ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης

… Ο λογισμός είναι λογικά εσφαλμένος, ωστόσο δίνει σωστά αποτελέσματα, γιατί τα λάθη αλληλοεξουδετερώνονται.

…. Αφού κατανοήσουμε το πνεύμα της απειροελάχιστης μεθόδου, και επαληθεύσουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της, είτε μέσω της γεωμετρικής μεθόδου των λόγων, είτε μέσω της αναλυτικής μεθόδου των συναρτήσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απείρως μικρές ποσότητες σαν ένα σίγουρο και πολύτιμο μαθηματικό εργαλείο για να συντομεύσουμε και να απλουστεύσουμε τις αποδείξεις μας.

Louis Lagrange (1736 –1813)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης

Σύνοψη
Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί το «πέρασμα» από το Διαφορικό στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Η θεμελιώδης έννοια, για το σκοπό αυτό, είναι η αντιπαράγωγος ή αόριστο ολοκλήρωμα, η οποία «λειτουργεί» ως αντίστροφη διαδικασία από εκείνη της παραγώγισης. Παρουσιάζονται οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και αναπτύσσονται οι τεχνικές υπολογισμού του. Εισάγεται η έννοια του αθροίσματος Riemann, με τη χρήση του οποίου, δίνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann). Διατυπώνεται το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Προαπαιτούμενη γνώση
Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης, κανόνες παραγώγισης, τύποι παραγώγισης βασικών συναρτήσεων.

7.1. Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος

Στο Διαφορικό Λογισμό (βλέπε, Κεφάλαιο 5) είδαμε ως ερμηνεία της παραγώγου μίας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, τον αριθμό που δίνει την κλίση (ή συντελεστή διεύθυνσης) της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Αντίστροφα, αν δοθεί μία συνάρτηση *g*, της οποίας οι τιμές παριστάνουν την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας κάποιας άγνωστης καμπύλης σε κάθε σημείο της, μπορούμε να βρούμε ποια είναι η καμπύλη με την παραπάνω ιδιότητα ;

Για παράδειγμα, έστω ότι η κλίση μίας καμπύλης δίνεται από τη συνάρτηση $g(x) = 5x^2$ και ζητούμε να βρούμε ποια είναι η καμπύλη, δηλαδή, αναζητούμε μία συνάρτηση *f*, της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $(x, f(x))$ έχει κλίση ίση με $5x^2$. Τότε, ως γνωστό, θα ισχύει $f'(x) = 5x^2$. Οπότε αναζητούμε εκείνη τη συνάρτηση *f*, της οποίας η παράγωγος σε κάθε σημείο της *x* ισούται με $5x^2$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, από τις ιδιότητες παραγώγισης, ότι μία συνάρτηση f, που ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = 5x^2$, είναι η $f(x) = \frac{5}{3}x^3$. Επίσης, θα μπορούσε να παρατηρήσει κάποιος, ότι και η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{3}x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την απαίτησή μας. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1.1. Αν για τη συνάρτηση f υπάρχει μία συνάρτηση *F*, της οποίας η παράγωγος είναι η *f*, δηλαδή, $F' = f$ σε ένα διάστημα *I* υποσύνολο του $\mathbb{R}$, η *F* ονομάζεται **αντιπαράγωγος** (ή **παράγουσα** ή **αρχική** συνάρτηση) της f και συμβολίζεται με $A(f)$.

Παραδείγματα 7.1.2.
i) Μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x)=5x^2$ (στο προηγούμενο παράδειγμα) είναι η συνάρτηση $A\left(5x^2\right)=F(x)=\frac{5}{3}x^3$, όπως επίσης και οι συναρτήσεις $F(x)=\frac{5}{3}x^3+\sqrt{7}$, $F(x)=\frac{5}{3}x^3-1$ είναι αντιπαράγωγοι της $f(x)$, εφόσον επαληθεύεται ο Ορισμός 7.1.1.

ii) Η συνάρτηση $F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x-1$ είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x)=4x^2-3x+5$.

iii) Μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\cos(x)$ είναι η συνάρτηση $F(x)=\sin(x)$. Επίσης, $F(x)=\sin(x)-2$ είναι μία αντιπαράγωγος της $f(x)=\cos(x)$. ◊◊

Πρόταση 7.1.3.
Αν $F'(x)=0$, για κάθε $x\in(a,b)$, τότε $F(x)=c$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη: Έστω $x_1, x\in(a,b)$ με $x_1<x$. Από την υπόθεση, η F ως παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα (βλέπε, Κεφάλαιο 5) και σε κάθε υποδιάστημα της μορφής (x_1,x). Επομένως, για τη συνάρτηση F στο διάστημα $[x_1,x]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (βλέπε, Θεώρημα 6.1.3), οπότε υπάρχει $\xi\in[x_1,x]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$F(x)-F(x_1)=F'(\xi)(x-x_1) \tag{7.1.1}$$

Επειδή από την υπόθεση προκύπτει $F'(\xi)=0$ η ισότητα στην (7.1.1) δίνει

$$F(x)=F(x_1),\ \text{για κάθε } x\in(a,b).$$

Αυτό δηλώνει ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $F(x)=c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$. ◊◊

Εφαρμογή 7.1.4. Αν για τις συναρτήσεις F και G ισχύει $F'(x)=G'(x)$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε

$$F(x)=G(x)+c,$$

για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την Πρόταση 7.1.3, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=F(x)-G(x)$. ◊◊

Παρατηρήσεις 7.1.5.
i) Από την Εφαρμογή 7.1.4, συμπεραίνουμε ότι, αν F είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης f, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x)+c$, όπου c είναι μία πραγματική σταθερή συνάρτηση, αποτελεί επίσης μία αντιπαράγωγο της f. Δηλαδή, η αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης f δεν ορίζεται με μοναδικό τρόπο και όλες οι αντιπαράγωγοι διαφέρουν μεταξύ τους κατά τη σταθερά $c\in\mathbb{R}$.
ii) Η υπόθεση για την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων F και G στο διάστημα (a,b) στην Πρόταση 7.1.3 είναι απαραίτητη και δεν μπορεί να παραληφθεί. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=2x$, για κάθε $x\in I$ με $I=(1,2)\cup(3,4)$ και τις συναρτήσεις

$$F(x)=x^2,\ \text{για κάθε } x\in I,\ \text{ και } \ G(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\in[1,2] \\ x^2+3, & \text{αν } x\in[3,4] \end{cases}$$

τότε

$$F'(x)=G'(x)=f(x),\ \text{ για κάθε } x\in I.$$

Όμως,

$$G(x)-F(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in(1,2)\\ 3, & \text{αν } x\in(3,4)\end{cases}$$

δηλαδή, δεν υπάρχει μοναδική πραγματική σταθερή συνάρτηση c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in I$. ◊◊

Ορισμός 7.1.6. Έστω ένα διάστημα I υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και $f: I\to\mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** (indefinite integral) **της** f στο I και συμβολίζεται με $\int f(x)\,dx$, όπου *x* η ανεξάρτητη μεταβλητή της *f* στο *I*. Επομένως, αν *F* παριστάνει μία αντιπαράγωγο της *f*, τότε

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c,\ \ c\in\mathbb{R}. \tag{7.1.2}$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται **ολοκληρωτέα** ή **υπό ολοκλήρωση συνάρτηση** και dx είναι το διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*, (βλέπε, Κεφάλαιο 5).

Από τον Ορισμό 7.1.6. και την (7.1.2) είναι φανερό ότι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων αποτελούν συναρτήσεις των οποίων η γραφική παράσταση είναι μετατοπισμένη κατά τη σταθερή *c* από τη γραφική παράσταση της αντιπαραγώγου $F(x)$ κατά μία διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα $y'Oy$. Επιπλέον μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών $F(x)+c$ στο σημείο *x* είναι παράλληλες, επειδή η παράγωγος όλων των αντιπαραγώγων της f έχουν την ίδια τιμή στο σημείο με τετμημένη *x* και είναι ίση με $\left(F(x)+c\right)'=f(x)$.

Παράδειγμα 7.1.7.

Αν η αρχική θέση ενός σώματος είναι $s=10$, να βρεθεί η θέση του την χρονική στιγμή t, όταν η ταχύτητα του την ίδια χρονική στιγμή δίνεται ως $v(t)=9{,}8t+5$.

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα *v* ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, είναι ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος *s* στη μονάδα του χρόνου. Δηλαδή,

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds}{dt},$$

όπου η συνάρτηση $s(t)$ εκφράζει την απόσταση του σώματος την χρονική στιγμή t από ένα αρχικό σημείο. Επομένως,

$$\frac{ds}{dt}=s'(t)=9{,}8t+5.$$

Αναζητούμε τη συνάρτηση $s(t)$ της οποίας η παράγωγος δίνεται από την παραπάνω σχέση. Αναζητούμε, δηλαδή, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int v(t)\,dt$ της συνάρτησης $v(t)=9{,}8t+5$ και συγκεκριμένα, εκείνη την αντιπαράγωγο $A\left(v(t)\right)$, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $s(0)=10$.

Από τις ιδιότητες της παραγώγισης, είναι φανερό ότι

$$s(t)=A\left(9{,}8t+5\right)=\frac{9{,}8}{2}t^2+5t+c,\ \ c\in\mathbb{R}$$

$$\text{ή } s(t)=\int v(t)\,dt=\frac{9{,}8}{2}t^2+5t+c.$$

Για να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη θα πρέπει

$$s(0)=\frac{9{,}8}{2}\cdot 0+5\cdot 0+c=10\Rightarrow c=10.$$

Τελικά, η ζητούμενη συνάρτηση $s(t)$ είναι

$$s(t)=4{,}9t^2+5t+10.$$

Σημείωση. Εξισώσεις της μορφής $\dfrac{ds}{dt}=9{,}8t+5$ ή $ds=(9{,}8t+5)dt$ ονομάζονται *διαφορικές εξισώσεις*, οι λύσεις των οποίων ως προς την άγνωστη συνάρτηση (στο Παράδειγμα 7.1.7 είναι η $s(t)$) δίνονται με τη βοήθεια αόριστων ολοκληρωμάτων, (βλέπε, Κεφάλαιο 8). Όταν υπάρχει και αρχική συνθήκη, (όπως η $s(0)=10$) λέμε ότι έχουμε ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών ή συνθηκών*. ◊◊

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη γραμμική ιδιότητα του αόριστου ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.1.8.
Αν f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I του $\mathbb{R}$ και έχουν αόριστα ολοκληρώματα στο I και $a,b\in\mathbb{R}$ (όχι και οι δύο μηδέν), τότε η συνάρτηση $a\,f+b\,g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I και ισχύει

$$\int\big(a\,f(x)+b\,g(x)\big)dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τους Ορισμούς 7.1.1 και 7.1.6 η απόδειξη προκύπτει άμεσα. ◊◊

Στην επόμενη εφαρμογή γενικεύεται η ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Εφαρμογή 7.1.9.
Αν $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ και για τις συναρτήσεις $f_1,f_2,\ldots,f_n$ υπάρχουν οι αντιπαράγωγοί τους, τότε

$$\int\big(c_1 f_1(x)+c_2\,f_2(x)+\cdots+c_n f_n(x)\big)dx=c_1\int f_1(x)\,dx+c_2\int f_2(x)\,dx+\cdots+c_n\int f_n(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την Πρόταση 7.1.8 με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. ◊◊

Κάθε φορά που εφαρμόζεται είτε η Πρόταση 7.1.8 είτε η Εφαρμογή 7.1.9 κατά τον υπολογισμό αόριστου ολοκληρώματος, δεν είναι αναγκαίο να γράφεται η σταθερά που προκύπτει σε κάθε επιμέρους αόριστο ολοκλήρωμα, επειδή το άθροισμα τελικά όλων των επιμέρους σταθερών είναι ξανά μία σταθερά, η οποία γράφεται μία φορά στο τέλος της συνολικής ολοκλήρωσης.

Δίνουμε παρακάτω τα αόριστα ολοκληρώματα στοιχειωδών συναρτήσεων, τα οποία προκύπτουν από τις παραγωγίσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.

7.1.10. Πίνακας ολοκλήρωσης στοιχειωδών συναρτήσεων

1.	$\int 0\,dx=c,\ c\in\mathbb{R}$
2.	$\int 1dx=x+c,\quad x\in\mathbb{R}$
3.	$\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c,\quad n\in\mathbb{R}-\{-1\}$
4.	$\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c\ ,\ x\neq 0$
5.	$\int f^n(x)\,f'(x)dx=\dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1}+c\ ,\ n\in\mathbb{R}-\{-1\}$
6.	$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c\ ,\ f(x)\neq 0$
7.	$\int e^x\,dx=e^x+c\ ,\ x\in\mathbb{R}$

8.	$\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c,\quad 0<a\neq 1,\ x\in\mathbb{R}$
9.	$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)+c\ ,\ x\in\mathbb{R}$
10.	$\int \cos(x)\,dx=\sin(x)+c\,,\ x\in\mathbb{R}$
11.	$\int \tan(x)\,dx=-\ln\lvert\cos(x)\rvert+c$
12.	$\int \cot(x)\,dx=\ln\lvert\sin(x)\rvert+c$
13.	$\int \dfrac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+c\ ,\ x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\ k\in\mathbb{Z}$
14.	$\int \dfrac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c\,,\ \left((k-1)\pi,\,k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$
15.	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arc\sin(x)+c=\sin^{-1}(x)+c\,,x\in(-1,1)$
16.	$\int \dfrac{1}{1+x^2}dx=arc\tan(x)+c=\tan^{-1}(x)+c\,,\ x\in\mathbb{R}$
17.	$\int \sinh(x)\,dx=\cosh(x)+c$ και $\int \cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c\,,x\in\mathbb{R}$
18.	$\int \dfrac{1}{\cosh^2(x)}dx=\tanh(x)+c$ και $\int \dfrac{1}{\sinh^2(x)}dx=-\coth(x)+c$
19.	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sinh^{-1}(x)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c\,,\ \ x\in\mathbb{R}$
20.	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\cosh^{-1}(x)+c\,,\ x\in\mathbb{R}-[-1,1]$

Παραδείγματα 7.1.11.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:
i) $\int p(x)\,dx$, όπου $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_i\in\mathbb{R},\ 0\le i\le n$.

ii) $\int x\sqrt{7x^2+5}\,dx$ iii) $\int\dfrac{5}{\sqrt{2x-3}}dx$ iv) $\int\dfrac{2}{5x+1}dx$

v) $\int\dfrac{3x}{4x+1}dx$ vi) $\int\dfrac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx$

i) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.1.9. και τους τύπους (2) και (3) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε

$$\begin{aligned}\int p(x)\,dx&=\int\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)dx=\\&=\int a_nx^n\,dx+\int a_{n-1}x^{n-1}\,dx+\cdots+\int a_1x\,dx+\int a_0\,dx=\\&=a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots+a_1\frac{x^2}{2}+a_0x+c,\quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ακολουθώντας τον παραπάνω τρόπο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε πολυωνυμικής συνάρτησης.

