ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εφαρμογές ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος

Αποσπάσματα από την επιστολή (06/09/1916) του Albert Einstein (1879 –1955)
προς τον Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή,
λίγες μέρες πριν την ανακοίνωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Μου δώσατε την ελπίδα ότι θα θέλατε να γράψετε μία παραστατική ανάπτυξη της σχέσης Hamilton-Jakobi. Τώρα το κατάφερα ήδη μόνος μου και σας δείχνω τον απλό συλλογισμό μου, μόνο για να σας απαλλάξω από τον κόπο.
…
Δι αυτού δεν έχει φυσικά αποδειχθεί με κανέναν τρόπο το ‘αντίστροφο’ του Jakobi. Αλλά ήδη αρκεί η τυπική, αλλά λιγότερο διαφανής απόδειξη, όπως αυτή δίνεται από τον Appell. Αυτό που μου έλειπε ήταν ένας φυσικός δρόμος, για να φτάσω από τις ισότητες Lagrange στις ισότητες ….

Δεν θέλετε να σκεφτείτε περαιτέρω επί του προβλήματος των κλειστών χρονικών γραμμών; Σε αυτό έγκειται ο πυρήνας του ακόμα άλυτου Tesla του προβλήματος του χωρο-χρόνου.

Σας στέλνει τους καλύτερούς του χαιρετισμούς ο απολύτως αφοσιωμένος σ' εσάς,
A. Einstein.

Υ.Γ.: Φυσικά, δεν φαντάζομαι ότι αυτές οι ασημαντότητες θα ήταν κάτι ή κάτι καινούριο. Πρόκειται για πράγματα, που μου δίνουν την αίσθηση της εξοικείωσης με το αντικείμενο.

Η απάντηση βρίσκεται στο Transcription de la lettre de C. Carathéodory à A. Einstein (16/12/1916)

Το κύριο πρόβλημα στη θεωρία των κανονικών αντικαταστάσεων μπορεί να αναπτυχθεί κατά τη γνώμη μου με τον πιο απλό τρόπο, ως εξής:
Εφόσον το ολοκλήρωμα Hamilton έχει τη μορφή … κι εφόσον σε αυτό τεθούν ..., τότε οι διαφορικές εξισώσεις της Μηχανικής γίνονται …

Ολόκληρη η θεωρία έπεται ως συνέπεια του μετασχηματισμού, ο οποίος οδήγησε στην εξίσωση…. Συγκρίνετε και με την περιγραφή από Whittakers Αναλυτική Δυναμική.

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873 - 1950)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εφαρμογές ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος στη γεωμετρία, στη μηχανική, στη φυσική και στα οικονομικά, όπως είναι το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, ο όγκος ενός στερεού από περιστροφή, το μήκος μίας καμπύλης, η συνάρτηση του κέρδους (αντίστοιχα κόστους) μίας επιχείρησης. Επιπλέον, παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, όπως είναι οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και η διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Προαπαιτούμενη γνώση
Αόριστο ολοκλήρωμα, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, Ορισμένο ολοκλήρωμα.

8.1. Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

8.1.1. Εμβαδόν επίπεδης περιοχής

Στον Ορισμό 7.6.3 και στη συνέχεια στην Παρατήρηση 7.6.4 είδαμε ότι για μία φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ κάνοντας μία διαμέριση του $[a,b]$ σε υποδιαστήματα $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=1,2,\ldots,n$ και επιλέγοντας τυχαία $w_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$, το άθροισμα Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right)\Delta x_i = f\left(w_1\right)\left(x_1-x_0\right)+f\left(w_2\right)\left(x_2-x_1\right)+\cdots+f\left(w_n\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)$$

δίνει το κίνητρο για τον υπολογισμό του εμβαδού της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, (βλέπε, Σχήμα 8.1 και 8.2). Όσο η διαμέριση γίνεται λεπτότερη, δηλαδή, $\left|\Delta x\right|\to 0$, τότε το όριο

$$\lim_{\left|\Delta x\right|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right)\Delta x_i\ ,$$

όταν υπάρχει, δίνει το εμβαδόν, E, αυτής της επίπεδης περιοχής, (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.6.).

Ορισμός 8.1.1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και

$$f(x)\geq 0,\ \text{για κάθε}\ x\in\left[a,\,b\right].$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, και το **εμβαδόν** της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, είναι ίσο με

$$E=\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

όπου E συμβολίζει το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής.
Αν $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in\left[a,\,b\right]$, τότε

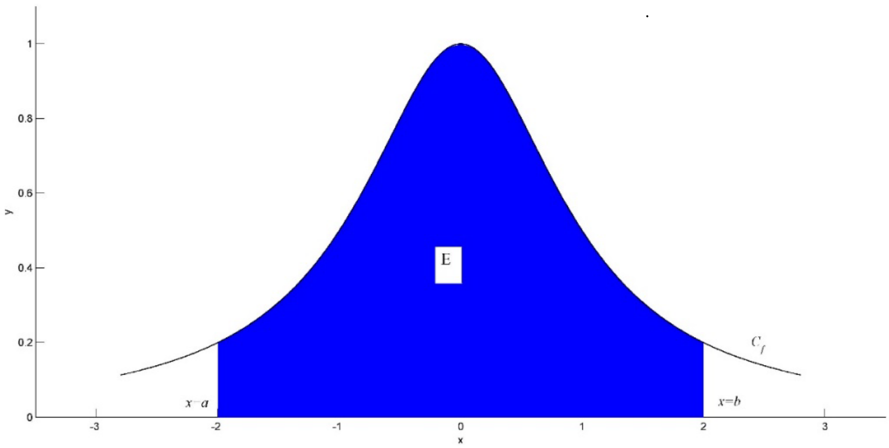
$$E=-\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Γενικά, ισχύει

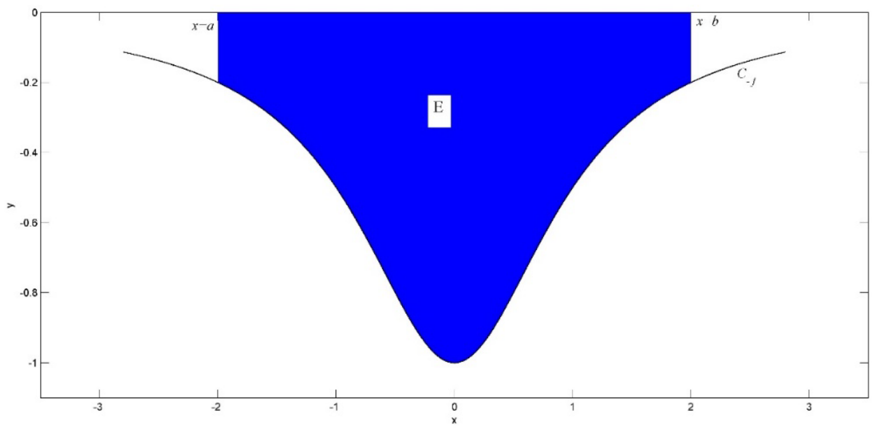
$$E=\int_a^b\left|f(x)\right|dx \qquad (8.1.1)$$

Παρατηρήσεις 8.1.2.

i) Επειδή το εμβαδόν E ενός επίπεδου χωρίου παριστάνεται από θετικό πραγματικό αριθμό, γι' αυτόν το λόγο η συνάρτηση f απαιτείται να είναι θετική στο διάστημα $[a,b]$, δηλαδή, πρέπει να έχει γραφική παράσταση πάνω από τον άξονα $x'0x$ (βλέπε, Σχήμα 8.1). Ενώ, αν η f είναι αρνητική στο $[a,b]$, δηλαδή, αν έχει γραφική παράσταση κάτω από τον άξονα $x'0x$, ως εμβαδόν θεωρούμε τον αντίθετο αριθμό του $\int_a^b f(x)dx$ (βλέπε, Σχήμα 8.2). Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση $y=-f(x)$ έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $x'0x$ και επομένως τα δύο επίπεδα τμήματα, που βρίσκονται είτε μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=b$, του άξονα $x'0x$ και της καμπύλης $y=f(x)$ είτε μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=b$, του άξονα $x'0x$ και της καμπύλης $y=-f(x)$, έχουν το ίδιο εμβαδόν.



Σχήμα 8.1: Γραφική παράσταση της f.



Σχήμα 8.2: Γραφική παράσταση της $-f$.

ii) Αν το ζητούμενο εμβαδόν E περικλείεται από την καμπύλη $x=g(y)$ και τις οριζόντιες ευθείες $y=c$ και $y=d$ και τον άξονα $y'0y$, τότε, ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με τα παραπάνω, στο διάστημα $[c,\, d]$ έχουμε:

$$E=\int_c^d \left|g(y)\right|dy \tag{8.1.2}$$

Όταν έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε την περιοχή, της οποίας αναζητείται το εμβαδόν, είτε σαν περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $x=g(y)$, τις οριζόντιες ευθείες $y=c$, $y=d$ και τον άξονα $y'0y$, είτε σαν περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$, $x=b$

και τον άξονα $x'0x$, ακολουθούμε, για τον υπολογισμό του εμβαδού, είτε τον τύπο (8.1.2) είτε τον τύπο (8.1.1) και τότε η απάντηση παραμένει ίδια.

Ορισμός 8.1.3. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$f(x) \geq g(x) \text{ ή } g(x) \geq f(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Το **εμβαδόν** E της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g, τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, είναι ίσο με

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{8.1.3}$$

Ανάλογα, αν $x = f(y)$ και $x = g(y)$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[c, d]$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$f(y) \geq g(y) \text{ ή } g(y) \geq f(y), \text{ για κάθε } y \in [c, d],$$

τότε το **εμβαδόν** E της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g, και τις οριζόντιες ευθείες $y = c$ και $y = d$, είναι ίσο με

$$E = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy. \tag{8.1.4}$$

Εφαρμογή 8.1.4.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από

i) τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x - 3$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -\frac{3}{2}$ και $x = 1$ και από τον άξονα $x'0x$.

ii) τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 2$ και από τον άξονα $x'0x$.

iii) την καμπύλη $y^2 = x$ και από την ευθεία $y = x - 6$.

iv) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$.

Απόδειξη:

i) Επειδή, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση ($2^{ου}$ βαθμού), είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1. χρειάζεται να γνωρίζουμε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f. Ως γνωστόν, η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι μία παραβολή, η οποία τέμνει τον άξονα $x'0x$ στα σημεία $(-1, 0)$ και $(3, 0)$, (βλέπε, Σχήμα 8.3).

