 \\ -3, & \text{αν } -1 < x < 0 \\ 3, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < x \le 2 \end{cases}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.8. Να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier οι περιοδικές επεκτάσεις σε όλο τον πραγματικό άξονα των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f_1(x) = 3x+1$, $x \in [-2, 2]$

ii) $f_2(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$

iii) $f_3(x) = 2x+3$, $x \in [-5, 5]$

iv) $f_4(x) = 1-x$, $x \in [-\pi, \pi]$

v) $f_5(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2, 2]$

vi) $f_6(x) = 2|x-1|$, $x \in [-2, 2]$

vii) $f_7(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν } -2 \le x < 0 \\ x+4, & \text{αν } 0 \le x \le 2 \end{cases}$

viii) $f_8(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } -2 \le x \le 0 \\ x+2, & \text{αν } 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

9.9. Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(x) = |x|$, που ορίζεται στο διάστημα $[-a, a]$ με περίοδο $T = 2a$. Να γράψετε μία συνάρτηση (function), που να έχει ως είσοδο τον τύπο της f, το διάστημα ορισμού της και το πλήθος N των συντελεστών a_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ της σειράς Fourier της f, η οποία (function) να υπολογίζει αυτούς τους συντελεστές. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier για $a = 3$ και για $N = 5$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά του Παραδείγματος 9.3.9(i). Επίσης, υπολογίστε το ανάπτυγμα της σειράς Fourier για $x = 2$ με $N = 5$ και $N = 10$. Τέλος, υπολογίστε την τιμή του N, για την οποία ο N – στός όρος του αναπτύγματος της σειράς Fourier για $x = 2$ να είναι μικρότερος από $\varepsilon = 10^{-6}$.

9.10. Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^4 + e^x$, που ορίζεται στο διάστημα $[-a, a]$ με περίοδο $T = 2a$. Να γράψετε μία συνάρτηση (function), που να υπολογίζει τους συντελεστές a_0, a_n και b_n, $n = 1, \ldots, N$ της σειράς Fourier της f. Η συνάρτηση (function) να έχει ως είσοδο τον τύπο της f, το διάστημα ορισμού της και το πλήθος N των συντελεστών που υπολογίζει. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier για $a = 1$ και για $N = 5$. Επίσης, υπολογίστε το ανάπτυγμα της σειράς Fourier για $x = 2$ με $N = 5$ και $N = 10$.