ii) Εφαρμόζοντας τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n=\dfrac{1}{2}$ και $f(x)=7x^2+5$ έχουμε:

$$\int x\sqrt{7x^2+5}\,dx=\int\frac{1}{14}\left(7x^2+5\right)'\sqrt{7x^2+5}\,dx=\frac{1}{14}\frac{\left(7x^2+5\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{\sqrt{\left(7x^2+5\right)^3}}{21}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

iii) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.1.8. και τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n=-\frac{1}{2}$ και $f(x)=2x-3$ έχουμε:

$$\int\frac{5}{\sqrt{2x-3}}dx=5\int\frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx=5\int\frac{1}{2}\frac{(2x-3)'}{\sqrt{2x-3}}dx=5\int\left(\sqrt{2x-3}\right)'dx=5\sqrt{2x-3}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

iv) Εφαρμόζοντας τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε:

$$\int\frac{2}{5x+1}dx=2\int\frac{1}{5}\frac{(5x+1)'}{5x+1}dx=\frac{2}{5}\ln|5x+1|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

v) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.1.8. και στη συνέχεια τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10. έχουμε

$$\int\frac{3x}{4x+1}dx=3\int\frac{1}{4}\frac{4x}{4x+1}dx=\frac{3}{4}\int\frac{4x+1-1}{4x+1}dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\int\frac{4x+1}{4x+1}dx-\int\frac{1}{4x+1}dx\right)=\frac{3}{4}\int dx-\frac{3}{4}\frac{1}{4}\int\frac{4}{4x+1}dx=$$

$$=\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}\int\frac{(4x+1)'}{4x+1}dx=\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}\ln|4x+1|+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

vi) Επειδή $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, εφαρμόζοντας τους τύπους (13) και (14) του Πίνακα 7.1.10. και την Πρόταση 7.1.8. έχουμε:

$$\int\frac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx=\int\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx=$$

$$=\int\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx+\int\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2(x)}dx+\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx=$$

$$=\tan(x)-\cot(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

◊◊

Επειδή οι ιδιότητες της παραγώγου του γινομένου και του πηλίκου δύο συναρτήσεων δίνουν πολύπλοκο τύπο, το αόριστο ολοκλήρωμα τέτοιων συναρτήσεων απαιτεί ανάπτυξη μεθοδολογίας τέτοιας ώστε στο αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα να μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της γραμμικότητας του αόριστου ολοκληρώματος για τις βασικές συναρτήσεις (βλέπε, Πρόταση 7.1.8 και Πίνακα 7.1.10). Έτσι, στις επόμενες ενότητες παρουσιάζουμε τις σημαντικότερες μεθόδους υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, που είναι:

- μέθοδος αντικατάστασης,
- μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες,
- μέθοδος ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων,
- μέθοδος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων, και
- μέθοδος αναγωγής σε ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

7.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

Έστω η συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ ορισμένη και συνεχής στο διάστημα I και $x = g(t)$, όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα I', τέτοιο ώστε $g(I') \subseteq I$. Αν F είναι μία αντιπαράγωγος της f, τότε

$$\left(F \circ g\right)'(t) = F'\left(g(t)\right) \cdot g'(t) = f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)$$

κι επομένως

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = F\left(g(t)\right) + c = F(x) + c = \int f(x)\, dx$$

Έτσι,

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \qquad (7.2.1)$$

Η σχέση (7.2.1) μας επιτρέπει αντί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ να υπολογίσουμε το $\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,dt$, το οποίο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή x με $x = g(t)$, με σκοπό το τελευταίο ολοκλήρωμα να είναι πιο εύκολο στον υπολογισμό του από ό,τι το αρχικό.

Παρατηρήσεις 7.2.1.

i) Επειδή $g'(t) \cdot dt = d\left(g(t)\right)$, η σχέση (7.2.1) μπορεί να γραφεί κι ως

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = \int f\left(g(t)\right) dg(t) = \int f(x)\, dx \qquad (7.2.2)$$

ii) Η συνάρτηση $g(t) = x$ μέσω της οποίας αλλάζουμε τη μεταβλητή από x σε t πρέπει να είναι 1-1. Και αυτό γιατί, το ολοκλήρωμα $\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,dt$ είναι μία συνάρτηση (αντιπαράγωγος) του t, ενώ το αρχικό ολοκλήρωμα ζητείται ως συνάρτηση του x. Έτσι, αν G είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)$, τότε

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = G(t) + c\,.$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη, αφού είναι 1-1, έχουμε $t = g^{-1}(x)$, οπότε

$$\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = G(t) + c = G\left(g^{-1}(x)\right) + c\,,$$

όπου $G\left(g^{-1}(x)\right) = F(x)$ μία αντιπαράγωγος της f .

iii) Κατά τη διαδικασία αλλαγής μεταβλητής για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int f(x)\,dx$ ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Επιλέγουμε κατάλληλη συνάρτηση g, η οποία είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη, θέτουμε $x = g(t)$ (το σύμβολο της νέας μεταβλητής μπορεί να είναι u, v, y, z ή όποιο άλλο θελήσουμε). Η επιλογή της g δεν είναι μοναδική (βλέπε, Παράδειγμα 7.2.2 (i)).

Βήμα 2. Αντικαθιστούμε την «παλιά» μεταβλητή x στο $\int f(x)\,dx$ καθώς και το διαφορικό dx από τη σχέση $dx = g'(t) \cdot dt$.

Βήμα 3. Υπολογίζουμε το $\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,dt$ και στο τέλος θέτουμε $t = g^{-1}(x)$.

Παραδείγματα 7.2.2.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}}\,dx$ ii) $\int \frac{1}{7+\sqrt{x}}\,dx$ iii) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ iv) $\int x e^{x^2}\,dx$

i) Θέτουμε $t=3x-5$, άρα $x=g(t)=\dfrac{t+5}{3}$. Τότε $dt=(3x-5)'dx=3dx$. Από τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10. για $n=1/2$ το ολοκλήρωμα γράφεται :

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\int\left(2\sqrt{t}\right)'dt=\frac{2}{3}\sqrt{t}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $t=3x-5$ (και η g είναι αντιστρέψιμη (γιατί;)), προκύπτει τελικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{3x-5}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε, επίσης, να κάνουμε την αντικατάσταση $t=\sqrt{3x-5}$ (για $x>\dfrac{5}{3}$), οπότε $dt=\left(\sqrt{3x-5}\right)'dx=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}dx=\dfrac{3}{2t}dx$. Επομένως,

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-5}}dx=\frac{2}{3}\int \frac{t}{t}dt=\frac{2}{3}\int dt=\frac{2}{3}t+c=\frac{2}{3}\sqrt{3x-5}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

ii) Θέτουμε $\sqrt{x}=t$, άρα $x=t^2=g(t)$. Τότε $dt=\left(\sqrt{x}\right)'dx=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow dx=2t\,dt$,

επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int \frac{2t}{7+t}dt=2\int \frac{t}{7+t}dt=2\int \frac{7+t-7}{7+t}dt=2\left(\int \frac{7+t}{7+t}dt-\int \frac{7}{7+t}dt\right)=2\int dt-14\int \frac{1}{7+t}dt$$

Από την ολοκλήρωση στοιχειωδών συναρτήσεων το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \frac{2t}{7+t}dt=2t-14\ln|7+t|+c=2\sqrt{x}-14\ln\left|7+\sqrt{x}\right|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

iii) Θέτουμε $t=\ln x$, άρα $x=e^t=g(t)$. Τότε $dt=\dfrac{1}{x}dx$, επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx=\int \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

iv) Θέτουμε $x^2=t$, οπότε $dt=2x\,dx$ και επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$ ◊◊

Εφαρμογή 7.2.3.

i) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, υπολογίζονται θέτοντας

$$bx=a\sin(t),\ \text{όπου}\ a,b>0\ \text{και}\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι: $I_1=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx=\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)+c,\ a,b>0,\ c\in\mathbb{R}.$

ii) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν $\sqrt{b^2x^2-a^2}$, υπολογίζονται θέτοντας

$$bx=a\cosh(t),\ \text{όπου}\ a,b>0\ \text{και}\ t\in[0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι: $I_2=\int\sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx=\frac{a^2}{4b}\sinh\left(2\cosh^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)\right)-\frac{a^2}{2b}\cosh^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)+c$, $a,b>0$, $c\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη: i) Για $|x|<\frac{a}{b}\Rightarrow-\frac{a}{b}<x<\frac{a}{b}$ και $a,b>0$, θέτουμε $bx=a\sin(t)$, οπότε έχουμε

$$a^2-b^2x^2=a^2-a^2\sin^2(t)=a^2\left(1-\sin^2(t)\right)=a^2\cos^2(t),$$

και

$$d(bx)=d\left(a\sin(t)\right)\Rightarrow b\,dx=a\cos(t)\,dt\Rightarrow dx=\frac{a}{b}\cos(t)\,dt.$$

Επιπλέον, για $x\in\left(-\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right)$ από $bx=a\sin(t)$ έχουμε $t=\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)$, και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.5.3. η συνάρτηση ημιτόνου είναι αντιστρέψιμη, όταν $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ από όπου προκύπτει $\cos(t)>0$.

Επομένως, από $a>0$ και μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_1=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(t)}}\frac{a}{b}\cos(t)\,dt=\frac{a}{b}\int\frac{\cos(t)}{|a\cos(t)|}dt=\frac{a}{b}\int\frac{\cos(t)}{|a|\,|\cos(t)|}dt=\frac{1}{b}\int dt=\frac{1}{b}t+c=\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Όταν το ριζικό $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ βρίσκεται στον παρονομαστή, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε και τον τύπο (15) του Πίνακα 7.1.10. Δηλαδή, μπορούμε να θέσουμε $bx=at$, οπότε

$$dx=\frac{a}{b}dt\quad\text{και}\quad\sqrt{a^2-b^2x^2}=\sqrt{a^2-a^2t^2}=|a|\sqrt{1-t^2}=a\sqrt{1-t^2},\ a>0.$$

Έτσι, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τον τύπο (15), έχουμε

$$I_1=\int\frac{1}{a\sqrt{1-t^2}}\frac{a}{b}dt=\frac{1}{b}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{b}\sin^{-1}(t)+c=\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

ii) Για $|x|\geq\frac{a}{b}\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{a}{b}\right]\cup\left[\frac{a}{b},+\infty\right)$ και $a,b>0$, θέτουμε $bx=a\cosh(t)$, οπότε χρησιμοποιώντας $\cosh^2(t)-1=\sinh^2(t)$ και $\left(\cosh(t)\right)'=\sinh(t)$ (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16, Πίνακας 5.2, αντίστοιχα) έχουμε

$$b^2x^2-a^2=a^2\cosh^2(t)-a^2=a^2\left(\cosh^2(t)-1\right)=a^2\sinh^2(t)$$

και

$$d(bx)=\left(a\cosh(t)\right)'dt\Rightarrow b\,dx=a\sinh(t)\,dt\Rightarrow dx=\frac{a}{b}\sinh(t)\,dt.$$

Επιπλέον, για κατάλληλα x από $bx=a\cosh(t)$ έχουμε $t=\cosh^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)$ και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο είναι γνήσια αύξουσα, οπότε από $t\in[0,+\infty)$ προκύπτει άμεσα $\sinh(t)\geq0$.

Επομένως, από $a>0$ και μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_2=\int\sqrt{a^2\sinh^2(t)}\frac{a}{b}\sinh(t)\,dt=\frac{a}{b}\int|a||\sinh(t)|\sinh(t)\,dt=\frac{a^2}{b}\int\sinh^2(t)\,dt.$$

Επειδή $\sinh^2(t)=\frac{\cosh(2t)-1}{2}$ (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16) και $\left(\sinh(t)\right)'=\cosh(t)$, έχουμε:

$$I_2=\frac{a^2}{b}\int\frac{\cosh(2t)-1}{2}dt=\frac{a^2}{2b}\left(\int\cosh(2t)\,dt-\int dt\right)=\frac{a^2}{2b}\left(\frac{1}{2}\sinh(2t)-t\right)+c=\frac{a^2}{4b}\sinh(2t)-\frac{a^2}{2b}t+c=$$
$$=\frac{a^2}{4b}\sinh\left(2\cosh^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)\right)-\frac{a^2}{2b}\cosh^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

◊◊

Παραδείγματα 7.2.4.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ ii) $I_2=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

i) Θέτουμε $x=2\sin(t)$, οπότε

$$t=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\quad \text{και}\quad dx=2\cos(t)\,dt\,.$$

Επιπλέον, το ημίτονο είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση όταν $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, από όπου εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\cos(t)>0$, και τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2(t)}=\sqrt{4\left(1-\sin^2(t)\right)}=\sqrt{4\cos^2(t)}=2\left|\cos(t)\right|=2\cos(t)\,.$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (3) από τον Πίνακα 1.5.1 έχουμε:

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{4\sin^2(t)}{2\cos(t)}2\cos(t)\,dt=4\int\sin^2(t)\,dt=4\int\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=2\left(\int dt-\int\cos(2t)dt\right)\\&=2\int dt-2\int\cos(2t)dt=2t-\sin(2t)+c=\\&=2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

ii) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει το ριζικό $\sqrt{x^2-9}$ το οποίο είναι της μορφής $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ και σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.2.3 (ii) θέτουμε $x=3\cosh(t)$ και ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης της Εφαρμογής 7.2.3 (ii) καταλήγουμε

$$I_2=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx=t+c=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Ένας *άλλος τρόπος* απόδειξης μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή του τύπου (20) του Πίνακα7.1.10., επειδή το ριζικό $\sqrt{x^2-9}$ βρίσκεται στον παρονομαστή.
Συνεπώς, αν θέσουμε $x=3u$ έχουμε

$$dx=3du\quad\text{και}\quad\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{\sqrt{9u^2-9}}=\frac{1}{3\sqrt{u^2-1}}\,.$$

Επομένως μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I_2=\int\frac{1}{3\sqrt{u^2-1}}3du=\int\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du=\cosh^{-1}(u)+c=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

Για $x\geq 0$ και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.7 μπορούμε να γράψουμε ότι

$$I_2=\ln\left(\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}\right)+c=\ln\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

◊◊

Εφαρμογή 7.2.5.

i) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν τη συνάρτηση $\sqrt{a^2x^2+b^2}$, υπολογίζονται θέτοντας

$ax = b\sinh(t)$, όπου $a,b>0$.

Να αποδείξετε ότι: $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}\sqrt{a^2x^2+b^2}\right) + c$, $a,b>0$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Αόριστα ολοκληρώματα, που περιέχουν τη συνάρτηση $a^2x^2+b^2$ υπολογίζονται, θέτοντας

$ax = b\tan(t)$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right) + c$, με $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: i) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}dx$ με $a,b>0$ περιέχει $\sqrt{a^2x^2+b^2}$, επομένως, θέτουμε $ax = b\sinh(t)$, οπότε $t = \sinh^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right)$ (για κατάλληλα x) και από $\left(\sinh(t)\right)' = \cosh(t)$ έχουμε

$$d\left(ax\right) = d\left(b\sinh(t)\right) \Rightarrow a\,dx = b\cosh(t)dt \Rightarrow dx = \frac{b}{a}\cosh(t)\,dt .$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.6.6 (ii) για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(t) \geq 1 \Rightarrow \cosh(t) > 0$, οπότε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1$, (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16 (i)) και $b>0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{a^2x^2+b^2} = \sqrt{b^2\sinh^2(t)+b^2} = \sqrt{b^2\left(\sinh^2(t)+1\right)} = b\left|\cosh(t)\right| = b\cosh(t) .$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα καταλήγουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{b\cosh(t)}\frac{b}{a}\cosh(t)\,dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + c = \frac{1}{a}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Για κατάλληλα x σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.3 και την (1.6.4) το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}dx = \frac{1}{a}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right) + c = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}\sqrt{a^2x^2+b^2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

ii) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}dx$ περιέχει $a^2x^2+b^2$, επομένως, θέτουμε $ax = b\tan(t)$, οπότε $t = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right)$ και

$$d\left(ax\right) = d\left(b\tan(t)\right) \Rightarrow adx = \frac{b}{\cos^2(t)}dt \Rightarrow dx = \frac{b}{a\cos^2(t)}dt .$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (2) από τον Πίνακα 1.5.1 έχουμε:

$$a^2x^2+b^2 = b^2\tan^2(t)+b^2 = b^2\left(\tan^2(t)+1\right) = b^2\frac{1}{\cos^2(t)} .$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο $I_2 = \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}dx$ προκύπτει

$$I_2 = \int \frac{1}{\frac{b^2}{\cos^2(t)}}\frac{b}{a\cos^2(t)}dt = \frac{1}{ab}\int dt = \frac{1}{ab}t + c = \frac{1}{ab}t = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

◊◊

Παραδείγματα 7.2.6.