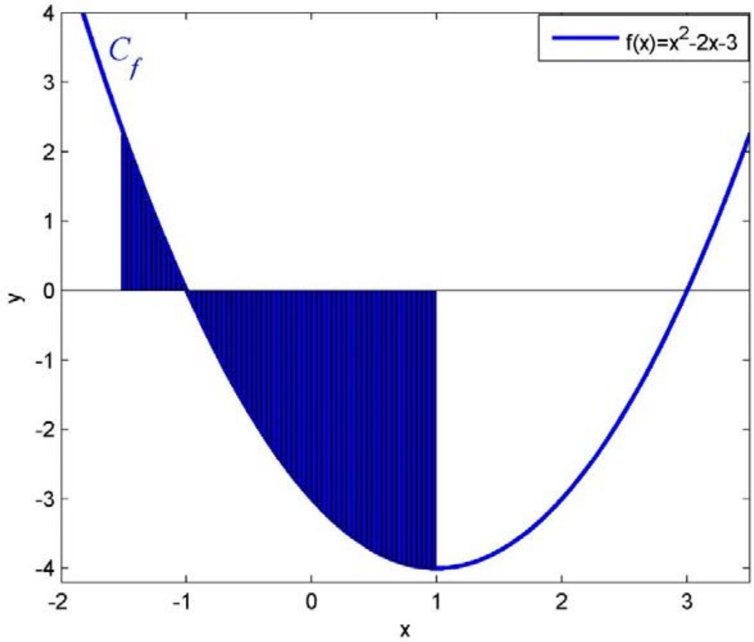
Παρατηρήστε ότι, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ και $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Επομένως, εφαρμόζοντας την (8.1.1) το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} |f(x)| dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx + \int_{-1}^{1} -\left(x^2 - 2x - 3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(-\frac{27}{24} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 + 3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right)\right] = \frac{47}{8}.$$



Σχήμα 8.3: Εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο $\left[-3/2, 1\right]$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\dfrac{47}{8}$ τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.) μέτρησης.

ii) Αρχικά $f(x)=x^4-5x^2+4$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση ($4^{ου}$ βαθμού). Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1. χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης f, οπότε αρχικά ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης.

Παρατηρήστε ότι, η εξίσωση $x^4-5x^2+4=0$ γράφεται $(x^2-1)(x^2-4)=0$, οπότε οι ρίζες της είναι $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, και $x_4=2$, επομένως, όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 8.4 η γραφική παράσταση της $f(x)=x^4-5x^2+4$ τέμνει τον άξονα $x'0x$ στα σημεία $\text{A}(-2,0)$, $\text{B}(-1,0)$, $\Gamma(1,0)$ και Δ $(2,0)$. Επιπλέον, επειδή μπορούμε να γράψουμε $f(x)=x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)$, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της συνάρτησης f, το οποίο παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

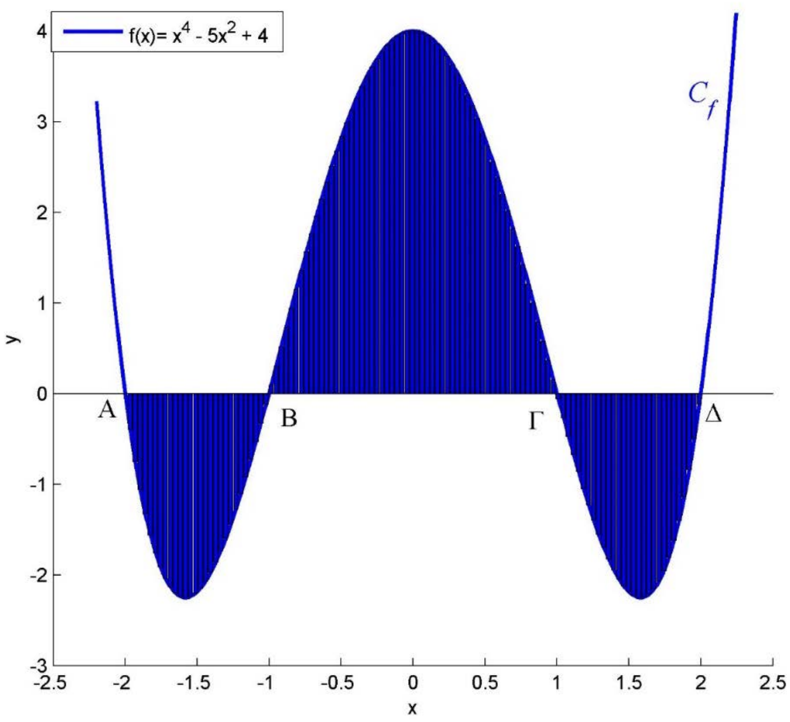
x	$-\infty$ -2	-1	1	2	$+\infty$
x^2-1	+	+	−	+	+
x^2-4	+	−	−	−	+
$f(x)=x^4-5x^2+4$	+	−	+	−	+

Συνεπώς, για κάθε $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$ είναι $x^4-5x^2+4\le 0$, ενώ για κάθε $x\in[-1,2]$ είναι $x^4-5x^2+4\ge 0$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από την (8.1.1) και λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσημα της f έχουμε:

$$E=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{-1}-\left(x^4-5x^2+4\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(x^4-5x^2+4\right)dx+\int_{1}^{2}-\left(x^4-5x^2+4\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^5}{5}+5\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^5}{5}-5\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^5}{5}+5\frac{x^3}{3}-4x\right]_{1}^{2}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4\right)-\left(\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+8\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4\right)\right]+\left[\left(-\frac{32}{5}+\frac{40}{3}-8\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4\right)\right]=8.$$



Σχήμα 8.4: Εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο $[-2,\ 2]$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι 8 τ.μ. μέτρησης.

iii) Στο Σχήμα 8.5 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση (C_1) της ευθείας $y = x - 6$, που τέμνει τη γραφική παράσταση (C_2) της παραβολής $y^2 = x$ (έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'0x$) στα σημεία Α(9, 3) και $B(4,-2)$. Η καμπύλη της παραβολής $y^2 = x$ μπορεί να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση function parabola για μία μόνο συνάρτηση και αλλάζοντας τους άξονες x,y, (βλέπε, Ενότητα 1.7.2). Υπενθυμίζεται ότι τα σημεία τομής των παραπάνω καμπυλών υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

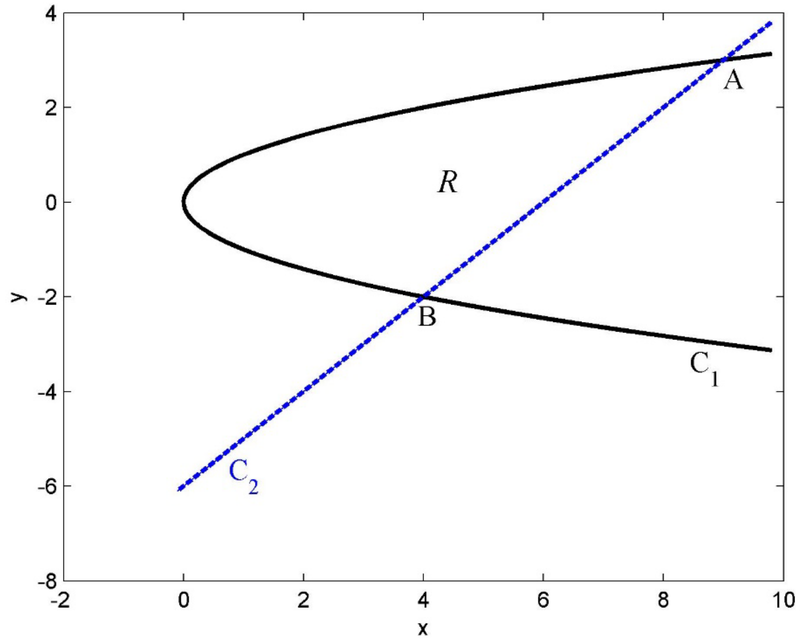
$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ y &= x - 6 \end{aligned}$$

Η περιοχή *R*, της οποίας αναζητείται το εμβαδόν, φράσσεται από την παραβολή $x = y^2$, την ευθεία $x = y + 6$ και τις οριζόντιες ευθείες $y = -2$ και $y = 3$. Επειδή στο διάστημα $[-2,3]$, της μεταβολής του *y*, έχουμε $y^2 \le y + 6$, από την (8.1.4) υπολογίζουμε το ζητούμενο εμβαδόν:

$$E = \int_{-2}^{3} \left| f(y) - g(y) \right| dy = \int_{-2}^{3} \left| y^2 - (y+6) \right| dy = \int_{-2}^{3} \left(y + 6 - y^2 \right) dy =$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 6y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{3} = \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right) = \frac{125}{6}$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\dfrac{125}{6}$ τ.μ. μέτρησης.



Σχήμα 8.5: Γραφικές παραστάσεις της ευθείας $y = x - 6$ και της παραβολής $y^2 = x$.

Για το E_{R_1} παρατηρήστε ότι η περιοχή R_1 είναι ένωση δύο συμμετρικών ως προς τον άξονα $x'0x$ περιοχών, άρα και ισεμβαδικών. Επομένως, το E_{R_1} είναι το διπλάσιο του εμβαδού της περιοχής, που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ (άξονας $y'0y$) και $x = 4$. Οπότε, από την (8.1.1) έχουμε:

$$E_{R_1} = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

Για το E_{R_2} από το τη σχέση (8.1.3) έχουμε

$$E_{R_2} = \int_4^9 \left|\sqrt{x} - (x-6)\right| dx = \int_4^9 \left(\sqrt{x} - x + 6\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_4^9 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{9^2}{2} + 54\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{16}{2} + 24\right) = \frac{61}{6} \text{τ.μ.}$$

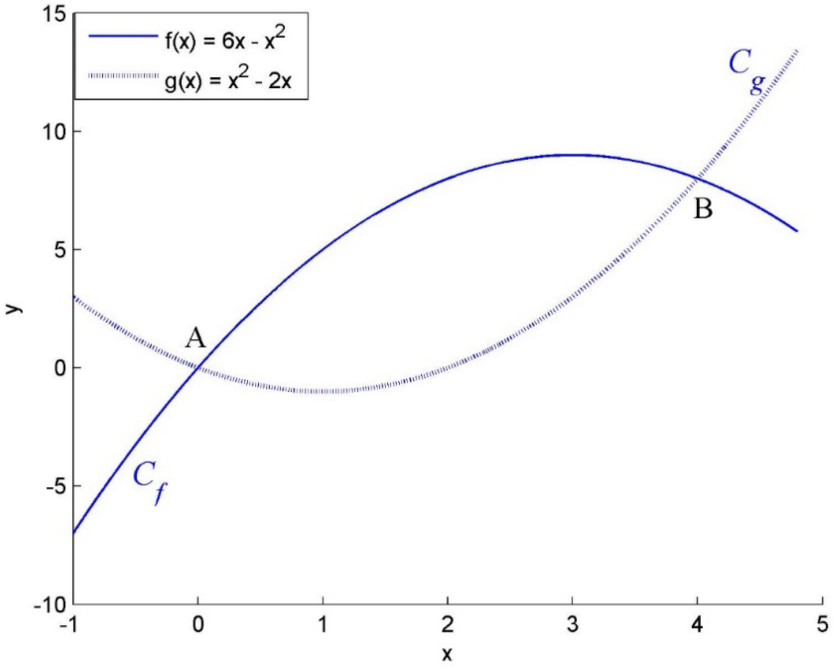
Τελικά,

$$E = E_{R_1} + E_{R_2} = \frac{32}{3} + \frac{61}{6} = \frac{125}{6} \text{ τ.μ.}$$

iv) Στο Σχήμα 8.6 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία A(0, 0) και B(4, 8), που υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων. Επειδή ενδιαφερόμαστε για το πρόσημο της $f(x) - g(x)$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $x^2 - 2x \leq 6x - x^2$, όταν $x \in [0,4]$, (βλέπε, Σχήμα 8.6). Επομένως, από τη σχέση (8.1.3), το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^4 \left[\left(6x - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right)\right] dx = \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right) dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ τ.μ. μέτρησης.}$$

Παρατήρηση. Ανεξάρτητα από το Σχήμα 8.6, αν $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$, τότε για κάθε $x \in [0,4]$ ισχύει: $f(x) - g(x) = \left(6x - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right) = 8x - 2x^2 = 2x(4 - x) \geq 0$



Σχήμα 8.6: Γραφικές παραστάσεις των παραβολών $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$.

◊◊

8.1.2. Όγκος στερεού από περιστροφή

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a,\, b]$. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'0x$ της επίπεδης περιοχής *R*, που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις κατακόρυφες ευθείες $x = a,\ x = b$ και τον άξονα $x'0x$.

Ακολουθούμε μία ανάλογη διαδικασία με εκείνη που περιγράψαμε για τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδης περιοχής (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.4). Έστω μία διαμέριση

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

του διαστήματος $[a,b]$, μήκους $\Delta x = \max\left\{ |\Delta x_i| : 1 \leq i \leq n \right\}$ και έστω $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε, ο αριθμός

$$\Delta V_i = \pi \left(f(w_i) \right)^2 \Delta x$$

παριστάνει τον όγκο ενός στοιχειώδους κυλίνδρου με ύψος το Δx και ακτίνα βάσης $f(w_i)$, δηλαδή, παριστάνει τον όγκο ενός κυλίνδρου, που παράγεται από την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις Δx και $f(w_i)$ γύρω από τον άξονα $x'0x$. Σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left(f(w_i) \right)^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(w_i) \right)^2 \Delta x .$$

Όσο λεπτότερη είναι η αρχική διαμέριση, δηλαδή $|\Delta x| \to 0$, τόσο πιο κοντά στην πραγματική τιμή του όγκου του στερεού είναι η προσεγγιστική τιμή του αθροίσματος των στοιχειωδών όγκων ΔV_i. Ορίζουμε, με τον τρόπο αυτό, τον **όγκο του στερεού από περιστροφή** γύρω από τον άξονα $x'0x$ να είναι

$$V=\lim_{|\Delta x|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\lim_{|\Delta x|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\big(f(w_i)\big)^2\,\Delta x \qquad (8.1.5)$$

Επειδή, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\, b]$ προκύπτει ότι και η f^2 είναι συνεχής στο $[a,\, b]$. Επομένως, το παραπάνω όριο υπάρχει και ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx$, το οποίο διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 8.1.5. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ με

$$f(x)\geq 0\text{, για κάθε } x\in[a,\, b].$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, και ο **όγκος** του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'0x$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, είναι

$$V=\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx\,. \qquad (8.1.6)$$

Ανάλογα, αν $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[c,d]$ επί του άξονα $y'0y$ με

$$g(y)\geq 0\text{, για κάθε } y\in[c,\, d].$$

Ο **όγκος** του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'0y$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $x=g(y)$ και τις οριζόντιες ευθείες $y=c$ και $y=d$, είναι

$$V=\int_c^d \pi\big(g(y)\big)^2\,dy\,. \qquad (8.1.7)$$

Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ με

$$0\leq g(x)\leq f(x)\text{, για κάθε } x\in[a,\, b].$$

Ο **όγκος** του στερεού, που προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'0x$ της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y=f(x)$, $y=g(x)$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$, είναι

$$V=\int_a^b \pi\big(f^2(x)-g^2(x)\big)dx\,. \qquad (8.1.8)$$

Παράδειγμα 8.1.6

i) Να υπολογισθεί ο όγκος V ενός βαρελιού σε μονάδες κυβικών μέτρων (κ.μ.), που σχηματίζεται περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα $x'0x$ την επίπεδη περιοχή, που περικλείεται από τη συνάρτηση $y=f(x)=2-x^2$ και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$.

ii) Θέτοντας $\Delta x=\dfrac{2}{n}$, να υπολογίσετε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann , Vn, που προσεγγίζει τον όγκο του βαρελιού με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς αυξάνει το n. Να γράψετε μία συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave, που να υπολογίζει το Vn για ποικίλες τιμές του n, και να εκτιμήσετε, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n, ώστε το Vn να προσεγγίζει τον ακριβή όγκο V με ακρίβεια τουλάχιστον έξι δεκαδικών ψηφίων.

Αρχικά παρατηρήστε ότι, η συνεχής συνάρτηση $f(x)=2-x^2$ είναι **θετική** για κάθε $x\in[-1,1]$, επομένως το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο, δηλαδή, η περιστροφή της $f(x)=2-x^2$ γύρω από τον άξονα $x'0x$ δημιουργεί κάποιο στερεό, το βαρέλι.

Επομένως, το βαρέλι έχει κυκλική άνω και κάτω βάση ακτίνας 1 μέτρου, έχει συνολικό ύψος 2 μέτρα και μέγιστη κυκλική διατομή ακτίνας 2 μέτρων. Χωρίζοντας το βαρέλι σε λεπτές «φέτες» παράλληλες προς τη βάση του και κάθετες τον άξονα $x'0x$, δημιουργούνται κυκλικοί δίσκοι ακτίνας $y=f(x)=2-x^2$, το δε ύψος κάθε «φέτας» είναι Δx. Καθώς $\Delta x\to 0$, ο όγκος του βαρελιού δίνεται από τη σχέση (8.1.5)

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\left(f(w_i)\right)^2\Delta x=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2\,dx=\pi\left(\int_{-1}^{0}(2-x^2)^2\,dx+\int_{0}^{1}(2-x^2)^2\,dx\right),$$

και λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα $y'0y$ τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα αναφέρονται σε στερεά ίσου όγκου, οπότε έχουμε:

$$V=2\pi\int_0^1(2-x^2)^2\,dx=2\pi\int_0^1(4-4x^2+x^4)dx=2\pi\left[4x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=2\pi\left(4-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{86}{15}\pi=18.0117978805$$

Άρα, ο όγκος του βαρελιού είναι $V=18.0117978805$ κ.μ.

Όπως στην Παρατήρηση 7.6.4, κάνοντας κανονική διαμέριση του διαστήματος $[-1,1]$, μήκους $\Delta x=\dfrac{2}{n}$, για το $w_i\in[x_{i-1},x_i]\subseteq[-1,1]$, $i=1,2,\ldots,n$ μπορούμε να επιλέξουμε $w_i=x_{i-1}=-1+(i-1)\Delta x=-1+\dfrac{2i-2}{n}$, με $x_0=-1$. Τότε η συνάρτηση γράφεται $f(w_i)=2-\left(-1+\dfrac{2i-2}{n}\right)^2$, οπότε χρησιμοποιώντας Matlab/Octave δημιουργούμε την ακόλουθη συνάρτηση (function) για να υπολογίζει την τιμή του αθροίσματος

$$Vn=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(w_i)\right)^2\Delta x=\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2-\left(-1+\frac{2i-2}{n}\right)^2\right)^2.$$

Παρατηρήστε ότι, η Vn εξαρτάται μόνο από το n (και μάλιστα αντιστρόφως ανάλογα), οπότε Vn θα προσεγγίζει τον όγκο V του βαρελιού με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς θα αυξάνει το n .

```
function [Vn]=volumebarrel(n)

s=0;
    for i=1:n
        s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
        s=s+s1;
    end
Vn=2*pi*(1/n)*s;
end
```

Εκτελώντας την παραπάνω συνάρτηση για κατάλληλες τιμές του n προέκυψαν οι αντίστοιχες τιμές για τον όγκο Vn, όπως παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

n = 100	Vn = 18.0109600890
n = 500	Vn = 18.0117643702
n = 1000	Vn = 18.0117895029
n = 2000	Vn = 18.0117957861
n = 3000	Vn = 18.0117969497

```
n = 3084          Vn = 18.0117969997
n = 3085          Vn = 18.0117970003
```

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για τιμές του $n \gg 3085$ διαπιστώνουμε ότι η προσεγγιστική τιμή του όγκου Vn στα πρώτα έξι δεκαδικά ψηφία δεν μεταβάλλεται. Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του n, που προσεγγίζει την τιμή του όγκου V με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων είναι $n = 3085$.

Παρατήρηση: Αν δεν γνωρίζαμε τον όγκο V (θεωρητική λύση του προβλήματος) και χρειαζόταν να τον υπολογίσουμε, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα Riemann για διαδοχικές τιμές του n, μέχρι η διαφορά δύο διαδοχικών αθροισμάτων να γίνει μικρότερη ή ίση από μια τιμή ε.

Στη συνάρτηση που ακολουθεί, γραμμένη για Matlab/Octave, εισάγουμε την επιθυμητή τιμή ε (`epsilon`) και με βάση αυτήν υπολογίζεται το άθροισμα Riemann, προσεγγιστική τιμή του όγκου (Vn), γίνεται ο έλεγχος δύο διαδοχικών αθροισμάτων (`Vnprev`, Vn) και όταν η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη από ε, τότε ο αλγόριθμος σταματά και εμφανίζονται η τιμή του n, καθώς και η τιμή του Vn.

```
function [Vn]=volumebarrel2(epsilon)

n=1;
s=0;
    for i=1:n
        s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
        s=s+s1;
    end
Vn=2*pi*(1/n)*s;
d=Vn;
Vnprev=Vn;

while d>epsilon
  n=n+1;
  s=0;
    for i=1:n
        s1=(2-(-1+(2*i-2)/n)^2)^2;
        s=s+s1;
    end
  Vn=2*pi*(1/n)*s;
  d=Vn-Vnprev;
  Vnprev=Vn;

 end
   display(n);
end
```

Εκτελώντας την παραπάνω συνάρτηση για `epsilon` $=10^{-6}$ προκύπτει η απάντηση:

```
n = 257           Vn = 18.0116710409
```

◊◊

Εφαρμογή 8.1.7.