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I=\int\sqrt{4x^2+4x+5}\,dx$.

Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{4x^2+4x+5}=\sqrt{(2x+1)^2+2^2},$$

συνεπώς, η ολοκληρωτέα συνάρτηση παίρνει τη μορφή των συναρτήσεων της Εφαρμογής 7.2.5.
Θέτουμε $2x+1=2\sinh(t)$ από όπου προκύπτει

$$d(2x+1)=d(2\sinh(t))\Rightarrow dx=\cosh(t)dt.$$

Όπως στην απόδειξη της Εφαρμογής 7.2.5 (i), από την ταυτότητα $\cosh^2(t)=\sinh^2(t)+1$, και $\cosh(t)>0$, έχουμε:

$$\sqrt{(2x+1)^2+2^2}=\sqrt{4\sinh^2(t)+4}=\sqrt{4\left(1+\sinh^2(t)\right)}=2\sqrt{\cosh^2(t)}=2\left|\cosh(t)\right|=2\cosh(t).$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας τον τύπο (17) του Πίνακα 7.1.10. και την ταυτότητα (iv) της Εφαρμογής 1.6.16, αυτό γράφεται

$$\begin{aligned}I&=\int 2\cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt=2\int\cosh^2(t)\,dt=2\int\frac{1+\cosh(2t)}{2}dt=\\&=\int dt+\int\cosh(2t)\,dt=t+\frac{\sinh(2t)}{2}+c=\\&=\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sinh\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη μορφή αντικατάστασης επειδή καθιστά ευκολότερο τον υπολογισμό του δοσμένου ολοκληρώματος.
Αν θέταμε $2x+1=2\tan(t)$, τότε

$$d(2x+1)=d(2\tan(t))\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2(t)}dt$$

και

$$\sqrt{(2x+1)^2+2^2}=\sqrt{4\tan^2(t)+4}=\sqrt{4\left(1+\tan^2(t)\right)}=2\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}}=\frac{2}{\left|\cos(t)\right|}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$I=\int\frac{2}{\left|\cos(t)\right|}\frac{1}{\cos^2(t)}dt,$$

το οποίο είναι δυσκολότερο στον υπολογισμό του συγκριτικά με την παραπάνω αντικατάσταση. Στην Ενότητα 7.5, θα προτείνουμε μία γενικότερη μέθοδο υπολογισμού αυτών των ολοκληρωμάτων. ◊◊

Στη συνέχεια μελετώνται τριγωνομετρικά ολοκληρώματα, που έχουν τουλάχιστον έναν από τους εκθέτες των $\sin(x),\cos(x)$ περιττό φυσικό αριθμό. Η περίπτωση, όπου οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι μελετάται στην Ενότητα 7.5.

Εφαρμογή 7.2.7.

i) Αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$I=\int\sin^{2k+1}(x)\cos^m(x)\,dx,\ k,m\in\mathbb{N},$$

υπολογίζονται, θέτοντας $t=\cos(x)$.

ii) Αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$J=\int\sin^n(x)\cos^{2k+1}(x)\,dx,\ n,k\in\mathbb{N},$$

υπολογίζονται, θέτοντας $t=\sin(x)$.

Απόδειξη: i) Το ολοκλήρωμα *I* γράφεται:

$$I=\int \sin^{2k+1}(x)\cos^{m}(x)\,dx=\int \sin^{2k}(x)\cos^{m}(x)\sin(x)\,dx$$

Θέτουμε $t=\cos(x)$, από όπου προκύπτει

$$dt=d(\cos(x))=(\cos(x))'\,dx=-\sin(x)\,dx\Rightarrow -dt=\sin(x)\,dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin^{2k}(x)=\left(\sin^{2}(x)\right)^{k}=\left(1-\cos^{2}(x)\right)^{k}=\left(1-t^{2}\right)^{k}$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα *I*, αυτό μετασχηματίζεται στο

$$I=\int \sin^{2k+1}(x)\cos^{m}(x)\,dx=-\int \left(1-t^{2}\right)^{k} t^{m}dt .$$

Για τις διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών *k*, *m*, στο I η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πολυωνυμική με ανεξάρτητη μεταβλητή *t* βαθμού $2k+m$ και υπολογίζεται σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.1.11(i). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή *t* με $t=\cos(x)$.

ii) Ανάλογα εργαζόμαστε για το ολοκλήρωμα *J*. Θέτουμε $t=\sin(x)$, από όπου προκύπτει

$$dt=d(\sin(x))=\left(\sin(x)\right)'dx=\cos(x)\,dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\cos^{2k}(x)=\left(\cos^{2}(x)\right)^{k}=\left(1-\sin^{2}(x)\right)^{k}=\left(1-t^{2}\right)^{k}$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο ολοκλήρωμα *J*, αυτό μετασχηματίζεται στο

$$J=\int \sin^{n}(x)\cos^{2k+1}(x)\,dx=\int \sin^{n}(x)\cos^{2k}(x)\cos(x)\,dx=\int t^{n}\left(1-t^{2}\right)^{k}dt .$$

Για τις διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών *k*, *n*, στο *J* η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πολυωνυμική με ανεξάρτητη μεταβλητή *t* βαθμού $2k+n$ και υπολογίζεται σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.1.11(i). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή *t* με $t=\sin(x)$. ◊◊

Παράδειγμα 7.2.8.

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int \sin^{3}(x)\cos^{4}(x)\,dx$.

Θέτουμε $t=\cos(x)$, οπότε έχουμε

$$dt=-\sin(x)\,dx\Rightarrow -dt=\sin(x)\,dx .$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin^{3}(x)=\sin^{2}(x)\sin(x)=\left(1-\cos^{2}(x)\right)\sin(x)$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αρχικό ολοκλήρωμα, αυτό μετασχηματίζεται στο

$$I=\int \left(1-\cos^{2}(x)\right)\cos^{4}(x)\sin(x)\,dx=-\int \left(1-t^{2}\right)t^{4}\,dt=$$

$$=-\int \left(t^{4}-t^{6}\right)dt=-\frac{t^{5}}{5}+\frac{t^{7}}{7}+c=-\frac{\cos^{5}(x)}{5}+\frac{\cos^{7}(x)}{7}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

◊◊

7.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένας τρόπος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων, όταν η μέθοδος αλλαγής μεταβλητής δεν συμβάλλει στον υπολογισμό τους. Η μέθοδος ανάγει ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f\,dg$ σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int g\,df$, όπου f, g συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Πρόταση 7.3.1.
Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα διάστημα I. Αν η συνάρτηση $f'\cdot g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I, τότε η συνάρτηση $f\cdot g'$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο I και ισχύει

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx. \tag{7.3.1}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f'\cdot g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα I και έστω F μία αντιπαράγωγος αυτής. Τότε $F'(x) = f'(x)\cdot g(x)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1.5. έχουμε

$$f\cdot g - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \left\{ f\cdot g - F + c : c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Έστω $G \in f\cdot g - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx = \left\{ f\cdot g - F + c : c\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε $G = f\cdot g - F + c$, για κάποια σταθερή $c\in\mathbb{R}$. Τότε

$$G'(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) - f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g'(x).$$

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι η συνάρτηση G είναι μία αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f\cdot g'$, δηλαδή $G\in\int f\cdot g'\,dx$. Επομένως,

$$f\cdot g - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx = \left\{ f\cdot g - F + c : c\in\mathbb{R}\right\} \subseteq \int f(x)\cdot g'(x)\,dx. \tag{7.3.2}$$

Έστω H μία αντιπαράγωγος της $f\cdot g'$, δηλαδή, $H\in\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$ και

$$H'(x) = f(x)\cdot g'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) - f'(x)\cdot g(x) =$$

$$= \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f'(x)\cdot g(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - F'(x),$$

όπου F μία αντιπαράγωγος της $f'(x)\cdot g(x)$. Δηλαδή, υπάρχει σταθερή $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$H = f\cdot g - F + c,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι

$$H \in f\cdot g - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Άρα,

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \subseteq f\cdot g - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx. \tag{7.3.3}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.3.2) και (7.3.3) με τον Ορισμό 7.1.1. συμπεραίνουμε την ισχύ της (7.3.1). ◊◊

Παρατηρήσεις 7.3.2.

i) Η Πρόταση 7.3.1 αναφέρεται σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων, όπου η μία εκ των δύο είναι η παράγωγος μίας γνωστής συνάρτησης. Επειδή

$$d\left(g(x)\right) = g'(x)\,dx,$$

ο τύπος (7.3.1) ανάγει ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f\,dg$ στο ολοκλήρωμα $\int g\,df$ του οποίου ο υπολογισμός είναι (πιθανώς) ευκολότερος.

ii) Σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int u(x)\cdot v(x)\,dx$, όπου είναι εύκολο να γράψουμε $u(x) = f'(x)$ και $v(x) = g'(x)$, ο τύπος στην (7.3.1) μπορεί να εφαρμοστεί είτε $\int f'(x)\cdot v(x)\,dx$ είτε $\int u(x)\cdot g'(x)\,dx$.

iii) Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και η εφαρμογή της (7.3.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί όσες φορές χρειάζεται προκειμένου να καταλήξουμε σε απλοποιημένη μορφή ολοκληρώματος (βλέπε, Παράδειγμα 7.3.3. (ii)).

Παραδείγματα 7.3.3.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:
i) $I_1=\int x\cos(x)\,dx$ ii) $I_2=\int x^2e^x dx$ iii) $I_3=\int e^x\cos(x)\,dx$
iv) $I_4=\int x\ln x\,dx$ v) $I_5=\int \tan^{-1}(2x)\,dx$

i) Είναι γνωστό ότι $\cos(x)=\left(\sin(x)\right)'$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο (7.3.1) της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, έχουμε

$$I_1=\int x\cos(x)\,dx=\int x\left(\sin(x)\right)'dx=x\sin(x)-\int x'\sin(x)\,dx=$$
$$=x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx=x\sin(x)+\cos(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση. Αν κάποιος, αξιοποιώντας την Παρατήρηση 7.3.2 (ii), ορθά γράψει:

$$I_1=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cos(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\cos(x)-\int\frac{x^2}{2}\left(\cos(x)\right)'dx=\frac{x^2}{2}\cos(x)-\int\frac{x^2}{2}\left(-\sin(x)\right)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\cos(x)+\int\frac{x^2}{2}\sin(x)dx=\frac{x^2}{2}\cos(x)+I_{11},$$

όπου $I_{11}=\int\frac{x^2}{2}\cdot\sin(x)dx$, τότε πρέπει να υπολογίσει το I_{11}. Στη συνέχεια ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με την παραπάνω για τον υπολογισμό του I_{11}, αν γράψει

$$I_{11}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\sin(x)\,dx=\frac{x^3}{6}\sin(x)-\int\frac{x^3}{6}\left(\sin(x)\right)'dx=\frac{x^3}{6}\sin(x)-\int\frac{x^3}{6}\cos(x)\,dx=$$
$$=\frac{x^3}{6}\sin(x)-I_{12},$$

όπου $I_{12}=\int\frac{x^3}{6}\cos(x)\,dx$, τότε πρέπει να υπολογίσει το I_{12}, που για τον υπολογισμό του απαιτείται ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I_{13}=\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'\cos(x)\,dx$. Όπως είναι φανερό, η παραπάνω υπολογιστική διαδικασία είναι ατέρμονη, επειδή οι δυνάμεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x αυξάνονται διαρκώς, αν και η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) είναι ορθή.

Επομένως, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I=\int p(x)\cdot\cos(x)\,dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας του συνημιτόνου και όχι της πολυωνυμικής συνάρτησης.

ii) Εφαρμόζοντας δύο φορές τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$I_2=\int x^2\left(e^x\right)'dx=x^2e^x-\int\left(x^2\right)'e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx=$$
$$=x^2e^x-2\int x\left(e^x\right)'dx=x^2e^x-2\left(xe^x-\int(x')e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=$$
$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I=\int p(x)\cdot e^{f(x)}\,dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της εκθετικής συνάρτησης και εφαρμογή του (7.3.1) τόσες φορές όσες και ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$.

iii) Επειδή $\left(\sin(x)\right)'=\cos(x)$ και $\left(e^x\right)'=e^x$ έχουμε διπλή δυνατότητα για τη χρήση του τύπου (7.3.1). Εφαρμόζοντας δύο φορές τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$I_3=\int e^x\left(\sin(x)\right)'dx=e^x\sin(x)-\int\left(e^x\right)'\sin(x)\,dx=e^x\sin(x)-\int e^x\sin(x)\,dx=$$
$$=e^x\sin(x)-\int e^x\left(-\cos(x)\right)'dx=e^x\sin(x)+\int e^x\left(\cos(x)\right)'dx=$$
$$=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)+c_1-\int\left(e^x\right)'\cos(x)\,dx=$$
$$=e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c_1-\int e^x\cos(x)\,dx=e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c_1-I_3.$$

Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα I_3 επανεμφανίζεται, οπότε

$$I_3=e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c_1-I_3\Rightarrow 2I_3=e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c_1\Rightarrow I_3=\frac{1}{2}e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c,\quad c\in\mathbb{R},$$

όπου $2c=c_1$.

Στην ίδια απάντηση θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε εξαρχής το $\left(e^x\right)'=e^x$ στην εφαρμογή του (7.3.1).

iv) Επειδή $\frac{1}{2}\left(x^2\right)'=x$ το αόριστο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως

$$I_4=\int x\ln x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(x^2\right)'\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2\right)'\ln x\,dx\,.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$I_4=\frac{1}{2}\left[\int\left(x^2\right)'\ln x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\int x^2\left(\ln x\right)'dx\right]=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\int x^2\frac{1}{x}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\int xdx\right]=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I=\int p(x)\cdot\ln(f(x))\,dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, αρχικά απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$.

v) Όπως στο προηγούμενο Παράδειγμα 7.3.3(iv) μπορούμε να γράψουμε:

$$I_5=\int x'\tan^{-1}(2x)\,dx=x\tan^{-1}(2x)-\int x\left(\tan^{-1}(2x)\right)'dx=x\tan^{-1}(2x)-\int x\frac{(2x)'}{1+4x^2}dx=$$
$$=x\tan^{-1}(2x)-\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+4x^2\right)'}{1+4x^2}dx=x\tan^{-1}(2x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Εδώ, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι η εφαρμογή του τύπου (7.3.1) κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της μορφής $I=\int p(x)\cdot\tan^{-1}(f(x))\,dx$, όπου $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, αρχικά απαιτεί τον υπολογισμό της παράγουσας της πολυωνυμικής συνάρτησης $p(x)$. ◊◊

Εφαρμογή 7.3.4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n\geq 2$ ισχύει:

$$I_n=\int\sin^n(x)\,dx=\frac{-\sin^{n-1}(x)\cdot\cos(x)+(n-1)I_{n-2}}{n}\tag{7.3.4}$$

Απόδειξη: Επειδή $(\cos(x))'=-\sin(x)$, από τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n(x)\,dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx \\
&= -\int \sin^{n-1}(x)\big(-\sin(x)\big)\,dx = \\
&= -\int \sin^{n-1}(x)\big(\cos(x)\big)'\,dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\,dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x)\,dx = \\
&= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2}}{n}$$ ◊◊

Εφαρμογή 7.3.5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει:

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}\,, \tag{7.3.5}$$

με $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c\,,\; c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Για κάθε $n \geq 2$ το ολοκλήρωμα I_n μπορεί να γραφεί:

$$I_n = \int x' \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (7.3.1) έχουμε:

$$I_n = x\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{-n(x^2+a^2)^{n-1}2x}{(x^2+a^2)^{2n}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx. \tag{7.3.6}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (7.3.6) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \int \frac{x^2+\alpha^2-\alpha^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \\
&= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx - a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = I_n - a^2 I_{n+1}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία ισότητα στην (7.3.6) έχουμε

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}\,,$$

ή ισοδύναμα, λύνοντας ως προς I_{n+1}:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

Επειδή $n \geq 2$, την παραπάνω ισότητα μπορούμε να την γράψουμε

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

Για $n = 1$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.2.5. (ii) είναι φανερό ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}x\right) + c,\;\; c \in \mathbb{R}\,,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ◊◊

Οι τύποι (7.3.4) και (7.3.5) ονομάζονται **αναγωγικοί** (ή **αναδρομικοί**) τύποι.

7.4 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, δηλαδή πηλίκων της μορφής $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Διάφορα ολοκληρώματα, όπως εκείνα αρκετών τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων και επομένως, είναι σημαντική η γνώση του υπολογισμού τους.

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων βασίζεται στην ανάλυση μίας ρητής συνάρτησης σε άθροισμα *μερικών κλασμάτων*, δηλαδή κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A}{(x-r)^m} \text{ και } \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \text{ όπου } m,n\in\mathbb{N} \text{ και } p^2-4q<0.$$

Η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων σε συνδυασμό με την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος ανάγει τον υπολογισμό του $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ στους υπολογισμούς απλούστερων ολοκληρωμάτων όπως είναι $\int\dfrac{a}{\left(x-r\right)^m}dx$, και $\int\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$. Συμβολίζουμε με deg$P(x)$ (αντ. deg$Q(x)$) το βαθμό του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x)$ (αντ. του $Q(x)$). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I) $\deg P(x)\ge\deg Q(x)$ και **II)** $\deg P(x)<\deg Q(x)$.

I) $\deg P(x)\ge\deg Q(x)$

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση **(II)** μετά τη διαίρεση πολυωνύμων $P(x):Q(x)$. Επειδή $\deg P(x)\ge\deg Q(x)$ στη διαίρεση $P(x):Q(x)$ αντιστοιχεί, ως γνωστό, ένα πηλίκο $\pi(x)$ και ένα υπόλοιπο $\upsilon(x)$, που οι βαθμοί ικανοποιούν τη συνθήκη $0\le\deg\upsilon(x)<\deg Q(x)$ και τα πολυώνυμα συνδέονται μεταξύ τους με την ακόλουθη ισότητα

$$P(x)=Q(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$$

από όπου προκύπτει:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$$

Επομένως,

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}\right)dx=\int\pi(x)\,dx+\int\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}dx. \tag{7.4.1}$$

Η ολοκλήρωση $\int\pi(x)\,dx$ αφορά την πολυωνυμική συνάρτηση $\pi(x)$ και είναι απλή (βλέπε, Παράδειγμα 7.1.11 (i)). Η ολοκλήρωση $\int\dfrac{\upsilon(x)}{Q(x)}dx$ είναι μία ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης, που εντάσσεται στην περίπτωση **(II)**, επειδή $0\le\deg\upsilon(x)<\deg Q(x)$, η οποία εξετάζεται στη συνέχεια.

II) $\deg P(x)<\deg Q(x)$

Ο υπολογισμός του $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, όταν $\deg P(x)<\deg Q(x)$, απαιτεί τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Ανάλυση του πολυωνύμου $Q(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων $\left(x-r\right)^m$, r είναι ρίζα του $Q(x)$, και δευτεροβαθμίων παραγόντων $\left(x^2+px+q\right)^n$, όταν $p^2-4q<0$.

Βήμα 2: Σε κάθε παράγοντα της μορφής $\left(x-r\right)^m$, r είναι ρίζα του $Q(x)$, αντιστοιχεί το άθροισμα των μερικών (ή απλών) κλασμάτων ως εξής:

$$\left(x-r\right)^m\to\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{\left(x-r\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-r\right)^3}+\cdots+\frac{A_m}{\left(x-r\right)^m}, \text{ όπου } A_1,A_2,\ldots,A_m\in\mathbb{R}.$$

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $\left(x^2+px+q\right)^n$ με $p^2-4q<0$ αντιστοιχεί το άθροισμα των μερικών κλασμάτων ως εξής:

$$\left(x^2+px+q\right)^n \to \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+px+q\right)^3}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{\left(x^2+px+q\right)^n},$$

όπου $B_i, C_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,n$.

Βήμα 3: Επειδή, από την Άλγεβρα είναι γνωστό ότι, κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μερικών κλασμάτων, τέτοιων όπως στο Βήμα 2, απαιτείται το άθροισμα όλων των μερικών κλασμάτων να ισούται με τη ρητή συνάρτηση $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Μετά την άθροιση των μερικών κλασμάτων (κάνοντας πρώτα ομώνυμα τα κλάσματα), προκύπτει ρητή συνάρτηση με παρονομαστή $Q(x)$. Επομένως, η προηγούμενη απαίτηση, εξισώνει δυο ρητές συναρτήσεις με ίδιο παρονομαστή, $Q(x)$, οπότε πρέπει και οι αριθμητές να είναι ίσοι. Δηλαδή, ο νέος αριθμητής, ο οποίος είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση, πρέπει να είναι ίσος με $P(x)$. Η ισότητα των πολυωνύμων οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_i, B_j, C_j, από όπου υπολογίζονται.

Βήμα 4: Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.1.9. το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ολοκληρωμάτων είτε της μορφής $\int \dfrac{1}{(x-r)^m}dx$, είτε $\int \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$, για τους διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς m και n.

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3) και (4) του Πίνακα 7.1.10. υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της πρώτης μορφής:

$$\int \frac{1}{(x-r)^m}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}\cdot\dfrac{1}{(x-r)^{m-1}}, & \text{όταν } m\neq 1 \\ \ln|x-r|, & \text{όταν } m=1 \end{cases} \tag{7.4.2}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$, το πολυώνυμο x^2+px+q γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2=(x+c)^2+d^2,\ c,d\in\mathbb{R}, \tag{7.4.3}$$

όπου

$$c=\frac{p}{2}, \tag{7.4.4}$$

$$d=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},\quad \text{με } 4q-p^2>0, \tag{7.4.5}$$

(υπενθυμίζεται ότι ισχύει $p^2-4q<0$).

Θέτοντας $u=x+c$, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ ανάγεται:

- είτε σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int \dfrac{u}{\left(u^2+c^2\right)^n}du$, το οποίο υπολογίζεται από τους τύπους (5) και (6) του Πίνακα 7.1.10. και ισούται με:

$$\int \frac{u}{\left(u^2+c^2\right)^n}du = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-n)}\cdot\dfrac{1}{\left(u^2+c^2\right)^{n-1}}, & \text{όταν } n \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+c^2), & \text{όταν } n = 1 \end{cases} \tag{7.4.6}$$

- είτε σε ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int \frac{1}{\left(u^2+c^2\right)^n}du \tag{7.4.7}$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα στην (7.4.7) αντιμετωπίζεται μέσω του αναδρομικού τύπου (7.3.5) της Εφαρμογής 7.3.5.

Παραδείγματα 7.4.1.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int \frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}dx$ ii) $I_2 = \int \frac{x^3}{(x^2+2)^2}dx$ iii) $I_3 = \int \frac{1}{x^4-1}dx$

iv) $I_4 = \int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+2}dx$ v) $I_5 = \int \frac{x^4+3x^3+x}{x^2+1}dx$

i) Επειδή $\deg P(x) = \deg(4x^2-3x+5) < \deg Q(x) = \deg(x^3-3x+2)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}.$$

Έχουμε

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2 στον παράγοντα $(x-1)^2$ αντιστοιχεί άθροισμα δύο μερικών κλασμάτων, (τόσα κλάσματα όση είναι η πολλαπλότητα της ρίζας $r=1$, δηλαδή, 2)

$$(x-1)^2 \to \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

και στον παράγοντα $x+2$ αντιστοιχεί ένα απλό κλάσμα

$$x+2 \to \frac{C}{x+2}.$$

Απαιτούμε

$$\frac{4x^2-3x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$
$$= \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}$$

από όπου προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων:

$$4x^2-3x+5 = (A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)$$

Η παραπάνω ισότητα δίνει:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ A+B-2C=-3 \\ -2A+2B+C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{4x^2-3x+5}{x^3-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}+\frac{3}{x+2}$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_1 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή των τύπων στην (7.4.2) ως ακολούθως:

$$I_1=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2}{\left(x-1\right)^2}dx+\int\frac{3}{x+2}dx=$$

$$=\ln\left|x-1\right|-2\frac{1}{x-1}+3\ln\left|x+2\right|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

ii) Επειδή $\deg P(x)=\deg x^3<\deg Q(x)=\deg(x^2+2)^2$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{x^3}{(x^2+2)^2}\ .$$

Ο παρονομαστής $(x^2+2)^2$ είναι ένα πολυώνυμο χωρίς πραγματικές ρίζες, οπότε σύμφωνα με το Βήμα 2 η ρητή συνάρτηση γράφεται ως άθροισμα μερικών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{x^3}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+\left(2A+C\right)x+\left(2B+D\right)}{(x^2+2)^2}$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων:

$$x^3=Ax^3+Bx^2+\left(2A+C\right)x+\left(2B+D\right),$$

το οποίο δίνει:

$$\begin{cases}A=1\\B=0\\2A+C=0\\2B+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\\C=-2\\D=0\end{cases}$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{x^3}{(x^2+2)^2}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_2 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή του τύπου στην (7.4.6) ως ακολούθως:

$$I_2=\int\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{-2x}{(x^2+2)^2}\right)dx=\int\frac{x}{x^2+2}dx-\int\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}dx-\int\frac{(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{x^2+2}+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

iii) Επειδή $\deg P(x)=\deg 1<\deg Q(x)=\deg(x^4-1)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{1}{x^4-1}.$$

Έχουμε

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\ .$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, η ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων έχει τη μορφή:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$
$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)}{x^4-1}=.$$
$$=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{x^4-1}$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων προκύπτει:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\A-B+D=0\\A+B-C=0\\A-B-D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/4\\B=-1/4\\C=0\\D=-1/2\end{cases}.$$

Επομένως, η ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_3 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή των τύπων στις (7.4.2) και (7.4.7) ως ακολούθως:

$$I_3=\int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\tan^{-1}(x)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

iv) Επειδή $\deg P(x)=\deg 1<\deg Q(x)=\deg(x^3+3x^2+3x+2)$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο (II) για την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης

$$\frac{1}{x^3+3x^2+3x+2}.$$

Σύμφωνα με το Βήμα 1, προσπαθούμε να αναλύσουμε το x^3+3x^2+3x+2 σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή το πολύ δευτεροβάθμιων παραγόντων. Εξετάζουμε ποιοι από τους διαιρέτες του σταθερού όρου 2 (δηλαδή, τους $\pm1,\pm2$) αποτελούν ρίζες του πολυωνύμου. Επειδή το -2 αποτελεί μία (πραγματική) ρίζα του πολυωνύμου, κάνουμε τη διαίρεση του x^3+3x^2+3x+2 δια του $x+2$ και παίρνουμε:

$$\begin{array}{r|l}x^3+3x^2+3x+2 & x+2\\ \cline{2-2} -x^3-2x^2\quad\quad\quad & x^2+x+1\\ \cline{1-1} x^2+3x+2 & \\ -x^2-2x\quad & \\ \cline{1-1} x+2 & \\ -x-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, επειδή το x^2+x+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες η ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων έχει τη μορφή:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+2)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων:

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+2)=(A+B)x^2+(A+2B+C)x+(A+2C),$$

από όπου προκύπτει:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B+C=0 \\ A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \\ C=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως, ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος I_4 προκύπτει από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και την εφαρμογή του (7.4.2) ως ακολούθως:

$$I_4 = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}I\,, \tag{7.4.8}$$

όπου

$$I = \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (7.4.4) και (7.4.5) το τριώνυμο x^2+x+1 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τετραγώνων και σύμφωνα με την (7.4.3) αυτό γράφεται:

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Θέτουμε $x+\dfrac{1}{2}=u$, οπότε

$$x = u-\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad d(x) = d(u-\frac{1}{2}) \Rightarrow dx = du\,.$$

Μετά από αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στο αόριστο ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας τους τύπους (7.4.6), (7.4.7) και (7.3.5) της Εφαρμογής 7.3.5. το αόριστο ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I = \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{-x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \int \frac{-\left(u-\frac{1}{2}\right)+1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du = \int \frac{-u+\frac{3}{2}}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du = -\int \frac{u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du + \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right) + c = -\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right) + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα της (7.4.8) υπολογίζεται μετά την αντικατάσταση του I από το παραπάνω αποτέλεσμα, το οποίο ισούται με:

$$I_4 = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}I = \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

v) Επειδή $\deg(x^4+3x^3+x) = 4 > \deg(x^2+1) = 2$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο (I), εκτελώντας αρχικά τη διαίρεση των πολυωνύμων:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+3x^3+0x^2+x & x^2+1 \\
\cline{2-2}
-x^4 \qquad\quad -x^2 & x^2+3x-1 \\
\cline{1-1}
3x^3-x^2+x & \\
-3x^3 \qquad -3x & \\
\cline{1-1}
-x^2-2x & \\
x^2 \qquad +1 & \\
\cline{1-1}
-2x+1 &
\end{array}
$$

Επομένως,

$$x^4+3x^3+x=(x^2+1)\cdot(x^2+3x-1)+(-2x+1),$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{x^4+3x^3+x}{x^2+1}=(x^2+3x-1)+\frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

Εφαρμόζοντας την (7.4.1) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \int\left(x^2+3x-1\right)dx+\int\frac{-2x+1}{x^2+1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x+\int\frac{-\left(x^2+1\right)'+1}{x^2+1}dx= \\
&=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x-\int\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx= \\
&=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x-\ln(x^2+1)+\tan^{-1}(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι, η ρητή συνάρτηση $\dfrac{-2x+1}{x^2+1}$ δεν αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων και προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε τον πίνακα ολοκλήρωσης στοιχειωδών συναρτήσεων. ◊◊

Εφαρμογή 7.4.2. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν ρητή παράσταση της e^x, θέτουμε $t=e^x$, οπότε $x=\ln t$ και $dx=\frac{1}{t}dt$ και οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.