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή

i) γύρω από τον άξονα $y'0y$ της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $y=x^3$ τον άξονα $y'0y$ και την ευθεία $y=3$.

ii) γύρω από τον άξονα $x'0x$ της περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y^2=8x$.

iii) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=6x-x^2$ και $g(x)=x^2-2x$.

Απόδειξη:

i) Η περιοχή, που περιστρέφεται, περικλείεται από τις οριζόντιες ευθείες $y=0$ και $y=3$ τον άξονα $y'0y$ και την καμπύλη $x=\sqrt[3]{y}$. Σύμφωνα με τον τύπο (8.1.7) ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V=\int_0^3 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy=\pi\int_0^3 y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{3}{5}\pi\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^3=\frac{9\sqrt[3]{9}\pi}{5} \text{ κυβικές μονάδες (κ.μ.).}$$

ii) Η περιοχή, που περιστρέφεται, περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο παραβολών $y=x^2$ και $y^2=8x$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία $(0,0)$ και $(2,4)$. Υπενθυμίζεται ότι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} y&=x^2\\ y^2&=8x \end{aligned}$$

δίνει τα σημεία τομής των παραπάνω παραβολών. Επίσης, αν θέσουμε $f^2(x)=x^4$ και $g^2(x)=8x$, μπορούμε να γράψουμε:

$$g^2(x)-f^2(x)=8x-x^4=x\left(8-x^3\right)=x\left(2^3-x^3\right)=x(2-x)\left(x^2-2x+4\right)$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα του γινομένου στην $g^2(x)-f^2(x)$ παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$ ... 0	0 ... 2	2 ... $+\infty$
x	−	+	+
$2-x$	+	+	−
x^2-2x+4	+	+	+
$g^2(x)-f^2(x)$	−	+	−

Είναι φανερό ότι

$$g^2(x)-f^2(x)=8x-x^4\geq 0,\ \text{για } 0\leq x\leq 2.$$

Επομένως, από τον τύπο (8.1.8) έχουμε:

$$V=\int_0^2 \pi\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx=\pi\int_0^2\left(8x-x^4\right)dx=\pi\left[\frac{8x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{48\pi}{5} \text{ κ.μ.}$$ ◊◊

8.1.3. Μήκος καμπύλης

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, της οποίας η παράγωγος f' είναι συνεχής στο $[a,b]$. Μία τέτοια συνάρτηση λέγεται **λεία** (smooth) στο $[a,b]$. Πάνω στην καμπύλη $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, θεωρούμε δύο σημεία $A\left(a,f(a)\right)$ και $B\left(b,f(b)\right)$. Αναζητούμε να υπολογίσουμε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

Θεωρούμε μία διαμέριση του $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

μήκους $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όπου, για $1\le i\le n$, στο x_i αντιστοιχεί το σημείο $P_i\left(x_i, f(x_i)\right)$ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, στο x_0 το σημείο A και στο x_n το B. Τότε, είναι γνωστό ότι, το μήκος $\left|P_{i-1}P_i\right|$ είναι

$$\left|P_{i-1}P_i\right| = \sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2 + \left(\Delta y_i\right)^2}\ ,$$

όπου $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Εφόσον η f είναι μία λεία συνάρτηση στο $[a,b]$, έπεται ότι υπάρχει η f' σε κάθε υποδιάστημα $\left[x_{i-1},x_i\right]$ και από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλέπε, Θεώρημα 6.1.3)

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'\left(w_i\right),\ \text{για κάποιο } w_i \in \left[x_{i-1},x_i\right].$$

Επομένως,

$$\left|P_{i-1}P_i\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\left|\Delta x_i\right| = \sqrt{1+\left(f'\left(w_i\right)\right)^2}\left|\Delta x_i\right|.$$

Το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n}\left|P_{i-1}P_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'\left(w_i\right)\right)^2}\left|\Delta x_i\right|$$

προσεγγίζει το ζητούμενο μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και μάλιστα η προσέγγιση αυτή γίνεται καλύτερη, όταν η διαμέριση έχει μήκος $\Delta x \to 0$, όπου $\Delta x = \max\left\{\left|\Delta x_i\right| : 1\le i\le n\right\}$, (βλέπε, Ορισμός 7.6.1). Ορίζουμε το μήκος του $\overset{\frown}{AB}$ ως το

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'\left(w_i\right)\right)^2}\,\Delta x\right),$$

όταν το όριο υπάρχει. Επίσης, επειδή η συνάρτηση $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ υπάρχει και είναι ίσο με το παραπάνω όριο.

Ορισμός 8.1.8. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Το **μήκος *l* του τόξου της καμπύλης** $y=f(x)$ από το σημείο $A\left(a, f(a)\right)$ ως το σημείο $B\left(b, f(b)\right)$ είναι:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad (8.1.9)$$

Ανάλογα, αν $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[c,d]$ επί του άξονα $y'0y$, το **μήκος *l* του τόξου της καμπύλης** $x=g(y)$ από το σημείο $y=c$ ως το σημείο $y=d$ είναι:

$$l = \int_c^d \sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy \qquad (8.1.10)$$

Παραδείγματα 8.1.9.
Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

i) $y = x^{\frac{3}{2}}$ από το σημείο $(1,1)$ ως το σημείο (4, 8).
ii) $y=\cosh(x)$ από το σημείο $(0,1)$ ως το σημείο $(1,\cosh(1))$.

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ είναι λεία στο $[1,4]$. Εφόσον $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, το μήκος του τόξου της καμπύλης υπολογίζεται από τον τύπο (8.1.9) και είναι:

$$l=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx$$

Θέτουμε $1+\frac{9x}{4}=t$, οπότε $dx=\frac{4}{9}dt$ και $\sqrt{1+\frac{9x}{4}}=t^{\frac{1}{2}}$. Το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{4}{9}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{4}{9}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}+c\,,\; c\in\mathbb{R}\,.$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στο μήκος τόξου l προκύπτει:

$$l=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}+c\right]_1^4=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-\frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}\right)=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-\frac{13\sqrt{13}}{8}\right)$$

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\cosh(x)$ είναι λεία στο διάστημα $[0,1]$ και $(\cosh(x))'=\sinh(x)$, καθώς και $1+\sinh^2(x)=\cosh^2(x)$, (βλέπε, Πίνακα 5.2 και Εφαρμογή 1.6.16 (i), αντίστοιχα). Επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(x)\geq 1\Rightarrow|\cosh(x)|=\cosh(x)$, και $\int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.6.6 (ii), και Πίνακα 7.1.10, αντίστοιχα). Επομένως, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις στον (8.1.9) το ζητούμενο μήκος τόξου της καμπύλης είναι:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left[(\cosh(x))'\right]^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\sinh^2(x)}dx=\int_0^1|\cosh(x)|\,dx=\int_0^1\cosh(x)\,dx=[\sinh(x)]_0^1=\frac{e^2-1}{2e}.\quad\Diamond\Diamond$$

Εφαρμογή 8.1.10. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Το **διαφορικό** ds **του τόξου της καμπύλης** $y=f(x)$ δίνεται:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{8.1.11}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$s(x)=\int_a^x\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt\,,$$

η οποία δίνει το μήκος του τόξου της καμπύλης $y=f(x)$ από το σημείο $(a,f(a))$ ως το σημείο $(x,f(x))$, για κάποιο $x\in[a,b]$. Σύμφωνα με το θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, Θεώρημα 7.6.8.) και την (7.6.12) έχουμε

$$s'(x)=\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\Rightarrow ds=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,,$$

και από $y=f(x)$, η απόδειξη του τύπου στην (8.1.11) ολοκληρώνεται. ◊◊

8.2 Εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος σε Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών με πάρα πολλές εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα διαφόρων προβλημάτων, που παρουσιάζονται στις Φυσικές, Βιολογικές και Κοινωνικές Επιστήμες, για παράδειγμα, ο νόμος του Νεύτωνα $F(x)=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ είναι η πρώτη διαφορική εξίσωση στην ιστορία, η κίνηση σώματος αναρτημένου σε ελατήριο, η ένταση του ρεύματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, η κατανομή θερμοκρασίας σε μία ράβδο, η μετατόπιση ορόφων ενός κτηρίου σε σεισμό, τα λογιστικά μοντέλα και μοντέλα επενδύσεων κεφαλαίων κ.α. Αρκετά παραδείγματα εφαρμογών, στη μηχανική, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στα φαινόμενα ψύξης-θέρμανσης, στη ροή των ρευστών, στην ταχύτητα των χημικών αντιδράσεων, στα πληθυσμιακά μαθηματικά πρότυπα, στην ιατρική, στην οικονομία, στην ψυχολογία, στην εκπαίδευση, κ.α. και από άλλους τομείς των επιστημών, αναπτύσσονται αναλυτικά (Σιαφαρίκας, 2014).

Ορισμός 8.2.1. Έστω $x\in A$ με $A\subseteq\mathbb{R}$ και $y\colon A\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Η εξίσωση

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n)}(x)\right)=0, \tag{8.2.1}$$

που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή x με την **άγνωστη** συνάρτηση y και τις παραγώγους $y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n)}(x)$ ή τα διαφορικά $dy, d^2y,\ldots, d^ny$ αυτής μέχρι n τάξης, ονομάζεται **πραγματική συνήθης διαφορική εξίσωση** (ordinary differential equation) ***n* τάξης**.

Ο φυσικός αριθμός, ο οποίος δηλώνει τη μεγαλύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης y στη διαφορική εξίσωση, ονομάζεται **τάξη** της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Όταν έχουμε εξισώσεις, που συνδέουν συναρτήσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές και τις μερικές παραγώγους αυτών, τις ονομάζουμε *διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους* ή *μερικές διαφορικές εξισώσεις* (partial differential equations). Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης στην παρούσα ενότητα, οπότε στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τον όρο διαφορική εξίσωση αναφερόμαστε μόνο σε συνήθη διαφορική εξίσωση.

Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι:

$$y'(x)-y(x)=1 \tag{8.2.2}$$

$$(1+x)dx-x^2y(x)dy=0 \tag{8.2.3}$$

$$3y(x)y'(x)+y^2(x)+x^2=0 \tag{8.2.4}$$

$$y''(x)+9y(x)=5\sin(x) \tag{8.2.5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y(x)=2e^x \tag{8.2.6}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις στις (8.2.2)-(8.2.4) είναι πρώτης τάξης, ενώ οι (8.2.5), (8.2.6) είναι δεύτερης τάξης.

Ορισμός 8.2.2. Η συνήθης διαφορική εξίσωση *n* τάξης στην (8.2.1), αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y^{(n)}(x)=f\left(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x)\right), \tag{8.2.7}$$

ονομάζεται **κανονική μορφή** ή **λυμένη μορφή** της (8.2.1).

Σύμφωνα με τους Ορισμούς 8.2.1 και 8.2.2, μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει τη μορφή $F(x, y(x), y'(x))=0$ ή $y'(x)=f(x, y(x))$.

Τα παραπάνω παραδείγματα στην (8.2.2) και στην (8.2.3) γράφονται αντίστοιχα:

$$F(x, y(x), y''(x)) = y'(x) - y(x) - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad y'(x) = y(x) + 1 = f(x, y(x))$$

$$1 + x - x^2 y(x)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F(x, y(x), y'(x)) = 1 + x - x^2 y(x) y'(x) = 0$$

ή $\quad y'(x) = \dfrac{1+x}{x^2 y(x)} = f(x, y(x))$, όταν $x^2 y(x) \neq 0$.

Κατά τη διαδικασία επίλυσης μίας διαφορικής εξίσωσης σκοπός είναι να υπολογισθεί ο τύπος της συνάρτησης y, ο οποίος να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση. Μία τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Πριν προχωρήσουμε στον αυστηρό ορισμό της λύσης της διαφορικής εξίσωσης, ας δούμε ένα παράδειγμα. Η συνάρτηση $y(x) = \sin(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

επειδή

$$y''(x) = -\sin(x) \quad \text{και} \quad y''(x) + y(x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0.$$

Επίσης, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι και η συνάρτηση $y(x) = \cos(x)$ αποτελεί λύση της $y''(x) + y(x) = 0$.

Για τη διαφορική εξίσωση $y''(x) = 0$ έχουμε (με πρώτη ολοκλήρωση) ότι $y'(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, και (με δεύτερη ολοκλήρωση)

$$y(x) = \int c_1 dx = c_1 x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η **λύση** της διαφορικής εξίσωσης $y''(x) = 0$ είναι η $y(x) = c_1 x + c_2$, η οποία για διαφορετικά $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ δίνει άπειρες λύσεις. Επομένως, η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης **δεν είναι μοναδική**.

Ορισμός 8.2.3. Γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης ορισμένη στο διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$, όπως στην (8.2.1), ονομάζεται η πραγματική συνάρτηση

$$y(x) = y\left(x, c_1, c_2 ..., c_n\right),$$

η οποία περιέχει n αυθαίρετες σταθερές $c_1, c_2 ..., c_n$, και έχει παραγώγους μέχρι n τάξης, που ορίζονται στο A, η δε διαφορική εξίσωση επαληθεύεται ταυτοτικά για κάθε $x \in A$ μετά από την αντικατάσταση της γενικής λύσης καθώς και των παραγώγων της.

Μία λύση, που προκύπτει από τη γενική λύση για μία συγκεκριμένη n-αδα των αυθαίρετων σταθερών, ονομάζεται **μερική λύση** της διαφορικής εξίσωσης.

- Όταν το διάστημα A είναι της μορφής $[x_0, a)$ ή $[x_0, a]$ ή $[x_0, +\infty)$ και αναζητείται η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης, που είναι ορισμένη στο A, και για κάποια γνωστά $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες n συνθήκες

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ y''(x_0) &= y_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

  τότε λέμε ότι πρόκειται για ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**[1] (initial value problem) ή **πρόβλημα αρχικών συνθηκών** ή **πρόβλημα Cauchy**.

[1] Ο χαρακτηρισμός «πρόβλημα αρχικών τιμών» οφείλεται στο γεγονός ότι συχνά η ανεξάρτητη μεταβλητή του προβλήματος είναι ο χρόνος, η αρχική συνθήκη ορίζει την κατάσταση στην αρχική στιγμή του και η λύση της διαφορικής εξίσωσης περιγράφει τι συμβαίνει οποιαδήποτε χρονική στιγμή αργότερα.

- Όταν $A=[a,b]$ και αναζητείται η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης, που είναι ορισμένη στο A και ικανοποιεί συνθήκες οι οποίες αναφέρονται στα άκρα του διαστήματος $A=[a,b]$, τότε λέμε ότι πρόκειται για ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών** (boundary value problem).

Παρατήρηση 8.2.4.
i) Όπως έχουμε αναφέρει στην Ενότητα 1.1. μία συνάρτηση y είναι γνωστή, όταν ο τύπος που δίνει την εικόνα $y(x)$ είναι γνωστός, όπου x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Επομένως, στη συνέχεια, κατά τη διαδικασία υπολογισμού της γενικής (ή μερικής) λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης θα γράφουμε y και όταν αποκτούμε τη λύση θα την γράφουμε με τον τύπο της, δηλαδή $y(x)$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, για να μην δημιουργείται σύγχυση στον αναγνώστη στη συνέχεια, θα μπορούσαμε να ξαναγράψουμε τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης από την (8.2.1) ως $F(x,y,y'(x))=0$, και την κανονική μορφή της από την (8.2.7) ως

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=f(x,y)\,. \tag{8.2.8}$$

ii) Η γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης n τάξης περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της, δηλαδή n. Αυτές υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος, που προκύπτει, όταν δοθούν αρχικές συνθήκες, που σε πλήθος πρέπει να είναι τόσες όσες και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή n.
iii) Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση εφόσον η συνάρτηση f στην (8.2.7) είναι συνεχής σε μία περιοχή B του σημείου $A_0(x_0,y(x_0),y'(x_0),\ldots,y^{(n-1)}(x_0))$. Επιπλέον, αν η συνάρτηση f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους στην περιοχή B, τότε η μερική λύση είναι μοναδική, (βλέπε, Θεώρημα 3.2.1., (Σιαφαρίκας, 2014)).
iv) Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν έχει πάντοτε λύση ή αν έχει, αυτή μπορεί να μην είναι μοναδική.
v) Η γραφική παράσταση της γενικής λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** ή γραμμή της διαφορικής εξίσωσης.
vi) Σε μερικές περιπτώσεις η γενική λύση μίας διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή, $C\left(x,y(x)\right)=0$, επειδή δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί η ισότητα $C\left(x,y(x)\right)=0$ ως προς $y(x)$.

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται, συνήθως, ανάλογα με την τάξη τους ή με το αν είναι γραμμικές, (βλέπε, Ορισμός 8.2.10) ή μη-γραμμικές. Για όλες τις κατηγορίες των διαφορικών εξισώσεων είναι δύσκολο να αναπτυχθεί μία μεθοδολογία για τον υπολογισμό της γενικής λύσης, και σε ορισμένες περιπτώσεις και μεθοδολογία να υπάρχει η επίλυση δεν είναι εύκολη, οπότε τότε αναζητούμε αριθμητικές λύσεις, το οποίο ξεφεύγει από τους σκοπούς μας. Ακόμη και οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης οδηγούν σε σύνθετους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων, τότε χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για να προσεγγίσουν τη μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης, περισσότερα για τις μεθόδους ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει (Βραχάτης, 2011; Σαρρής & Καρακασίδης, 2014; Chapra, S. C., & Canale, R. P. 2014). Εδώ, ως εφαρμογές των αόριστων ολοκληρωμάτων, αναφέρουμε τις ακόλουθες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

- Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και ως εφαρμογή της είναι
  - η ομογενής διαφορική εξίσωση.
- Γραμμική διαφορική εξίσωση και ως εφαρμογή της είναι
  - η διαφορική εξίσωση του Bernoulli.

8.2.1. Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και Ομογενής διαφορική εξίσωση

Ορισμός 8.2.5. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης στην κανονική μορφή της, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται διαφορική εξίσωση **χωριζόμενων μεταβλητών**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x) = f(x,y) = \frac{P(x)}{Q(y)}, \tag{8.2.9}$$

ισοδύναμα

$$P(x)\,dx - Q(y)\,dy = 0,$$

όπου $P(x)$, $Q(y)$ είναι συναρτήσεις του x και του y, αντίστοιχα.

Επειδή από την ισοδύναμη μορφή της (8.2.9) μπορούμε να γράψουμε

$$Q(y)\,dy = P(x)\,dx \tag{8.2.10}$$

είναι φανερό ότι ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (8.2.10) αποκτούμε τη γενική λύση της (8.2.9). Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών υπολογίζεται από την ακόλουθη ισότητα:

$$\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx$$

Παρατηρήστε ότι, το κάθε μέλος της ισότητας στην (8.2.10) είναι συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής, στο γεγονός αυτό οφείλεται ο χαρακτηρισμός αυτής της κατηγορίας των διαφορικών εξισώσεων.