Παραδείγματα 7.4.3.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1=\displaystyle\int\frac{1}{e^{2x}-3e^x}dx$ ii) $I_2=\displaystyle\int\frac{e^x}{13\sinh(x)-12\cosh(x)}dx$

i) Πρόκειται για ολοκλήρωμα που περιέχει μία ρητή έκφραση του e^x. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.2 θέτουμε $t=e^x$ και έχουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης:

$$I_1=\int\frac{1}{t(t^2-3t)}dt.$$

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{t\left(t^2-3t\right)}=\frac{1}{t^2\left(t-3\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-3}=\frac{\left(A+C\right)t^2+\left(-3A+B\right)t-3B}{t^2\left(t-3\right)}.$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=0 \\ -3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{9} \\ B=-\dfrac{1}{3} \\ C=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I_1=-\frac{1}{9}\int\frac{1}{t}dt-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2}dt+\frac{1}{9}\int\frac{1}{t-3}dt=-\frac{1}{9}\ln|t|+\frac{1}{3t}+\frac{1}{9}\ln|t-3|+c=$$
$$=-\frac{1}{9}\ln e^x+\frac{1}{3e^x}+\frac{1}{9}\ln\left|e^x-3\right|+c=-\frac{x}{9}+\frac{1}{3e^x}+\frac{1}{9}\ln\left|e^x-3\right|+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

ii) Θέτουμε $t=e^x$, οπότε $x=\ln t$ και $dx=\dfrac{1}{t}dt$. Από τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων (βλέπε, Ορισμός 1.6.1 και 1.6.5) έχουμε:

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}=\frac{t^2-1}{2t}\quad \text{και}\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{t^2+1}{2t}.$$

Επομένως,

$$I_2=\int\frac{t}{13\frac{t^2-1}{2t}-12\frac{t^2+1}{2t}}\frac{1}{t}dt=2\int\frac{t}{t^2-25}dt=2\int\frac{t}{(t-5)(t+5)}dt=2\int\frac{1/2}{t-5}dt+2\int\frac{1/2}{t+5}dt=$$
$$=\ln|t-5|+\ln|t+5|+c=\ln\left|t^2-25\right|+c=\ln\left|e^{2x}-25\right|+c,\quad c\in\mathbb{R},$$

επειδή,

$$\frac{t}{(t-5)(t+5)}=\frac{1/2}{t-5}+\frac{1/2}{t+5}\quad \text{και}\quad \ln|t-5|+\ln|t+5|=\ln\left(|t-5|\cdot|t+5|\right)=\ln\left|(t-5)(t+5)\right|.$$

Ένας *άλλος τρόπος* επίλυσης του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να είναι:

$$I_2=2\int\frac{t}{t^2-25}dt=\int\frac{\left(t^2-25\right)'}{t^2-25}dt=\ln\left|t^2-25\right|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$ ◊◊

Εφαρμογή 7.4.4. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν μία ρητή παράσταση του *x* και τα

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\ ,\ n\in\mathbb{N},$$

θέτουμε

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

από όπου $x=\dfrac{b-dt^n}{ct^n-a}$ και, οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του *t*.

Γενικότερα, για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, τα οποία περιέχουν μία ρητή παράσταση του *x* και των

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\ \sqrt[n_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\ ,\ n_1,n_2,\ldots,n_s\in\mathbb{N},$$

θέτουμε $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, όπου *n* είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $n_1,n_2,\ldots,n_s$.

Παραδείγματα 7.4.5.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$ ii) $I_2 = \int \frac{1}{1+\sqrt{3x+2}} dx$ iii) $I_3 = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx$

i) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα που περιέχει μία ρητή παράσταση του x και του $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., θέτουμε

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \quad \text{και} \quad dx = -\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2} dt .$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα I_1 γίνεται:

$$I_1 = -\int t \frac{t^2+1}{1-t^2} \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = 2\int \frac{2t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 2\int \frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = 2\int \frac{1}{t^2-1} dt + 2\int \frac{1}{t^2+1} dt$$

Επειδή

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + c_1 = \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$

και

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \tan^{-1}(t) + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, κάνοντας αντικατάσταση με τα παραπάνω ολοκληρώματα στο I_1 και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$ έχουμε

$$I_1 = \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\tan^{-1}(t) + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\tan^{-1}(t) + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c,$$

Όπου $c = 2c_1 + 2c_2$, $c \in \mathbb{R}$.

ii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., θέτουμε $t = \sqrt{3x+2}$, από όπου $x = \frac{t^2-2}{3}$ και $dx = \frac{2}{3} t\, dt$. Επομένως,

$$I_2 = \frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t} dt = \frac{2}{3}\int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \frac{2}{3}\int dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+t} dt =$$
$$= \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\ln|1+t| + c = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} - \frac{2}{3}\ln\left|1+\sqrt{3x+2}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

iii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.4.4., επειδή $\varepsilon\kappa\pi(2,3) = 6$, θέτουμε $2x-3 = t^6$, από όπου προκύπτει $dx = 3t^5 dt$. Τότε το ολοκλήρωμα I_3 γράφεται:

$$I_3 = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt = 3\int \frac{t^8}{t^2+1} dt$$

Επειδή από τη διαίρεση πολυωνύμων προκύπτει

$$t^8 = (t^6 - t^4 + t^2 - 1)(t^2+1) + 1,$$

από το παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I_3 = 3\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt + 3\int \frac{1}{t^2+1} dt = 3\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) + 3\tan^{-1}(t) + c =$$
$$= 3\left(\frac{(2x-3)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{(2x-3)^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{3} - (2x-3)^{\frac{1}{6}}\right) + 3\tan^{-1}(2x-3)^{\frac{1}{6}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

◊◊

7.5 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων των ακόλουθων μορφών:

I) $\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$, $m,n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$

II) $\int \sin(kx)\cos(lx)dx$, $\int \sin(kx)\sin(lx)dx$ και $\int \cos(kx)\cos(lx)dx$, $k,l\in\mathbb{R}$, με $k\neq l$.

III) ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin(x)$ και $\cos(x)$.

I) $\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$, $m,n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$.

(α) Όπως αποδείχθηκε στην Εφαρμογή 7.2.7, αν ένας από τους *m, n* είναι περιττός, θέτουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό, που είναι υψωμένος στην άρτια δύναμη.

Αν $m=2k+1$, θέτουμε $t=\cos(x)$, από όπου $dt=d\big(\cos(x)\big)=-\sin(x)dx\Rightarrow -dt=\sin(x)dx$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$
\begin{aligned}
I&=\int \sin^{2k+1}(x)\cos^n(x)dx=\int \sin^{2k}(x)\sin(x)\cos^n(x)dx=\\
&=\int \left(\sin^2(x)\right)^k\cos^n(x)\sin(x)\,dx=\int\left(1-\cos^2(x)\right)^k\cos^n(x)\sin(x)dx=\\
&=-\int (1-t^2)^k\,t^n\,dt
\end{aligned}
$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα αφορά μία πολυωνυμική συνάρτηση, το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

Αν $n=2k+1$, θέτουμε $t=\sin(x)$, και εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο, (βλέπε, Εφαρμογή 7.2.7(ii)).

Αν και οι δύο *m, n* είναι περιττοί, τότε εκτελούμε την ίδια διαδικασία, όπως παραπάνω, είτε για τον *m* είτε για τον *n*.

(β) Αν οι m,n είναι και οι δύο άρτιοι, έχοντας σκοπό τον υποβιβασμό των άρτιων δυνάμεων, χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1 (3))

$$
\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}\quad\text{και}\quad\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}. \tag{7.5.1}
$$

Στη συνέχεια, αν οι νέες εκφράσεις είναι υψωμένες σε περιττή δύναμη εφαρμόζεται **(I)** **(α)**, διαφορετικά, χρησιμοποιούνται εκ νέου οι τύποι υποβιβασμού από την (7.5.1).

Δηλαδή, αν $m=2k$ και $n=2p$, $k,p\in\mathbb{N}$, με $k\neq p$, τότε το γινόμενο των τριγωνομετρικών αριθμών γράφεται

$$
\sin^m(x)\cos^n(x)=\sin^{2k}(x)\cos^{2p}(x)=\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^k\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^p
$$

και αναπτύσσοντας τις ταυτότητες, που υπάρχουν στο δεξιό μέρος της παραπάνω ισότητας, παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο του $\cos(2x)$, $(k+r)-$βαθμού, (βλέπε, Παραδείγματα 7.5.1 (ii)). Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται, είτε χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις που προτάθηκαν στο **(I)** **(α)** για τους όρους του τριγωνομετρικού πολυωνύμου, που είναι υψωμένοι σε περιττή δύναμη, είτε κάνοντας εκ νέου την αντικατάσταση του $\cos^2(x)$ από την (7.5.1) στους όρους του πολυωνύμου, που είναι υψωμένοι σε άρτια δύναμη, εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, όπως παραπάνω, για τον υποβιβασμό της δύναμης.

(γ) Στην ειδική περίπτωση, όπου ένας από τους m ή n είναι ίσος με μηδέν, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία της περίπτωσης **(I)** **(α)** ή **(I)** (β) ανάλογα με το αν ο μη μηδενικός εκθέτης είναι περιττός ή άρτιος, (βλέπε, Παραδείγματα 7.5.1 (vi)).

II) $\int \sin(kx)\cos(lx)dx$, $\int \sin(kx)\sin(lx)dx$ και $\int \cos(kx)\cos(lx)dx$, $k,l\in\mathbb{R}$ με $k\neq l$.

Εφαρμόζοντας τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1(14).)

$$
\sin(kx)\cos(lx)=\frac{1}{2}\big(\sin(kx-lx)+\sin(kx+lx)\big) \tag{7.5.2}
$$

$$
\sin(kx)\sin(lx)=\frac{1}{2}\big(\cos(kx-lx)-\cos(kx+lx)\big) \tag{7.5.3}
$$

$$\cos(kx)\cos(lx) = \frac{1}{2}\left(\cos(kx - lx) + \cos(kx + lx)\right) \tag{7.5.4}$$

στα αντίστοιχα αόριστα ολοκληρώματα της (II) αυτά γράφονται:

(α)
$$\begin{aligned}\int \sin(kx)\cos(lx)dx &= \frac{1}{2}\int\left(\sin(kx - lx) + \sin(kx + lx)\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \sin\left((k-l)x\right)dx + \frac{1}{2}\int \sin\left((k+l)x\right)dx = \\ &= -\frac{1}{2(k-l)}\cos\left((k-l)x\right) - \frac{1}{2(k+l)}\cos\left((k+l)x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

(β)
$$\begin{aligned}\int \sin(kx)\sin(lx)dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos(kx - lx) - \cos(kx + lx)\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \cos\left((k-l)x\right)dx - \frac{1}{2}\int \cos\left((k+l)x\right)dx = \\ &= \frac{1}{2(k-l)}\sin\left((k-l)x\right) - \frac{1}{2(k+l)}\sin\left((k+l)x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

(γ)
$$\begin{aligned}\int \cos(kx)\cos(lx)dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos(kx - lx) + \cos(kx + lx)\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \cos\left((k-l)x\right)dx + \frac{1}{2}\int \cos\left((k+l)x\right)dx = \\ &= \frac{1}{2(k-l)}\sin\left((k-l)x\right) + \frac{1}{2(k+l)}\sin\left((k+l)x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

III) Όταν έχουμε μία ρητή παράσταση[1] των $\sin(x)$ και $\cos(x)$, $R\left(\sin(x), \cos(x)\right)$, αξιοποιούμε τους τριγωνομετρικούς τύπους (βλέπε, Πίνακα 1.5.1(15)), με τη βοήθεια των οποίων $\sin(x)$ και $\cos(x)$ εκφράζονται συναρτήσει της $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi, \pi)$:

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{και} \quad \cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{7.5.8}$$

Θέτουμε $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, από όπου προκύπτουν

$$x = 2\tan^{-1}(t) \ \text{και} \ dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

οι δε τριγωνομετρικοί αριθμοί στην (7.5.8) γράφονται:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \ \text{ και } \ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Επομένως, ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int R\left(\sin(x), \cos(x)\right)dx$ εφαρμόζοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης της μεταβλητής *t*, του οποίου η επίλυση μελετήθηκε στην Ενότητα 7.4..

Παραδείγματα 7.5.1.

Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$ ii) $I_2 = \int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx$ iii) $I_3 = \int \sin(3x)\cos(5x)dx$

[1] Μία ρητή συνάρτηση σημειώνεται με $R(f(x), g(x))$ κι είναι μία ρητή έκφραση των συναρτήσεων f, g.

iv) $I_4 = \int \cos(7x)\cos(2x)dx$ v) $I_5 = \int \frac{1}{1-\sin(x)+\cos(x)}dx$ vi) $I_6 = \int \cos^6(8x)dx$

i) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως **(I)** **(α)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι περιττός. Επομένως,

$$I_1 = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)dx = \int \sin^2(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cos(x)dx = \int \left(\sin^2(x)-\sin^4(x)\right)\cos(x)dx.$$

Θέτουμε $t=\sin(x)$, από όπου $dt = d(\sin(x)) = \cos(x)dx$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I_1 = \int (t^2-t^4)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Έναν *άλλο τρόπο* υπολογισμού δείτε στο Παράδειγμα 7.5.3.(i).

ii) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα της περίπτωσης **(I)** (β), όπου οι εκθέτες του ημιτόνου και συνημιτόνου είναι και οι δύο άρτιοι αριθμοί. Αρχικά έχουμε

$$I_2 = \int \sin^4(x)\left(1-\sin^2(x)\right)dx = \int (\sin^4(x)-\sin^6(x))dx = \int \sin^4(x)\,dx - \int \sin^6(x)\,dx = I_{21} - I_{22},$$

όπου $I_{21} = \int \sin^4(x)\,dx$ και $I_{22} = \int \sin^6(x)\,dx$.

Εφαρμόζοντας τους τριγωνομετρικούς τύπους από την (7.5.1) γράφουμε:

$$\sin^4(x) = \left(\sin^2(x)\right)^2 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos(4x)}{2}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ισότητα στο I_{21} έχουμε:

$$I_{21} = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos(4x)\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + c_1$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c_1.$$

Ανάλογα,

$$\sin^6(x) = \left(\sin^2(x)\right)^3 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 = \frac{1-3\cos(2x)+3\cos^2(2x)-\cos^3(2x)}{8} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{3}{8}\cos^2(2x) - \frac{1}{8}\cos^3(2x) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{3}{8}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) - \frac{1}{8}\cos^3(2x).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω ισότητα στο I_{22} έχουμε:

$$I_{22} = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(2x)dx + \frac{3}{16}\int \left(1+\cos(4x)\right)dx - \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{8}I_{23} = \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{8}I_{23},$$

όπου

$$I_{23} = \int \cos^3(2x)dx = \int \cos^2(2x)\cos(2x)dx = \int \left(1-\sin^2(2x)\right)\cos(2x)dx.$$

Θέτοντας $t=\sin(2x)$, έχουμε $dt = d(\sin(2x)) = 2\cos(2x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}dt = \cos(2x)dx$, οπότε

$$I_{23} = \int \left(1-\sin^2(2x)\right)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int (1-t^2)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + c_2 = \frac{1}{2}\left(\sin(2x) - \frac{\sin^3(2x)}{3}\right) + c_2.$$

Αντικαθιστώντας το I_{23} στο I_{22} έχουμε:

$$I_{22} = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c_3,$$

με $c_3 = -\frac{1}{8}c_2$. Τελικά, αντικαθιστώντας το I_{21}, I_{22} στο I_2 προκύπτει:

$$I_2 = I_{21} - I_{22} = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c,$$

όπου $c = c_1 + c_3$, $c \in \mathbb{R}$.

iii) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως στο **(ΙΙ)(α)**, όπου από την (7.5.2) για $k = 3$ και $l = 5$ ισχύει

$$\sin(3x)\cos(5x) = \frac{1}{2}\left(\sin(-2x) + \sin(8x)\right) = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(8x),$$

επειδή, ως γνωστόν $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο στην (7.5.5) έχουμε:

$$I_3 = \int \sin(3x)\cos(5x)dx = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(8x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

iv) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα όπως στο **(ΙΙ)(γ)**, οπότε εφαρμόζοντας τον (7.5.7) για $k = 7$ και $l = 2$ έχουμε:

$$I_4 = \int \cos(7x)\cos(2x)dx = \frac{1}{10}\sin(5x) + \frac{1}{18}\sin(9x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

v) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα μίας ρητής συνάρτησης

$$R\left(\sin(x), \cos(x)\right) = \frac{1}{1 - \sin(x) + \cos(x)}.$$

Όπως αναφέρθηκε στο **(ΙΙΙ)** θέτουμε, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, από όπου προκύπτουν

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1}(t) \Rightarrow x = 2\tan^{-1}(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \text{ και } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Επομένως,

$$I_5 = \int \frac{1}{1 - \sin(x) + \cos(x)}dx = \int \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{\frac{2-2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2-2t}dt = \int \frac{1}{1-t}dt = -\int \frac{1}{t-1}dt = -\ln|t-1| + c = -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

vi) Πρόκειται για ένα αόριστο ολοκλήρωμα της ειδικής περίπτωσης **(Ι) (γ)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι άρτιος και του ημιτόνου είναι ίσος με μηδέν. Εφαρμόζοντας τους τριγωνομετρικούς τύπους από την (7.5.1) γράφουμε:

$$\begin{aligned} \cos^6(8x) &= \left(\cos^2(8x)\right)^3 = \left(\frac{1+\cos(16x)}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{1 + 3\cos(16x) + 3\cos^2(16x) + \cos^3(16x)}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3\cos(16x)}{8} + \frac{3}{8}\cos^2(16x) + \frac{1}{8}\cos^3(16x) \end{aligned} \tag{7.5.9}$$

Αντικαθιστώντας την (7.5.9) στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \cos^6(8x)dx = \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos(16x) + \frac{3}{8}\cos^2(16x) + \frac{1}{8}\cos^3(16x)\right)dx = \\ &= \int \frac{1}{8}dx + \int \frac{3}{8}\cos(16x)dx + \int \frac{3}{8}\cos^2(16x)dx + \int \frac{1}{8}\cos^3(16x)dx = \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\int \cos(16x)dx + \frac{3}{8}\int \cos^2(16x)dx + \frac{1}{8}\int \cos^3(16x)dx = \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8 \cdot 16}\sin(16x) + \frac{3}{8}I_{61} + \frac{1}{8}I_{62}, \end{aligned} \tag{7.5.10}$$

όπου $I_{61} = \int \cos^2(16x)dx$ και $I_{62} = \int \cos^3(16x)dx$.

Εφαρμόζοντας τον τριγωνομετρικό τύπο του συνημιτόνου από την (7.5.1) στο I_{61} έχουμε:

$$I_{61} = \int \cos^2(16x)dx = \int \frac{1+\cos(32x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(32x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{64}\sin(32x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Το I_{62} είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της μορφής **(I) (γ)**, όπου ο εκθέτης του συνημιτόνου είναι περιττός και του ημιτόνου είναι ίσος με μηδέν, επομένως ακολουθούμε τη μεθοδολογία που προτάθηκε στο **(I) (α)**.

Θέτοντας $t=\sin(16x)$, έχουμε $dt=d(\sin(16x))=16\cos(16x)dx \Rightarrow \frac{1}{16}dt=\cos(16x)dx$, οπότε

$$I_{62}=\int\cos^3(16x)dx=\int\cos^2(16x)\cos(16x)dx=\int\left(1-\sin^2(16x)\right)\cos(16x)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-t^2)dt=\frac{1}{16}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+c_2=\frac{1}{16}\left(\sin(16x)-\frac{\sin^3(16x)}{3}\right)+c_2=\frac{1}{16}\sin(16x)-\frac{1}{48}\sin^3(16x)+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}.$$

Αντικαθιστώντας το I_{61} και το I_{62} στην (7.5.10) προκύπτει

$$I_6=\frac{1}{8}x+\frac{3}{128}\sin(16x)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}\sin(32x)+c_1\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\sin(16x)-\frac{1}{48}\sin^3(16x)+c_2\right)=$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{32}\sin(16x)+\frac{3}{512}\sin(32x)-\frac{1}{384}\sin^3(16x)+c,$$

όπου $c=\frac{3}{8}c_1+\frac{1}{8}c_2,\ c\in\mathbb{R}.$ ◊◊

Εφαρμογή 7.5.2.
i) Αόριστα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, για τις οποίες ισχύει

$$R\left(-\sin(x),\cos(x)\right)=-R\left(\sin(x),\cos(x)\right),$$

υπολογίζονται θέτοντας

$$t=\cos(x).$$

ii) Αόριστα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, για τις οποίες ισχύει

$$R\left(\sin(x),-\cos(x)\right)=-R\left(\sin(x),\cos(x)\right),$$

υπολογίζονται θέτοντας

$$t=\sin(x).$$

Παραδείγματα 7.5.3.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $I_1=\int\sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$ ii) $I_2=\int\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}dx$

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $P\left(\sin(x),\ \cos(x)\right)=\sin^2(x)\cos^3(x)$. Αν θέσουμε στη θέση του $\cos(x)$ το $-\cos(x)$ έχουμε:

$$P\left(\sin(x),\ -\cos(x)\right)=\sin^2(x)\left(-\cos(x)\right)^3=-\sin^2(x)\cos^3(x)=-P\left(\sin(x),\ \cos(x)\right),$$

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.5.2 (ii), για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_1, θέτουμε

$$t=\sin(x)\ \text{ και }\ dt=\cos(x)dx.$$

Επομένως,

$$I_1=\int\sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)dx=\int\sin^2(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\left(\cos(x)dx\right)=$$

$$=\int t^2\left(1-t^2\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=\frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Σύγκρινε με τη μεθοδολογία και το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα 7.5.1(i).

ii) Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $R(\sin(x),\cos(x))=\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}$, όπου αν θέσουμε το $-\sin(x)$ στη θέση του $\sin(x)$, έχουμε

$$R(-\sin(x),\cos(x))=\frac{\left(-\sin(x)\right)^3}{\cos(x)}=-\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}.$$

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.5.2(i), για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα I_2, θέτουμε $t = \cos(x)$, από όπου $dt = -\sin(x)dx$. Επομένως,

$$I_2 = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx = -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \left(-\sin(x)\right) dx = -\int \frac{\left(1-\cos^2(x)\right)}{\cos(x)} \left(-\sin(x) dx\right) =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int t\, dt = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} + c =$$

$$= -\ln|\cos(x)| + \frac{\cos^2(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

◊◊

7.6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* ή *ολοκλήρωμα του Riemann* είναι μία έννοια οριζόμενη με τη βοήθεια του ορίου συνάρτησης και έχει πολλές εφαρμογές, όπως, το εμβαδόν επίπεδης περιοχής (που δεν περικλείεται από ευθείες γραμμές), τον όγκο στερεού που παράγεται από περιστροφή επίπεδης περιοχής, το εμβαδόν επιφάνειας στερεού από περιστροφή, το μήκος καμπύλης, το έργο μίας μεταβλητής δύναμης, το κέντρο μάζας κλπ.
Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος μέσω του θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού, με τη χρήση του οποίου τα ορισμένα ολοκληρώματα υπολογίζονται ευκολότερα σε σύγκριση με τον αρχικό ορισμό τους (βλέπε, Ορισμός 7.6.3).

Για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος χρειαζόμαστε την έννοια του *αθροίσματος του Riemann* (βλέπε, Ορισμός 7.6.3) και για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.6.1. Στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ επιλέγουμε τυχαία σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Το σύνολο των *n*- υποδιαστημάτων

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

λέγεται **διαμέριση** (partition) του διαστήματος $[a,b]$. Στο $[a,b]$ μπορούμε να έχουμε άπειρες διαμερίσεις. Το μήκος του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ συμβολίζεται με $|\Delta x_i|$ και με $\Delta x = \max\{|\Delta x_i|: 1 \le i \le n\}$, τη μέγιστη από τα μήκη των υποδιαστημάτων της διαμέρισης.

Για παράδειγμα, μία διαμέριση του διαστήματος $[-3,4]$ αποτελεί το σύνολο των υποδιαστημάτων:

$$[-3,-1.5],\ [-1.5,0],\ [0,1],\ [1,\ 2.5],\ [2.5,\ 4] \ \text{ με } |\Delta x| = 1.5 .$$

Επίσης, τα σύνολα των υποδιαστημάτων

$$\{[-3,-1],\ [-1,1],\ [1,2],\ [2,4]\} \ \text{ και } \{[-3,4]\}$$

αποτελούν δύο διαφορετικές διαμερίσεις του $[-3,4]$, με τη δεύτερη να είναι τετριμμένη. Για την πρώτη έχουμε $|\Delta x| = 2$ (γιατί;) και για τη δεύτερη $|\Delta x| = 4-(-3) = 7$.

Παρατήρηση 7.6.2.

Μία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$ μπορεί να επιλεγεί τέτοια ώστε τα υποδιαστήματα να είναι ίδιου μήκους και ίσου με Δx. Συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε μία διαμέριση *n*- υποδιαστημάτων μήκους $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ η διαμέριση λέγεται **κανονική**.

Ορισμός 7.6.3. Έστω μία φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ και μία διαμέριση

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

του $[a,b]$. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο w_i στο $[x_{i-1}, x_i]$. Το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i = f(w_1)\Delta x_1 + f(w_2)\Delta x_2 + \cdots + f(w_n)\Delta x_n \qquad (7.6.1)$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** (Riemann sum) για την *f* στο διάστημα $[a,b]$.

Παρατήρηση 7.6.4.

i) Επειδή η επιλογή των w_i μπορεί να γίνει με άπειρους τρόπους, προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρα αθροίσματα Riemann για την *f* στο διάστημα $[a,b]$. Μπορεί, για παράδειγμα, να επιλέξει κάποιος ως $w_i = x_{i-1}$ ή $w_i = x_i$, δηλαδή, ένα από τα άκρα του υποδιαστήματος $[x_{i-1},\ x_i]$. Αν $w_i = x_{i-1}$ το άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}). \qquad (7.6.2)$$

Ενώ, αν $w_i = x_i$ το άθροισμα Riemann είναι

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}). \qquad (7.6.3)$$

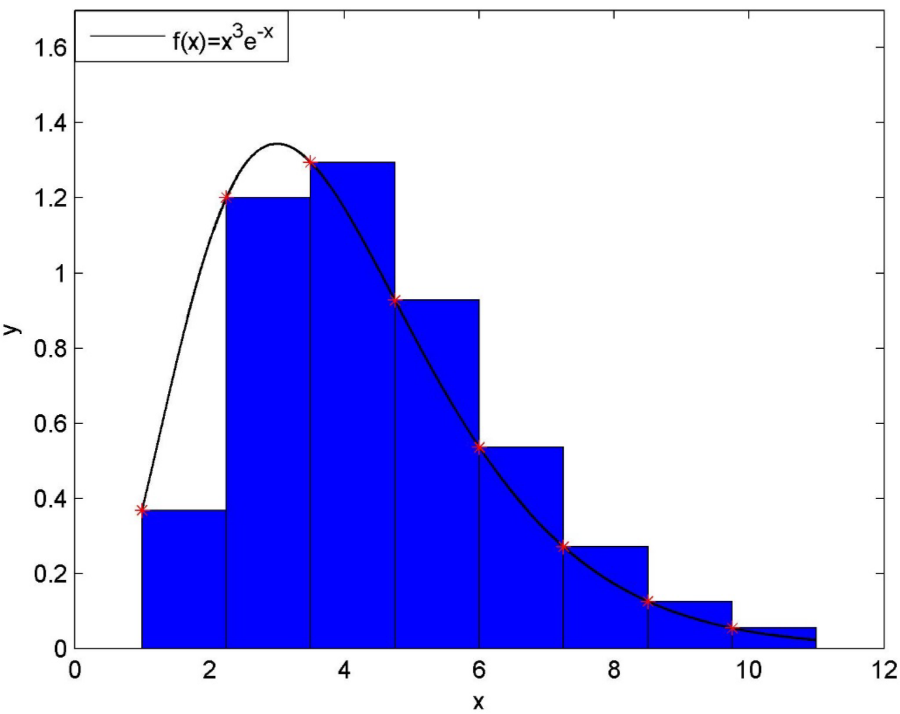
Εφόσον η συνάρτηση f είναι θετική η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann είναι εμβαδόν. Πράγματι, αν για τη φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,b]$, το άθροισμα Riemann των παραπάνω περιπτώσεων (7.6.2), (7.6.3) δηλώνει ένα άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων, όπου η μία διάσταση τους είναι $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (πάνω στον άξονα $x'0x$) και η άλλη (δηλαδή το ύψος) είναι $f(x_{i-1})$ ή $f(x_i)$, αντίστοιχα. Ανάλογα, αν επιλεγεί μία διαμέριση ίδιου μήκους Δx, όπως η κανονική, το άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x. \qquad (7.6.4)$$

Επειδή τα ύψη $f(x_{i-1})$ ή $f(x_i)$ των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, που σχηματίζονται με βάση Δx, έχουν τα πέρατά τους πάνω στη γραφική παράσταση της f το άθροισμα Riemann είναι ένας αριθμός που προσεγγίζει το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$. Όσο πιο «λεπτή» είναι η διαμέριση, τόσο πιο κοντά στην τιμή, που ισούται με το εμβαδόν, βρίσκεται το αποτέλεσμα. Φανταστείτε, για παράδειγμα, την κανονική διαμέριση για πολύ μεγάλο n.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας Matlab δημιουργήσαμε συνάρτηση (function), στην οποία υπολογίζεται το άθροισμα Riemann όπως στην (7.6.4) και σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3e^{-x}$. Παρατηρήστε ότι $f(x)=x^3e^{-x}>0$ για κάθε $x\in[1,11]$. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος Riemann γίνεται η κανονική διαμέριση του διαστήματος $[a,b]=[1,11]$ σε $n=8$ υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = 1.25$. Έχουμε επιλέξει ως $w_i = x_{i-1}$ το κάτω άκρο του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ και ως ύψος, κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου που δημιουργείται, θεωρούμε το $f(w_i)$.

Στο Σχήμα 7.1 σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της $f(x)=x^3e^{-x}$, όπου η τιμή της συνάρτησης $f(w_i)$ σημειώνεται με *. Το άθροισμα Riemann $\mathrm{I}=\sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x = 5.9693$ είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής με μπλε χρώμα.



Σχήμα 7.1: Άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x)=x^3e^{-x}$.

```
function [I] = riemannleft(a,b,n)

  d=(b-a)/n;
  x=a:d:b;
  f=x.^3.*exp(-x);
  Y=f;
  Yleft=Y(1:n);
  I=sum(Yleft.*d);

    for i=1:n
      rectanglex(1)=x(i);        rectangley(1)=0;
      rectanglex(2)=x(i+1);      rectangley(2)=0;
      rectanglex(3)=x(i+1);
      rectangley(3)=rectanglex(1).^3.*exp(-rectanglex(1));
      rectanglex(4)=x(i);
      rectangley(4)=rectanglex(1).^3.*exp(-rectanglex(1));
      fill(rectanglex,rectangley,'b')
      hold on
    end
  xp=a:0.001:b;
  yp=xp.^3.*exp(-xp);
  plot(xp,yp, 'k');
  hold on
  xa=x(:,1:n);
  Ya=Y(:,1:n);
  plot(xa,Ya,'r*')
  xlabel('x');
  ylabel('y');
  legend('f(x)=x^3e^{-x}');
  axis([0 12 0 1.7])
end
```

ii) Γενικεύοντας τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann, που παρουσιάστηκε παραπάνω στο (i), και θεωρώντας ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο w_i του διαστήματος $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ και μία φραγμένη και θετική συνάρτηση f στο $[a,b]$, το άθροισμα Riemann στον (7.6.1) παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής που σχηματίζεται από τα διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, που το καθένα έχει ως βάση $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ και ύψος $f\left(w_i\right)$. Το εμβαδόν της προαναφερθείσας περιοχής προσεγγίζει το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=b$ με μεγαλύτερη ακρίβεια όσο πιο «λεπτή» είναι η διαμέριση του $[a,b]$ και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου $w_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. ◊◊

Ορισμός 7.6.5. Έστω μία φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω μία διαμέριση

$$\left[x_0, x_1\right], \left[x_1, x_2\right], \ldots, \left[x_{n-1}, x_n\right]$$

του $[a,b]$ και $w_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Το όριο

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right) \Delta x_i = L$$

υπάρχει και είναι ίσο με τον πραγματικό αριθμό L, αν, για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon$$

για όλα τα αθροίσματα Riemann της f στο διάστημα $[a,b]$ για τα οποία $\Delta x < \delta$.