Παραδείγματα 8.2.6.
Να υπολογισθεί η λύση (γενική ή μερική) σε κάθε μία από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:
i) $xy'(x) + y^2(x) = 0$.
ii) $y'(x) + y^2(x)e^x = 0$, όταν $y(0) = 1$.
i) Αρχικά παρατηρούμε ότι για $x = 0$, η διαφορική εξίσωση έχει λύση την $y(0) = 0$, άρα το σημείο $(0,0)$ συμπεριλαμβάνεται στη λύση.
Στη συνέχεια θεωρούμε $x \neq 0$. Σύμφωνα με τα σχόλια στην Παρατήρηση 8.2.4. (i) η διαφορική εξίσωση $xy'(x) + y^2(x) = 0$ γράφεται $xy'(x) + y^2 = 0$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$xy'(x) + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x}dx$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη στην τελευταία ισότητα, το καθένα ως προς τη δική του μεταβλητή, προκύπτει:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{y} + c_1 = \ln|x| + c_2 \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x| + c_3,$$

όπου $c_3 = c_2 - c_1$. Θέτουμε $c_3 = \ln c$, για κάποιο c θετικό πραγματικό αριθμό και από τη γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων έχουμε

$$\frac{1}{y} = \ln|x| + c_3 \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x| + \ln c = \ln|cx| \Rightarrow y = \frac{1}{\ln|cx|} \Rightarrow y = y(x) = \frac{1}{\ln|cx|},\ c \in \mathbb{R},$$

η οποία αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, όταν $x \neq 0$.
Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη συνάρτηση:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln|cx|}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, από την ολοκλήρωση και των δύο μελών προκύπτουν δύο αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες ουσιαστικά είναι μία (επειδή πράξεις μεταξύ σταθερών είναι σταθερός αριθμός). Η γενική λύση περιέχει μία αυθαίρετη σταθερά, όση είναι και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης, γεγονός που επιβεβαιώνει το σχόλιο στην Παρατήρηση 8.2.4 (ii).

ii) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x)+y^2e^x=0$ σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i), είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$y'(x)+y^2e^x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-y^2e^x \Rightarrow -\frac{dy}{y^2}=e^x dx,$$

η οποία είναι της μορφής όπως στην (8.2.10). Επομένως, η γενική λύση προκύπτει μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη ως εξής:

$$-\int \frac{dy}{y^2}=\int e^x dx \Rightarrow \frac{1}{y}=e^x+c \Rightarrow y=y(x)=\frac{1}{e^x+c}.$$

Συνδυάζοντας τη γενική λύση

$$y(x)=\frac{1}{e^x+c}$$

με την αρχική συνθήκη $y(0)=1$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς c, για την οποία έχουμε:

$$1=\frac{1}{e^0+c}=\frac{1}{1+c} \Rightarrow c=0$$

Επομένως, η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(x)+y^2(x)e^x=0$, που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0)=1$ είναι

$$y(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}.$$

Υπενθυμίζεται ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση, επειδή διατυπώνεται με αρχική συνθήκη αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, (βλέπε, Ορισμός 8.2.3.). ◊◊

Εφαρμογή 8.2.7. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται **ομογενής**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x)=f(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8.2.11}$$

όταν, δηλαδή, η $y'(x)$ είναι συνάρτηση του πηλίκου $\dfrac{y}{x}$.

Κάθε ομογενής διαφορική εξίσωση ανάγεται σε μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $u=u(x)$, αν θέσουμε

$$u=\frac{y}{x}. \tag{8.2.12}$$

Απόδειξη: Από την (8.2.12) η συνάρτηση $y=y(x)$ μπορεί να γραφεί $y=xu$, οπότε παραγωγίζοντάς την κατά μέλη και εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγώγου του γινομένου συναρτήσεων, προκύπτει:

$$y'(x)=x'u(x)+xu'(x) \Leftrightarrow y'(x)=u+xu'(x) \tag{8.2.13}$$

Χρησιμοποιώντας τις (8.2.13) και (8.2.12) σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.11), αυτή γράφεται:

$$y'(x)=f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u+xu'(x)=f(u) \Rightarrow xu'(x)=f(u)-u$$

Υποθέτοντας ότι $x\neq 0$, η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί $u'(x)=\dfrac{f(u)-u}{x}$, η οποία είναι της μορφής (8.2.9), δηλαδή, είναι διαφορική εξίσωση των χωριζόμενων μεταβλητών x,u. ◊◊

Παραδείγματα 8.2.8.
Να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $2xy(x)\,y'(x)=x^2+3y^2(x)$, όταν $x\neq 0$.

ii) $x^3dy+\left(y^3(x)-x^2y(x)\right)dx=0$, όταν $x\neq 0$.

i) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i) η διαφορική εξίσωση γράφεται $2xy\,y'(x)=x^2+3y^2$, την οποία λύνουμε ως προς $y'(x)$ και έχουμε:

$$y'(x)=\frac{x^2+3y^2}{2xy} \tag{8.2.14}$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $y\neq 0$, διότι αν υποθέσουμε ότι $y=0$, η διαφορική εξίσωση δίνει $x=0$, που είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή του δεξιού μέλους της ισότητας στην (8.2.14) δια x^2, ($x\neq 0$), οπότε προκύπτει

$$y'(x)=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

δηλαδή, πρόκειται για μία ομογενή διαφορική εξίσωση, σύγκρινε με την (8.2.11). Από τις (8.2.12) και (8.2.13) παράγεται

$$u+xu'(x)=\frac{1+3u^2}{2u}\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}\Leftrightarrow\frac{2u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx \tag{8.2.15}$$

η οποία είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς τη συνάρτηση $u=u(x)$. Μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη της (8.2.15) έχουμε

$$\int\frac{2u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\ln\left(u^2+1\right)=\ln|xc|\Rightarrow u^2+1=|xc|\Rightarrow u^2=|xc|-1,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Η γενική λύση προκύπτει από την παραπάνω και την (8.2.12)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=|xc|-1\Rightarrow y^2=x^2(|xc|-1),\quad c\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η γενική λύση (ολοκληρωτική καμπύλη) της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$$x^2+y^2(x)=x^2|xc|,\ c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση. Στο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (8.2.15) διαδοχικά μπορούμε να γράψουμε

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c_1=\ln|x|+\ln|c|=\ln|xc|,$$

όπου $c_1=\ln|c|$, $c\in\mathbb{R}$.

ii) Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, $x\neq 0$, η δοθείσα διαφορική εξίσωση $x^3dy+\left(y^3(x)-x^2y(x)\right)dx=0$ σημειώνεται $x^3dy+\left(y^3-x^2y\right)dx=0$ σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.4. (i), και γράφεται:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y-y^3}{x^3}\Rightarrow y'(x)=\frac{x^2y}{x^3}-\frac{y^3}{x^3}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^3=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Συνεπώς, πρόκειται για μία ομογενή διαφορική εξίσωση. Από τις (8.2.12) και (8.2.13) παράγεται

$$u+xu'(x)=u-u^3\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=-u^3\Leftrightarrow\frac{1}{u^3}du=-\frac{1}{x}dx,$$

η οποία είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως,

$$\int\frac{1}{u^3}du=-\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow-\frac{1}{2u^2}=-\ln|x|+c_1\Rightarrow-\frac{1}{2u^2}=-\ln|x|+\ln|c|\Rightarrow-\frac{1}{2u^2}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|\Rightarrow-\frac{x^2}{2y^2x}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|,\ c\in\mathbb{R}.$$

Η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι $-\dfrac{x^2}{2y^2(x)}=\ln\left|\dfrac{c}{x}\right|$, $c\in\mathbb{R}$. ◊◊

Παρατήρηση 8.2.9.
Υποθέτουμε ότι μία ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει ως κανονική μορφή:

$$y'(x) = f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ έχουν την εξής ιδιαιτερότητα: αν για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ οι μεταβλητές x, y αντικατασταθούν με τις λx και λy, αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y) \quad \text{και} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y), \tag{8.2.16}$$

δηλαδή, το πηλίκο $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ παραμένει αμετάβλητο μετά από την παραπάνω αντικατάσταση.
Συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα στην (8.2.16) λέγονται **ομογενείς βαθμού *n***.
Στο Παράδειγμα 8.2.8 (ii) παρατηρήστε ότι, αν στις συναρτήσεις $P(x,y) = x^2 y - y^3$ και $Q(x,y) = x^3$ αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές x, y με τις λx και λy, αντίστοιχα, τότε έχουμε

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 \lambda y - (\lambda y)^3 = \lambda^3 x^2 y - \lambda^3 y^3 = \lambda^3 \left(x^2 y - y^3\right) = \lambda^3 P(x,y),$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 = \lambda^3 x^3 = \lambda^3 Q(x,y),$$

δηλαδή, οι $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ομογενείς βαθμού 3 και το πηλίκο $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ είναι επίσης μία ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού.
Ανάλογα, στο Παράδειγμα 8.2.8 (i) οι αντίστοιχες συναρτήσεις $P(x,y) = x^2 + 3y^2$ και $Q(x,y) = 2xy$ είναι ομογενείς βαθμού 2.

8.2.2. Γραμμική διαφορική εξίσωση και διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Ορισμός 8.2.10. Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.8), ονομάζεται **γραμμική**, όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y'(x) = f(x,y) = -a(x)y + b(x)$$

ισοδύναμα

$$y'(x) + a(x)y = b(x) \tag{8.2.17}$$

όπου $a(x), b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x.
Όταν $b(x) = 0$, τότε η (8.2.17) ονομάζεται **ομογενής** γραμμική διαφορική εξίσωση.
Όταν $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$, τότε η (8.2.17) ονομάζεται γραμμική διαφορική εξίσωση με **σταθερούς συντελεστές**.

Για παράδειγμα, οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές:

- $y'(x) - y(x) = 1$, με $a(x) = -1$, $b(x) = 1$, δηλαδή, πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.
- $y'(x) - y(x) = \sin(x)$, με $a(x) = -1$, $b(x) = \sin(x)$.
- $y'(x) - 3xy(x) = x^3$, με $a(x) = -3x$, $b(x) = x^3$.
- $xy'(x) = 1 + x^3 + y(x) \Leftrightarrow y'(x) - \dfrac{1}{x} y(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$, αν $x \neq 0$, με $a(x) = -\dfrac{1}{x}$, $b(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$.