Η τιμή του ορίου (όταν υπάρχει) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** (definite integral) ή **ολοκλήρωμα Riemann**[2] (Riemann integral) της f από το a έως το b και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dx$. Δηλαδή, ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(w_i\right)\Delta x_i \tag{7.6.5}$$

Όταν το ορισμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει στο διάστημα $[a,b]$ η συνάρτηση f ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** κατά Riemann στο $[a,b]$ ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$. Οι αριθμοί a και b ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης**, ιδιαίτερα ο a ονομάζεται *κατώτερο όριο* (ή άκρο) ολοκλήρωσης και ο b *ανώτερο όριο* (ή άκρο) ολοκλήρωσης.

Αν $a < b$ και υπάρχει το $\int_a^b f(x)\,dx$ ορίζουμε

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{7.6.6}$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η f ισχύει:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{7.6.7}$$

Παρατήρηση 7.6.6.

i) Ο Ορισμός 7.6.3 είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των w_i στο $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ και θα μπορούσαν να είναι $w_i = x_{i-1}$ ή $w_i = x_i$, (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.2). Επίσης δεν ενδιαφέρει το μήκος Δx_i των υποδιαστημάτων διαμέρισης. Αυτό που ενδιαφέρει είναι $|\Delta x| \to 0$. Έτσι, για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μπορούμε να επιλέξουμε την κανονική διαμέριση με $|\Delta x| \to 0$, δηλαδή, υπολογίζουμε, αν υπάρχει,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\frac{b-a}{n}.$$

Τότε, η ισότητα (7.6.5) γράφεται

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\frac{b-a}{n}. \tag{7.6.8}$$

ii) Συνδυάζοντας τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος Riemann (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.4.) με τον Ορισμό 7.6.5. και τους τύπους (7.6.5) και (7.6.8) έχουμε να παρατηρήσουμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνεχούς και **θετικής** συνάρτησης f στο $[a,b]$ παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'0x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Αν η συνάρτηση είναι σε ορισμένα υποδιαστήματα του $[a,b]$ θετική και στα υπόλοιπα αρνητική, τότε η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$ παριστάνει το *αλγεβρικό άθροισμα* των εμβαδών των περιοχών, οι οποίες βρίσκονται πάνω και κάτω από τον άξονα $x'0x$, (βλέπε, Ενότητα 8.1.1.).

Παράδειγμα 7.6.7.

Να υπολογισθεί το $\int_a^b f(x)\,dx$, $a,b \in \mathbb{R}$ των ακόλουθων συναρτήσεων:

---

[2] Ο ορισμός οφείλεται στο Γερμανό μαθηματικό του 19$^{\text{ου}}$ αιώνα Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).
Το σύμβολο $\int$ πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Gottfried Leibniz (1646-1716) στα τέλη του 17$^{\text{ου}}$ αιώνα, επειδή θεώρησε ότι το ολοκλήρωμα ήταν το άθροισμα των εμβαδών απείρου πλήθους ορθογωνίων παραλληλογράμμων με ύψος αυτό της $f(x)$. Το σύμβολο $\int$ είναι μία επιμήκυνση του συμβόλου S του αθροίσματος, προερχόμενου από τη γερμανική λέξη "Summe", παρότι το σύμβολο που επικράτησε τελικά για το άθροισμα είναι το ελληνικό γράμμα Σ, συμβολισμός που αποδίδεται στον Leonard Euler (1707-1783).

i) $f(x)=x$, $x\in[-2,3]$ ii) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν} \quad -1\le x\le 0 \\ x, & \text{αν} \quad 0<x\le 1 \end{cases}$

i) Θεωρούμε διαμέριση του $[-2,\,3]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, οπότε

$$x_0=-2,\;\; x_1=-2+\frac{5}{n},\;\; x_2=x_1+\frac{5}{n}=-2+2\frac{5}{n},\ldots,\;\; x_n=-2+n\frac{5}{n}.$$

Επιλέγουμε $w_i=x_i=-2+i\dfrac{5}{n}$, οπότε $f\left(w_i\right)=w_i=-2+i\dfrac{5}{n}$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.6.5 και την (7.6.5) αναζητούμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{|\Delta x|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+i\frac{5}{n}\right)\frac{5}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.2(i)), μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-2+i\frac{5}{n}\right)\frac{5}{n}=\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}(-2)+\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i==\frac{5}{n}n(-2)+\frac{25}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=-10+\frac{25(n+1)}{2n}.$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.6.6. από τον (7.6.8) το παραπάνω όριο, όταν $\Delta x\to 0$, είναι ισοδύναμο με το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+i\frac{5}{n}\right)\frac{5}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-10+\frac{25(n+1)}{2n}\right)=-10+\frac{25}{2}=\frac{5}{2}.$$

Επομένως, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{-2}^{3}xdx=\frac{5}{2}.$$

ii) Θεωρούμε τη διαμέριση του $[-1,\,0]$, όπου $f(x)=x^2$, σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ και όμοια τη διαμέριση του $[0,1]$, όπου $f(x)=x$, σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{1}{n}$. Δηλαδή, έχουμε μία διαμέριση του $[-1,\,1]$ σε $2n$ υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, όπου

$$x_0=-1,\; x_1=-1+\frac{1}{n},\ldots,x_n=-1+n\frac{1}{n}=0,$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n}=\frac{1}{n},\ldots,x_{2n}=-1+2n\frac{1}{n}=1.$$

Επιλέγουμε $w_i=x_i=-1+i\dfrac{1}{n}$, $0\le i\le 2n$, οπότε

$$f(w_i)=\begin{cases}\left(-1+i\dfrac{1}{n}\right)^2, & 0\le i\le n\\[2ex] -1+i\dfrac{1}{n}, & n+1\le i\le 2n\end{cases}$$

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της f, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.6.5 και την (7.6.5) αναζητούμε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{|\Delta x|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{2n}f\left(w_i\right)\Delta x\right)=\lim_{|\Delta x|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-1+i\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right)+\lim_{|\Delta x|\to 0}\left(\sum_{i=n+1}^{2n}\left(-1+i\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\right). \tag{7.6.9}$$

Χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα γνωστά αθροίσματα, (βλέπε, Παραδείγματα 3.1.2(i)-(ii)),

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

για καθένα από τα αθροίσματα στην (7.6.9) μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-1+i\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-2i\frac{1}{n}+i^2\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=$$

$$=\frac{1}{n}n-\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=1-\frac{n+1}{n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \tag{7.6.10}$$

$$\sum_{i=n+1}^{2n}\left(-1+i\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\left(-1+i\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n}i=-\frac{n}{n}+\frac{1}{n^2}\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n} \tag{7.6.11}$$

Αντικαθιστώντας τις (7.6.10) και (7.6.11) στην (7.6.9), όταν $\Delta x\to 0$ ή ισοδύναμα $n\to+\infty$, (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.6.) έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)=1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Επομένως,

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{5}{6}.$$ ◊◊

Το ερώτημα που τίθεται είναι «πώς μπορεί να υπολογισθεί ένα ορισμένο ολοκλήρωμα χωρίς να γίνει η χρήση του Ορισμού 7.6.5;». Η απάντηση βρίσκεται στο θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.6.8. (*Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού*)
Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι μία οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο $[a,b]$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{7.6.12}$$

Η σημαντικότητα του Θεωρήματος 7.6.8 έγκειται στο ότι ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$ ανάγεται αρχικά στην εύρεση μίας αντιπαραγώγου, F, της f στο $[a,b]$, και κατόπιν υπολογίζεται η διαφορά των τιμών της F στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης. Συμβολικά το ορισμένο ολοκλήρωμα σημειώνεται

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a).$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$ θεωρώντας $t\in[a,b]$ και συνδυάζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, Θεώρημα 7.6.8.) με τον Ορισμό 7.1.6 του αόριστου ολοκληρώματος μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_a^t f(x)\,dx=F(t)-F(a)\Rightarrow\left(F(t)\right)'=f(t).$$

Παράδειγμα 7.6.9.
Να υπολογισθεί το $\int_a^b f(x)\,dx$, $a,b\in\mathbb{R}$ των παρακάτω συναρτήσεων

i) $f(x)=x$, $x\in[-2,3]$ ii) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν} \quad -1\le x\le 0\\ x, & \text{αν} \quad 0<x\le 1\end{cases}$ iii) $f(x)=x^3e^{-x}$, $x\in[1,11]$

με τη βοήθεια του θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού.

i) Μία αντιπαράγωγος της $f(x)=x$ είναι η $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$, οπότε εφαρμόζοντας την (7.6.12) του Θεωρήματος 7.6.8 για το διάστημα $[-2,3]$ έχουμε

$$\int_{-2}^{3} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3}=\frac{3^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{9}{2}-\frac{4}{2}=\frac{5}{2}.$$

Σύγκρινε την απάντηση με την αντίστοιχη στο Παράδειγμα 7.6.7 (i).

ii) Μία αντιπαράγωγος της $f(x)=x^2$ στο διάστημα $[-1,0]$ είναι η $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$. Μία αντιπαράγωγος της $f(x)=x$ στο $[0,1]$ είναι η $G(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Έτσι, εφαρμόζοντας την (7.6.12) του Θεωρήματος 7.6.8 έχουμε

$$\int_{-1}^{0} x^2dx=[F(x)]_{-1}^{0}=0-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{1}{3},$$

και

$$\int_{0}^{1} xdx=[G(x)]_{0}^{1}=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10 που ακολουθεί, έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6},$$

το οποίο επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.6.7(ii).

iii) Εφαρμόζοντας τρεις φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως στο Παράδειγμα 7.3.3 (ii) υπολογίζεται ότι μία αντιπαράγωγος της $f(x)=x^3e^{-x}$ είναι η $F(x)=-(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}$, οπότε εφαρμόζοντας την (7.6.12) για το διάστημα $[1,11]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{1}^{11} x^3e^{-x}\,dx&=\left[-(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}\right]_{1}^{11}\\&=-(11^3+3\cdot 11^2+6\cdot 11+6)e^{-11}+(1^3+3\cdot 1^2+6\cdot 1+6)e^{-1}=-1766e^{-11}+16e^{-1}\cong 5.8566\end{aligned}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση riemannleft (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.4. (i)), με $a=1$, $b=11$ και $n=1000$, βρίσκουμε $\mathrm{I}=5.8583$, το οποίο σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών 1000 ορθογωνίων παραλληλογράμμων, που «πλησιάζουν» τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3e^{-x}$, είναι ίσο με 5.8583, τιμή που προσεγγίζει το πραγματικό αποτέλεσμα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των τύπων (7.6.12) και (7.6.8), παρατηρούμε ότι για $n\geq 23400$ η τιμή, που υπολογίζεται για το $\mathrm{I}=5.8566$, προσεγγίζει το πραγματικό αποτέλεσμα με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. ◊◊

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται οι σημαντικότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, μερικές από τις οποίες είναι γνωστές από το αόριστο ολοκλήρωμα, (βλέπε, Πρόταση 7.1.8 και σύγκρινε με την Πρόταση 7.6.10. (vi)). Η απόδειξη των ιδιοτήτων της ακόλουθης πρότασης μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα της βιβλιογραφίας (Γεωργίου, Ηλιάδης, & Μεγαρίτης, 2010; Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1985; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014) και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Πρόταση 7.6.10.
i) Αν η συνάρτηση f είναι μονότονη στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
ii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
iii) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$.
iv) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $c\in(a,b)$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

v) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $c,e,k \in [a,b]$ με $a \le c < e < k \le b$, τότε ισχύει

$$\int_c^e f(x)dx + \int_e^k f(x)dx + \int_k^c f(x)dx = 0 .$$

vi) Αν f,g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$ και $k,l \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $kf + lg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\int_a^b \big(kf(x) + lg(x)\big)dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx .$$

vii) Αν για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

viii) Αν f,g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$ και ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

ix) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

Παράδειγμα 7.6.11.
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{|x-1|}{|x-2|+1}dx .$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10. και τον ορισμό της απόλυτης τιμής

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \ge 1 \\ -(x-1), & \text{αν } x < 1 \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x \ge 2 \\ -(x-2), & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{|x-1|}{|x-2|+1}dx &= \int_0^1 \frac{-(x-1)}{-(x-2)+1}dx + \int_1^2 \frac{x-1}{-(x-2)+1}dx + \int_2^3 \frac{x-1}{x-2+1}dx = \\
&= \int_0^1 \frac{x-1}{x-3}dx - \int_1^2 \frac{x-1}{x-3}dx + \int_2^3 \frac{x-1}{x-1}dx = \\
&= \int_0^1 \frac{x-3+2}{x-3}dx - \int_1^2 \frac{x-3+2}{x-3}dx + \int_2^3 1dx = \\
&= \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-3}\right)dx - \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x-3}\right)dx + \int_2^3 1dx = \\
&= [x + 2\ln(3-x)]_0^1 - [x + 2\ln(3-x)]_1^2 + [x]_2^3 = \\
&= (1 + 2\ln 2 - 2\ln 3) - (2 + 2\ln 1 - 1 - 2\ln 2) + (3-2) = \\
&= 1 + 4\ln 2 - 2\ln 3.
\end{aligned}$$

◊◊

Εφαρμογή 7.6.12.
i) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και περιττή στο $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε ισχύει:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

ii) Αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και άρτια στο $[-a, a]$ με $a > 0$, τότε ισχύει:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Απόδειξη: i) Από την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 7.6.10. έχουμε:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Αν στη θέση της μεταβλητής x στο πρώτο ολοκλήρωμα θέσουμε $-x$, τότε τα αντίστοιχα άκρα μετατρέπονται σε α και 0, δηλαδή,

$$I = -\int_{a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Επιπλέον η f είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$I = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)dx,$$

από την οποία το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την (7.6.7).
ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη του (i), αρκεί να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της άρτιας συνάρτησης και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.6.6. (ii) η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{a}^{b} f(x)dx$, (βλέπε, Εφαρμογή 8.1.2), ισούται με το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τις κατακόρυφες ευθείες $x = a,\ x = b$ και τον άξονα $x'0x$. Κλείνοντας την ενότητα, διατυπώνουμε ένα θεώρημα, που είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, όπου το εμβαδόν της προαναφερθείσας επίπεδης περιοχής δίνεται από μία απλούστερη ισοδύναμη σχέση (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.14. (ii)), η οποία εξαρτάται μόνο από τα άκρα του $[a,b]$ και την τιμή της συνάρτησης σε ένα ενδιάμεσο σημείο του $[a,b]$, χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 7.6.13. (*Θεώρημα Μέσης Τιμής*)
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,\ b]$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Παρατήρηση 7.6.14.
i) Ο αριθμός $f(\xi) = \dfrac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a}$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.
ii) Η γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος 7.6.13. είναι η εξής: το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη της f, τις κατακόρυφες $x = a,\ x = b$ και τον άξονα $x'0x$, ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που έχει διαστάσεις $b-a$ (δηλαδή, η βάση του είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα a και b επί του $x'0x$) και ύψος ίσο με $f(\xi)$, για κάποιο $\xi \in [a,\ b]$.

7.7. Ολοκλήρωμα σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `int` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μίας συνάρτησης f της ανεξάρτητης μεταβλητής x, η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για τον υπολογισμό του *αόριστου ολοκληρώματος* $\int f(x)dx$, η εντολή `int` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση `f`
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.