Εφαρμογή 8.2.11. Η **γενική λύση** μίας **γραμμικής** διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, όπως στην (8.2.17), είναι

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c\right], \quad c \in \mathbb{R}. \tag{8.2.18}$$

Απόδειξη: Αρχικά αναζητούμε μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(x) + a(x)y = 0$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επειδή γράφεται ισοδύναμα:

$$y'(x) = -a(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -a(x)dx$$

Επομένως, η γενική λύση της προκύπτει μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη και είναι

$$\ln|y| = -\int a(x)dx + c_1 \Rightarrow |y| = e^{-\int a(x)dx + c_1} \Rightarrow y = y(x) = \pm e^{c_1} e^{-\int a(x)dx}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $c_2 = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_2\, e^{-\int a(x)dx}, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.2.19}$$

Υποθέτουμε ότι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης στην (8.2.17) είναι της μορφής

$$y(x) = c_3(x)e^{-\int a(x)dx}, \tag{8.2.20}$$

όπου αναζητούμε να προσδιοριστεί η $c_3(x)$. Η (8.2.20) ως λύση πρέπει να επαληθεύει την (8.2.17), οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
& y'(x) + a(x)y = b(x) \Leftrightarrow \\
& \left(c_3(x)e^{-\int a(x)dx}\right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \Leftrightarrow \\
& c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} + c_3(x)\left(e^{-\int a(x)dx}\right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \Leftrightarrow \\
& c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} + c_3(x)e^{-\int a(x)dx}\left(-\int a(x)dx\right)' + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \Leftrightarrow \\
& c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} - a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)c_3(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \Leftrightarrow \\
& c_3'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με άγνωστη συνάρτηση τη $c_3(x)$, οπότε έχουμε

$$c_3'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx} \Leftrightarrow \frac{dc_3}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx} \Leftrightarrow \int dc_3 = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx \Leftrightarrow c_3 = c_3(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Επομένως, η αντικατάσταση της $c_3(x)$ στην (8.2.20) αποδεικνύει ότι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από την (8.2.18). ◊◊

Παρατηρήσεις 8.2.12.
i) Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x),$$

όπου $p(x), q(x), r(x)$ είναι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x με $p(x) \neq 0$, είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση, επειδή μπορεί να πάρει τη μορφή όπως στην (8.2.17).
Πράγματι,

$$p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r(x)\Rightarrow y'(x)+\frac{q(x)}{p(x)}y(x)=\frac{r(x)}{p(x)}\Rightarrow y'(x)+a(x)y(x)=b(x),$$

όπου $a(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$, $b(x)=\dfrac{r(x)}{p(x)}$.

ii) Η συνάρτηση $g(x)=e^{-\int a(x)dx}$ δεν είναι μοναδική, επειδή εμπεριέχει ένα ολοκλήρωμα. Γενικά

$$g(x)=e^{-\int a(x)dx}=e^{-\int a(x)dx+c}=e^{-\int a(x)dx}e^{c}=c_1e^{-\int a(x)dx},\ c_1\in\mathbb{R}.$$

Για τη λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης θεωρούμε την ευκολότερη περίπτωση, $c=0$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

iii) Ειδικές περιπτώσεις τιμών των $a(x), b(x)$ απλοποιούν τη γραμμική διαφορική εξίσωση $y'(x)+a(x)y=b(x)$ και οδηγούν σε γνωστές γενικές λύσεις.

Συγκεκριμένα, αν $a(x)=0$, τότε έχουμε

$$y'(x)=b(x),$$

που είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Επομένως, η γενική λύση της είναι:

$$\frac{dy}{dx}=b(x)\Rightarrow dy=b(x)dx\Rightarrow\int dy=\int b(x)dx\Rightarrow y=y(x)=\int b(x)dx+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Αν $b(x)=0$, τότε πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (βλέπε, Ορισμός 8.2.10), και η γενική λύση της είναι $y(x)=ce^{-\int a(x)dx}$, $c\in\mathbb{R}$, όπως υπολογίστηκε στην (8.2.19).

Παραδείγματα 8.2.13.

Να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $y'(x)-2xy(x)=x$.

ii) $y'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}y(x)=x^2+1$.

i) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x)-2xy=x$, οπότε είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με $a(x)=-2x$ και $b(x)=x$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, και $b(x)$ στον (8.2.18), έχουμε:

$$y(x)=e^{-\int -2xdx}\left(\int xe^{\int -2xdx}dx+c\right)=e^{2\frac{x^2}{2}}\left(\int xe^{-2\frac{x^2}{2}}dx+c\right)=$$

$$=e^{x^2}\left(\int xe^{-x^2}dx+c\right)=e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}\int\left(e^{-x^2}\right)'dx+c\right)=e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c\right)=-\frac{1}{2}+ce^{x^2},\ c\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση

$$y(x)=ce^{x^2}-\frac{1}{2},\ c\in\mathbb{R}.$$

ii) Η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$, οπότε είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με $a(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ και $b(x)=1+x^2$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ στον (8.2.18) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των λογαρίθμων $e^{k\ln h}=h^k$, για κάθε $h>0$, έχουμε:

$$y(x)=e^{-\int -\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int(1+x^2)e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+c\right)=e^{\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx}\left(\int(1+x^2)e^{-\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx}dx+c\right)=$$

$$=e^{\ln(1+x^2)}\left(\int(1+x^2)e^{-\ln(1+x^2)}dx+c\right)=(1+x^2)\left(\int(1+x^2)(1+x^2)^{-1}dx+c\right)=$$

$$=(1+x^2)\left(\int dx+c\right)=(1+x^2)(x+c)=x^3+x+c(x^2+1),\ c\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = x^3 + x + c(x^2+1), \quad c \in \mathbb{R}. \qquad \Diamond\Diamond$$

Εφαρμογή 8.2.14. Μία **διαφορική εξίσωση Bernoulli** είναι της μορφής

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y^k = 0 \tag{8.2.21}$$

όπου $a(x), b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x και $k \neq 0, 1$.
Κάθε διαφορική εξίσωση Bernoulli ανάγεται σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $u = u(x)$, αν θέσουμε

$$u = y^{1-k}. \tag{8.2.22}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli υπολογίζεται από την

$$y^{1-k}(x) = e^{-\int (1-k)a(x)dx}\left[\int (k-1)b(x)e^{\int (1-k)a(x)dx}dx + c\right], \quad c \in \mathbb{R}. \tag{8.2.23}$$

Απόδειξη: Προφανής λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli είναι η τετριμμένη, δηλαδή, $y(x) = 0$. Θεωρώντας ότι αναζητούμε και μη τετριμμένες λύσεις, παραγωγίζουμε ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x τα δύο μέλη της ισότητας στην (8.2.22), οπότε έχουμε

$$u'(x) = (1-k)y^{-k}y'(x)$$

και αντικαθιστούμε από την (8.2.21) την $y'(x) = -a(x)y - b(x)y^k$, οπότε προκύπτει

$$u'(x) = (1-k)y^{-k}\left(-a(x)\,y - b(x)\,y^k\right) \Rightarrow u'(x) = -(1-k)a(x)y^{1-k} - (1-k)b(x)$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$u'(x) + (1-k)a(x)u = (k-1)b(x),$$

δηλαδή, έχει την έκφραση όπως στην (8.2.17), συνεπώς είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση, της οποίας η γενική λύση ως προς την άγνωστη συνάρτηση $u = u(x)$ δίνεται από την (8.2.18) και είναι της μορφής:

$$u(x) = y^{1-k}(x) = e^{-\int (1-k)a(x)dx}\left[\int (k-1)b(x)e^{\int (1-k)a(x)dx}dx + c\right], \quad c \in \mathbb{R}. \qquad \Diamond\Diamond$$

Παρατήρηση 8.2.15. Η διαφορική εξίσωση Bernoulli στην (8.2.21) για $k = 0$ γράφεται

$$y'(x) + a(x)y + b(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) + a(x)y = -b(x).$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2.10 είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση.
Επίσης, η διαφορική εξίσωση στην (8.2.21) για $k = 1$ γράφεται

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y = 0 \Leftrightarrow y'(x) + \left(a(x) + b(x)\right)y = 0,$$

επομένως, είναι μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, (βλέπε Ορισμός 8.2.10).

Παραδείγματα 8.2.16.
Να λυθούν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:
i) $y'(x) + y(x) - xy^2(x) = 0$.
ii) $y'(x) - y(x) - e^x\sqrt{y(x)} = 0$.
i) Προφανής λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι η τετριμμένη. Αν θεωρήσουμε ότι αναζητούμε μη τετριμμένη λύση ($y(x) \neq 0$), η δοθείσα διαφορική εξίσωση, γράφεται $y'(x) + y - xy^2 = 0$, οπότε είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $a(x) = 1$, $b(x) = -x$, και $k = 2$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ και k στον (8.2.23), έχουμε:

$$y^{-1}(x) = e^{-\int(-1)dx}\left(\int(-x)e^{\int(-1)dx}dx + c\right) =$$
$$= e^{x}\left(\int(-x)e^{-x}dx + c\right) = e^{x}\left(\int x(e^{-x})'dx + c\right) =$$
$$= e^{x}\left(xe^{-x} - \int(x)'e^{-x}dx + c\right) = e^{x}\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx + c\right) = e^{x}\left(xe^{-x} - \int(-e^{-x})'dx + c\right) =$$
$$= e^{x}\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right) = e^{x}\left((x+1)e^{-x} + c\right) = x + 1 + ce^{x},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$y(x) = \frac{1}{x+1+ce^{x}},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

ii) Παρατηρήστε ότι, αναζητούμε λύσεις $y(x) \geq 0$, για να έχει νόημα η δοθείσα διαφορική εξίσωση. Εκτός από την τετριμμένη λύση, η οποία προφανώς επαληθεύει τη δοθείσα διαφορική εξίσωση, θεωρούμε ότι αναζητούμε λύσεις $y(x) > 0$. Επειδή η διαφορική εξίσωση γράφεται $y'(x) - y - e^{x}y^{1/2} = 0$, σύμφωνα με τον (8.2.21), είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $a(x) = -1$, $b(x) = -e^{x}$, και $k = \frac{1}{2}$. Αντικαθιστώντας τα $a(x)$, $b(x)$ και k στον (8.2.23), έχουμε:

$$y^{1/2}(x) = e^{-\int(-1/2)dx}\left(\int(-\frac{1}{2})(-e^{x})e^{\int(-1/2)dx}dx + c\right) =$$
$$= e^{x/2}\left(\int\frac{1}{2}e^{x}e^{-x/2}dx + c\right) = e^{x/2}\left(\int\frac{1}{2}e^{x/2}dx + c\right) =$$
$$= e^{x/2}\left(\int(e^{x/2})'dx + c\right) = e^{x/2}\left(e^{x/2} + c\right) = e^{x} + ce^{x/2},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$y^{1/2}(x) = \left(\sqrt{y(x)}\right) = e^{x} + ce^{x/2},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Τελικά, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = \left(e^{x} + ce^{x/2}\right)^{2},\ \ c \in \mathbb{R}.$$ ◊◊

8.3. Λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η λύση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, είτε πρόκειται για τη γενική λύση της, είτε για τη μερική, δηλαδή την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συμβολική εντολή `dsolve`. Η εντολή είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Συγκεκριμένα, για την επίλυση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, αν με y σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, χρησιμοποιείται η συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθούν τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή όσο και η άγνωστη συνάρτηση. Επίσης, στη σύνταξη της εντολής της διαφορικής εξίσωσης απαιτείται να δηλωθεί η τάξη της παραγώγου, το οποίο σημειώνεται D, όταν πρόκειται για πρώτη παράγωγο ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x, δηλαδή, $\mathrm{D} = \dfrac{d}{dx}$, D2, όταν πρόκειται για δεύτερη παράγωγο, D3, όταν πρόκειται για δεύτερη παράγωγο κ.λ.π.

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να χρησιμοποιείται το D για να δηλωθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή της λύσης.