Σύνταξη εντολής: `int(f,x)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int \sin(x+1)dx$ γράφουμε:

```
syms x
f= sin(x+1);
int(f,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
-cos(x+1)
```

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $I = \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^{x}} dx$ του Παραδείγματος 7.4.3.(i) γράφουμε:

```
syms x
f=1/(exp(2*x)-3*exp(x));
[I]= int(f,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
I = 1/(3*exp(x)) - x/9 + log(exp(x) - 3)/9
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(I)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{1}{3\exp(x)} - \frac{x}{9} + \frac{\log(\exp(x) - 3)}{9}$$

Για τον υπολογισμό του *ορισμένου ολοκληρώματος* $\int_a^b f(x)dx$ με $a<b$, η εντολή `int` δέχεται ως εισόδους με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:

- τη συνάρτηση `f`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.
- `α` το κάτω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι μείον άπειρο (`-Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.
- `b` το άνω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι άπειρο (`Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Σύνταξη εντολής: `int(f,x,α,b)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^1 (2x^2 - x - 1)dx$ και του γενικευμένου ολοκληρώματος $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, γράφουμε:

```
syms x
f=2*x^2-x-1;
 int(f,x,0,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
-5/6
```

Για το ολοκλήρωμα I γράφουμε:

```
syms x
f= exp(-x);
[I]= int(f,x,0,+Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
I = 1
```

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος με καμία από τις μεθόδους υπολογισμού, που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες Ενότητες 7.2-7.5 και τότε ο υπολογισμός γίνεται με προσεγγιστικές μεθόδους, οι οποίες στηρίζονται στον Ορισμό 7.6.5 και στους τύπους (7.6.5) και (7.6.8), περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει (Moler, 2010; Γεωργίου & Ξενοφώντος, 2007; Οδηγός Χρήσης Matlab). Όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την εντολή `quad` σε Matlab/Octave μπορούμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος.

Για τον *προσεγγιστικό* υπολογισμό του *ορισμένου ολοκληρώματος* $\int_a^b f(x)dx$ με $a<b$, η εντολή `quad` δέχεται ως εισόδους με τη σειρά που αναφέρονται στη συνέχεια:
- τη συνάρτηση `f`, που έχει οριστεί με την εντολή `inline`
- `α` το κάτω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι μείον άπειρο (`-Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.
- `b` το άνω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Το άκρο μπορεί να είναι άπειρο (`Inf`) στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Σύνταξη εντολής: `quad(f,α,b)`

Για παράδειγμα, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.6.8 και την (7.6.12) το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_1=\int_0^\pi \cos(x)dx$ υπολογίζεται ότι ισούται με

$$I_1=\int_0^\pi \cos(x)dx=\left[\sin(x)\right]_0^\pi=\sin(\pi)-\sin(0)=0\,.$$

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό `Ia` του ορισμένου ολοκληρώματος I_1 γράφουμε:

```
f = inline('cos(x)');
[Ia]= quad(f,0,pi)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η τιμή

```
Ia = -1.1102e-016
```

η οποία προσεγγίζει την πραγματική τιμή του I_1 με ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων.

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_2=\int_0^1 e^{x^2}dx$ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι καμία από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στις Ενότητες 7.2 και 7.3 δεν εφαρμόζεται. Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του `Ia` μπορούμε να γράψουμε:

```
f=inline(vectorize('exp(x.^2)')) ;
[Ia]= quad(f,0,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το αποτέλεσμα:

```
Ia = 1.4627
```

Παρατήρηση 7.7.1. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ είναι θετική σύμφωνα με την Πρόταση 7.6.10 (vii) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής, που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=e^{x^2}$, τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'0x$, ισούται με `Ia`, (βλέπε, Σχήμα 7.2).

Επίσης, χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, τους τύπους (7.6.5) και (7.6.8) και μεγάλες τιμές στο n, μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορετικές συναρτήσεις (functions), οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα και επαληθεύουν τα παραπάνω αποτελέσματα (βλέπε, Παρατήρηση 7.6.6 (ii)). Όπως στη συνάρτηση riemannleft στην Παρατήρηση 7.6.4. (i), κάνουμε κανονική διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a,b]=[0,1]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=(b-a)/n$. Θεωρούμε έναν τυχαίο αριθμό

$0 < r < 1$, χρησιμοποιώντας το r κατασκευάζουμε ένα σημείο x του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ και υπολογίζουμε το ύψος $f(x)$ του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Από τον (7.6.8) είναι φανερό ότι το ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών απείρου πλήθους ορθογωνίων παραλληλογράμμων, οπότε η τιμή του ολοκληρώματος προσεγγίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια για μεγάλες τιμές του n, γεγονός που διαπιστώνεται από την υλοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης.

```
function [I,r] = riemannrand(a,b,n)

   d=(b-a)/n;
   r=rand;
   I=0;

   for i=1:n
       x=a+(i+r-1)*d;
       f=exp(x^2);
       I=I+f;
   end
   I=I*d;
end
```

Εκτελώντας τρεις φορές την παραπάνω συνάρτηση για $n = 100$ προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές:

```
I = 1.4653     r = 0.6555

I = 1.4682     r = 0.8235
I = 1.4549     r = 0.0462
```

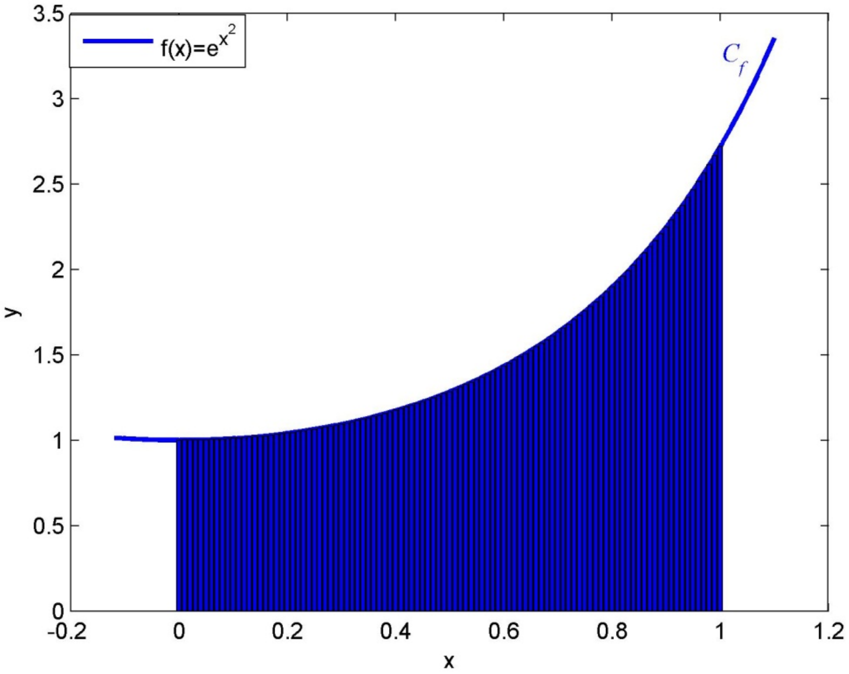
Παρατηρήστε ότι, σε μικρές τιμές του r, το I προσεγγίζει την τιμή του `Ia = 1.4627` με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

Εκτελώντας τρεις φορές την παραπάνω συνάρτηση για $n = 5000$ προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές:

```
I = 1.4627     r = 0.6555

I = 1.4628     r = 0.9502
I = 1.4625     r = 0.0344
```

Παρατηρήστε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του r, το I προσεγγίζει την τιμή του `Ia` με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.



Σχήμα 7.2: Γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x^2}$ στο $[0,1]$.

◊◊

7.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα στις 7.8.1-7.8.14:

7.8.1. $I_1 = \int \frac{x-2}{x^3-3x-2}dx$.

Υπόδειξη: Παραγοντοποιήστε τον παρονομαστή και εφαρμόστε τον τύπο (5) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_1 = -\frac{1}{x+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.2. $I_2 = \int \sin^7(x)\cos(x)dx$.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $\sin(x) = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (3) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_2 = \frac{\sin^8(x)}{8} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.3. $I_3 = \int \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}dx$.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $e^{-x} = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (6) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_3 = \ln\left|e^{-x} - 2\right| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.4. $I_4 = \int \frac{dx}{x\ln^2(3x)}$.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $\ln(3x) = t$ και εφαρμόστε τον τύπο (3) του Πίνακα 7.1.10.

Απάντηση: $I_4 = -\frac{1}{\ln(3x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.5. $I_5 = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $t = x^4$.

Απάντηση: $I_5 = \frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.6. $I_6 = \int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}dx$, $a,b > 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.2.3(ii).

Απάντηση: $I_6 = \frac{1}{b}\cosh^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.7. $I_7 = \int \frac{1}{4x^2+9}dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.2.5(ii).

Απάντηση: $I_7 = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.8. $I_8 = \int (3x^2+1)\tan^{-1}(x)\,dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Απάντηση: $I_8 = (x^3+x)\tan^{-1}(x) - \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.9. $I_9 = \int \frac{3x^2+15}{(x-1)^2(x^2-4x+6)}dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων.

Απάντηση: $I_9 = 6\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - 3\ln(x^2-4x+6) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7.8.10. $I_{10}=\int\left(\sin^2(x)+\cos^2(2x)\right)dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο (I), της Ενότητας 7.5, και τα Παραδείγματα 7.5.1(ii) και (vi).

Απάντηση: $I_{10}=x-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+\dfrac{1}{8}\sin(4x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

7.8.11. $I_{11}=\int\dfrac{1}{3\sin^2(x)+5\cos^2(x)}dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο (III), της Ενότητας 7.5.

Απάντηση: $I_{11}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\tan(x)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

7.8.12. $I_{12}=\int\dfrac{\sin^4(x)}{\cos(x)}dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση της Εφαρμογής 7.5.2.(ii).

Απάντηση: $I_{12}=-\dfrac{\sin^3(x)}{3}-\sin(x)-\dfrac{1}{2}\ln\left|\sin(x)+1\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\sin(x)-1\right|+c,\ c\in\mathbb{R}$.

7.8.13. $I_{13}=\int_0^{\pi}x\sin(x)dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Απάντηση: $I_{13}=\pi$.

7.8.14. $I_{14}=\int_{-1}^{1}x^{2015}e^{x^2}dx$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 7.6.12(i).

Απάντηση: $I_{14}=0$.

7.8.15. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a,b]$, και το φυσικό αριθμό n, που να υλοποιεί για τη συνάρτηση $f(x)=x^3+1$, το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\dfrac{b-a}{n}$, όπου x_i είναι το δεξιό άκρο του υποδιαστήματος $\left[x_{i-1},x_i\right]$ θεωρώντας την κανονική διαμέριση του $[a,b]$.

Στη συνέχεια, υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]=[-1,2]$ με τη χρήση της εντολής int και επαληθεύστε την ορθότητα της συνάρτησης υπολογίζοντας το όριο όπως στην (7.6.8) με $n=1000$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 7.7.1.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος I). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). *Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). *Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). *Ολοκληρωτικός λογισμός I*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός I*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. τόμος I). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση I* (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση I*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave. from http://www.gnu.org/software/octave

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

7.1. Να αποδείξετε ότι, αν για τις συναρτήσεις F και G ισχύει $F'(x)=G'(x)$, για κάθε $x\in(a,b)$, τότε $F(x)=G(x)+c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 7.1.3).

7.2. Να βρεθεί μία αντιπαράγωγος των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $3x^4\left(2x^5+9\right)^3$ ii) $\left(5x^2+1\right)\sqrt{5x^3+3x-2}$

iv) $\dfrac{7x}{\sqrt{3x^2+5}}$ iv) $\left(x^3-6\right)^3\left(2x^5-12x^2\right)$

v) $\dfrac{7x^4-10x^2+4}{2x^2}$ vi) $\sqrt{\dfrac{5x^2}{3x^2+7}}$

7.3. Να αποδείξετε ότι η ισότητα $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ δεν ισχύει στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $F(x)=\begin{cases}\ln|x|, & \text{αν } x>0\\ 2+\ln|x|, & \text{αν } x<0\end{cases}$

και παρατηρήστε ότι ενώ αποτελεί αντιπαράγωγο της $\frac{1}{x}$ δεν μπορεί να γραφεί ως $F(x)=\ln|x|+c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

7.4. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int e^x(x^2+x+1)\,dx$ ii) $\int(3x+5)^{10}\,dx$

iii) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$ iv) $\int\cos(3x-2)\,dx$

v) $\int\dfrac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ vi) $\int\sin(5x)\cos(5x)\,dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.5. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Αν $I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $I_n=\dfrac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$.

Υπόδειξη: Δείτε στον Πίνακα 7.1.10.

7.6. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I_n=\int\ln^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 2$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε I_1 και I_2. Στη συνέχεια παρατηρήστε και αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή έναν αναδρομικό τύπο του I_n.

Απάντηση: $I_n=x\ln^n x-n\cdot I_{n-1}$

7.7. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int\dfrac{dx}{x^2-4x+13}$ ii) $\int\sqrt{1-4x-x^2}\,dx$

iii) $\int\sqrt{-x^2-2x}\,dx$ iv) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

Υπόδειξη: Δημιουργήστε άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε τις Εφαρμογές 7.2.3, 7.2.5.
Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.8. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I_n=\int\cos^n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}-\{1\}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλογη μεθοδολογία με αυτήν της Εφαρμογής 7.3.4.

Απάντηση: $I_n=\dfrac{\cos^{n-1}(x)\cdot\sin(x)+(n-1)I_{n-2}}{n}$

7.9. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int x^3\cos(2x)\,dx$ ii) $\int x^4 e^{-x}dx$

iv) $\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$ iv) $\int \sin^{-1}(x)\,dx$

v) $\int e^{-3x}\cos(5x-2)\,dx$ vi) $\int \left(x^2-3x+1\right)\sin(4x)\,dx$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.10. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x\,dx}{(x-3)^2}$ ii) $\int \frac{x^3}{x\left(x-1\right)^3}dx$

iii) $\int \frac{x^5+2}{x^3-1}dx$ iv) $\int \frac{4x^2-6x+1}{x^3-x^2}dx$

v) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ vi) $\int \frac{3x^3+10x^2-x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

vii) $\int \frac{x+2}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx$ viii) $\int \frac{x}{(x-3)(x+3)(x^2+1)}dx$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.11. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^3(x)}dx$ ii) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^7(x)}dx$

iii) $\int \sin^9(x)\cos^{2016}(x)dx$ iv) $\int \sin^{2014}(x)\cos^5(x)dx$

v) $\int \sin^{10}(x)\cos^{16}(x)dx$ vi) $\int \sqrt{\left(1+\cos(x)\right)^2+\sin^2(x)}dx$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 7.5. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.12. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

i) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ ii) $\int_{-1}^{0} (1-x)e^{-x}dx$

iii) $\int_{0}^{\pi} (2x+6)\cos(2x)dx$ iv) $\int_{0}^{1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

7.13. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και άρτια στο $[-a,\,a]$ με $a>0$, τότε ισχύει: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Υπόδειξη: Ανάλογα με την Εφαρμογή 7.6.12.

7.14. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a,b]$, και το φυσικό αριθμό n, για να υπολογίζει προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2}$ κάνοντας κανονική διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας τα μέσα των υποδιαστημάτων, αντί να χρησιμοποιεί την αρχή των υποδιαστημάτων, όπως υλοποιείται στη συνάρτηση riemannleft ή ένα τυχαίο σημείο των υποδιαστημάτων, όπως στη συνάρτηση riemannrand. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2}$ στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]=[0,1]$ και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την υλοποίηση της συνάρτησης riemannleft (Παρατήρηση 7.6.4. (i)) και της συνάρτησης riemannrand (Παρατήρηση 7.7.1).