Για τον υπολογισμό της *γενικής λύσης* μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης η εντολή `dsolve` δέχεται ως είσοδο, με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη διαφορική εξίσωση
- την ανεξάρτητη μεταβλητή (αν δεν σημειωθεί, τότε θεωρείται ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η `t`)

Σύνταξη εντολής: `dsolve('διαφορική εξίσωση','x')`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) = y^2(x) + xy(x) + 2\,^{*} \qquad (8.3.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + xy + 2$$

γράφουμε:

```
syms x y
[y] = dsolve('Dy = y^2+x*y+2', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y = -(2*x)/(x^2 - 1)
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε τη γενική λύση σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

---

* Η διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(x) = a_2(x)y^2(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x)$, όπου $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ είναι γνωστές μη μηδενικές συνεχείς συναρτήσεις, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως διαφορική εξίσωση Riccati. Ο υπολογισμός της γενικής λύσης της δεν είναι πάντοτε εφικτός.

$$-\frac{2x}{x^2-1}$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η γενική λύση που υπολογίστηκε επαληθεύει την εξίσωση Riccati (8.3.1).

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης στην (8.2.5),

$$y''(x)+9y(x)=5\sin(x)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=5\sin(x),$$

γράφουμε:

```
syms x y
[y] = dsolve('D2y+9*y=5*sin(x)','x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y = (5*sin(7*x))/48 - (5*sin(5*x))/24 + (5*sin(x))/16
     -sin(3*x)*((5*cos(4*x))/24 -(5*cos(2*x))/12 + 5/24)
     +C1*cos(3*x)+C2*sin(3*x)
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(y)
```

παίρνουμε τη γενική λύση σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{5\sin(7x)}{48}-\frac{5\sin(5x)}{24}+\frac{5\sin(x)}{16}-\sin(3x)\left(\frac{5\cos(4x)}{24}-\frac{5\cos(2x)}{12}+\frac{5}{24}\right)+c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)$$

Υπενθυμίζεται ότι ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών* έχει *μερική λύση*, η οποία είναι απαλλαγμένη από τις σταθερές, που εμφανίζονται στις γενικές λύσεις παραπάνω, (βλέπε, Ορισμός 8.2.3), επειδή οι αρχικές συνθήκες, που ορίζουν το πρόβλημα, επιτρέπουν τον υπολογισμό των σταθερών. Όταν πρόκειται για ένα τέτοιο πρόβλημα, οι αρχικές συνθήκες συμπεριλαμβάνονται στην εντολή `dsolve`.

Για τον υπολογισμό της *μερικής λύσης* μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης η εντολή `dsolve` δέχεται ως είσοδο, με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη διαφορική εξίσωση
- τις αρχικές συνθήκες
- την ανεξάρτητη μεταβλητή (αν δεν σημειωθεί, τότε θεωρείται ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η `t`)

Σύνταξη εντολής: `dsolve('διαφορική εξίσωση', '1η συνθήκη', '2η συνθήκη','x')`

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y'(x)+y^2(x)e^x=0$, όταν $y(0)=1$, του Παραδείγματος 8.2.6. (ii), γράφουμε:

```
syms x y
[y] = dsolve ('Dy+y^2*exp(x)=0', 'y(0)=1', 'x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
y = 1/exp(x)
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση που υπολογίστηκε.

Περισσότερα για τα προβλήματα αρχικών τιμών οποιασδήποτε τάξης μόνο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στην Ενότητα 10.2. ◊◊

8.4 Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

8.4.1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = 2x$, τον άξονα $y'0y$ και την ευθεία $y = 2$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.2).
Απάντηση: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{4}{3}$.

8.4.2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τις καμπύλες $y^2 = 4x$ και $x^2 = 4y$.
Υπόδειξη: Επιλύστε το σύστημα των καμπυλών (παραβολών) και προσδιορίστε τα κοινά τους σημεία. Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Εφαρμογή 8.1.4 (iv) και χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.3).
Απάντηση: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{16}{3}$.

8.4.3. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'0x$ της περιοχής, που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$, όταν $x \in [1,\ 2]$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο (8.1.5) και τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το $\int \ln^2(x)dx$.
Απάντηση: Ο ζητούμενος όγκος είναι $V = 6 - 2\ln^2 2 + 4\ln 2$ κ.μ.

8.4.4. Να υπολογισθεί ο όγκος της σφαίρας με ακτίνα r.
Υπόδειξη: Θεωρείστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ και την καμπύλη $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, την ημιπεριφέρεια του κύκλου, η οποία μαζί με τον άξονα $x'0x$ δημιουργεί το μισό ενός κυκλικού δίσκου. Η περιστροφή αυτής της περιοχής γύρω από τον άξονα $x'0x$ παράγει μία σφαίρα, της οποίας ο όγκος υπολογίζεται από τον (8.1.5).
Απάντηση: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 7.2.3.

8.4.5. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = f(x) = (e^x + e^{-x})/2$, όταν $x \in [-\ln 2, \ln 2]$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι ισχύει : $1 + \left(f'(x)\right)^2 = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$
Απάντηση: Από τον τύπο (8.1.9) το ζητούμενο μήκος τόξου είναι $l = 3$.

8.4.6. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = x$ στο διάστημα $[0,1]$.
Υπόδειξη: Πρόκειται για ευθεία γραμμή.
Απάντηση: Το ζητούμενο μήκος τόξου είναι ίσο με $\sqrt{2}$.

8.4.7. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1 + x^3)dy - x^2 y(x)dx = 0$.
Απάντηση: Πρόκειται για διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με γενική λύση: $y^3(x) = (1 + x^3)c$, $c \in \mathbb{R}$.

8.4.8. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $xy(x)dy + (x^2 + y^2(x))dx = 0$.
Απάντηση: Πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση με γενική λύση: $x^2\left(x^2 + 2y^2(x)\right) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

8.4.9. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 1$.
Απάντηση: Πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με γενική λύση: $y(x) = \frac{x + c}{1 + x^2}$, $c \in \mathbb{R}$.

8.4.10. Να υπολογισθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $xy(x)y'(x) + x^2 - y^2(x) + 1 = 0$.
Υπόδειξη: Να διακρίνετε περιπτώσεις, για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Για $x \neq 0$, είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $k = -1$, και η γενική λύση δίνεται από την (8.2.23).
Απάντηση: Για $x = 0$, $y(0) = \pm 1$, και για $x \neq 0$, η γενική λύση είναι: $y^2(x) = -x^2\ln(x^2) + 1 + c\,x^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Βραχάτης, Μ. Ν. (2011). *Αριθμητική Ανάλυση: Εισαγωγή*. Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος

Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (1999). *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Αθήνα: Παν. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). *Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α*. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση Ι* (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς* (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Σιαφαρίκας, Π. Δ. (2014). *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (τεύχος 1ο)*. Πάτρα: Gotsis Εκδόσεις.

Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τραχανάς, Σ. Λ. (2013). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*: ΠΕΚ (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση Ι*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave. from http://www.gnu.org/software/octave

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Lebl, J. (2014). *Basic Analysis: Introduction to Real Analysis*: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). *Elementary Analysis: The Theory of Calculus* (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

8.1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = xe^{-x}$ από τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και από τον άξονα $x'0x$.

8.2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, από τις κατακόρυφες ευθείες $x = -3$, $x = 2$ και από τον άξονα $x'0x$.

8.3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και την ευθεία $x - y - 1 = 0$.

8.4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $f(x) = 2\sqrt{x}$ και την ευθεία $2x - y - 4 = 0$.

8.5. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 - 2x = 0$ και $y^2 + 4x - 12 = 0$.

8.6. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'0x$ της περιοχής, που περικλείεται από τις $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = -1$, $x = 2$, και $y = 0$.

8.7. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'0y$ της περιοχής, που περικλείεται από τις $x = \sqrt{y}$, $y = 4$ και $x = 0$.

8.8. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή του ελλειπτικού δίσκου $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ με $y \geq 0$ γύρω από τον άξονα $x'0x$.

8.9. Βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος επί της ευθείας $y = 3x + 5$ από τη θέση $x = 1$ ως τη θέση $x = 4$.

8.10. Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = f(x) = \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2}$ από το σημείο $\left(1, 3\sqrt{3}\right)$ ως το σημείο $(8,0)$.

8.11. Να γράψετε μία συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave, με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a,b]$, το φυσικό αριθμό n και τον τύπο μίας συνάρτησης f, που να υλοποιεί $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2}\,\dfrac{b-a}{n}$, όπου x_i είναι το αριστερό άκρο του υποδιαστήματος $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ θεωρώντας την κανονική διαμέριση του $[a,b]$.
Στη συνέχεια, για την καμπύλη $y = f(x) = \sqrt{x^3}$, υπολογίστε το μήκος της από το σημείο $(1,1)$ ως το σημείο $(4, 8)$ εφαρμόζοντας τον τύπο στην (8.1.9) με τη χρήση των εντολών diff και int, συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά του Παραδείγματος 8.1.9 (i). Επαληθεύστε την ορθότητα της συνάρτησης (function) υπολογίζοντας το $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'\left(w_i\right)\right)^2}\,\Delta x\right)$ με $n = 1000$. Συγκρίνετε με τα προηγούμενα αποτελέσματα.
Υπόδειξη: Αναπτύξτε συνάρτηση (function) σε Matlab/Octave ανάλογη με αυτήν στην Παρατήρηση 7.6.4.

8.12. Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, να υπολογισθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

i) $xy'(x) - y(x) = xe^{\frac{y(x)}{x}}$

ii) $y'(x) + \dfrac{1 + y^3(x)}{(x + x^3)y^2(x)} = 0$

iii) $y'(x) = x^2 - 2xy(x) + y^2(x)$

iv) $\left(x^2 - y^2(x)\right)y'(x) = 2x\,y(x)$

v) $y'(x) = x + \sin(x) + y(x)$

vi) $xy'(x) = 1 + x^3 + y(x)$

vii) $xy'(x) - \left(1 - xy(x)\right) y(x) = 0$

viii) $x^4 y'(x) = \left(x^3 + y(x)\right) y(x)$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

8.13. Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

i) $x^2 y(x) y'(x) = x + 1$, όταν $y(1) = 0$.

ii) $y'(x) = \dfrac{y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)}}{x}$, όταν $y(1) = 1$.

iii) $y'(x) = x + y(x)$, όταν $y(0) = 1$.

iv) $x \ln x \, y'(x) = 3x^3 \ln^2 x + y(x)$, όταν $y(2) = 1$.

v) $y'(x) + \dfrac{2}{x} y(x) + x^9 y^5(x) = 0$, όταν $y(1) = 1$.

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.