ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης

…Οι όροι άπειρο και απειροστό σημαίνουν ποσότητες που κάποιος μπορεί να θεωρήσει όσο μεγάλες ή όσο μικρές επιθυμεί, έτσι τα σφάλματα που πραγματοποιούνται είναι μικρότερα από κάθε αριθμό που μπορούμε να θεωρήσουμε ώστε δεν υπάρχει σφάλμα, τα απειροστά δεν είναι πραγματικοί αλλά πλασματικοί αριθμοί, που ωστόσο διέπονται από τους ίδιους νόμους με τους πραγματικούς….

περιοδικό Acta 1689

...Είμαι τόσο πολύ υπέρ του πραγματικού απείρου ώστε, αντί να δεχτώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης είναι, δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων.

επιστολή του Leibniz προς S. Foucher δημοσιεύθηκε στο Journal des Savants

…Τα διαφορικά είναι όπως οι κόκκοι της άμμου σε σχέση με τη γη, και όπως η γη σε σχέση με την απόσταση δύο απλανών αστέρων…

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι κανόνες παραγώγισης των πραγματικών συναρτήσεων και αποδεικνύονται οι παράγωγοι των σημαντικότερων πραγματικών συναρτήσεων. Δίνεται ο ορισμός του διαφορικού μίας πραγματικής συνάρτησης και παρουσιάζονται γραμμικές προσεγγίσεις ορισμένων συναρτήσεων μέσα από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές.

Προαπαιτούμενη γνώση
Όρια πραγματικών συναρτήσεων, συνέχεια συναρτήσεων.

5.1 Έννοια παραγώγου

Ορισμός 5.1.1. Έστω μία συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$.

Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** (differentiable) στο x_0, αν το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (5.1.1)$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Η οριακή τιμή ονομάζεται **παράγωγος** της συνάρτησης **στο** x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Παράδειγμα 5.1.2

Έστω η συνάρτηση $f:(-3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } -3 < x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$

Είναι συνεχής; Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και να ορίσετε την παράγωγο της f, όπου η παράγωγος υπάρχει. Να γίνει η γραφική της παράσταση της f.

Στο $x \in (-3,0) \cup (0,+\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, επειδή σε κάθε διάστημα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο στο $x_0 = 0$ τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

Επειδή $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο $x_0 = 0$ είναι ίσα, άρα

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 .$$

Επιπλέον, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Άρα, η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Από την (5.1.1) και $f(0) = 0$, έχουμε:

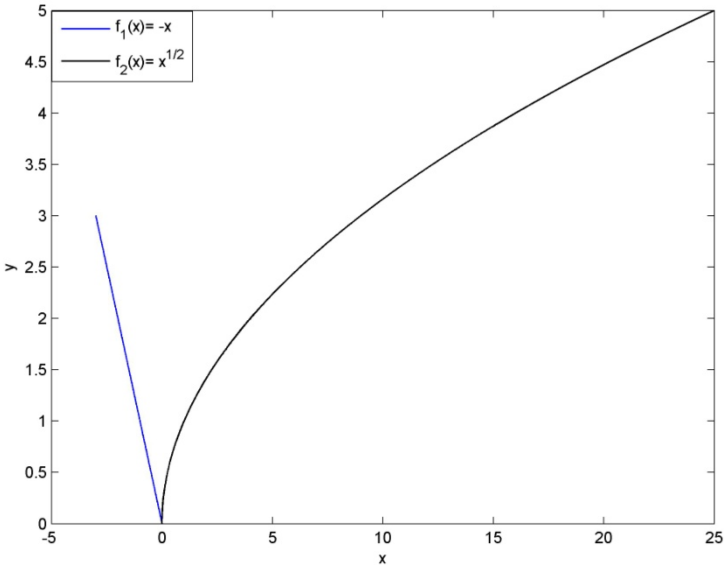
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = +\infty \qquad (5.1.2)$$

Από τις διαφορετικές τιμές στην (5.1.2) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) από τον Πίνακα 5.2 υπολογίζεται ότι η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -3 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

Στο Σχήμα 5.1 διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, επειδή στο σημείο αυτό δεν ορίζεται εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη.



Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της f του Παραδείγματος 5.1.2

◊◊

Ορισμός 5.1.3. Έστω μία συνάρτηση f, το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f και $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Η **εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της** f **στο** $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_0, f(x_0))$ με κλίση $f'(x_0)$, δηλαδή η **εξίσωση της ευθείας** είναι :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.1.3}$$

Παράδειγμα 5.1.4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, και να βρείτε την παράγωγο όπου υπάρχει. Ορίζετε η εφαπτομένη στο $A(2, f(2))$; Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της f και της εφαπτόμενης ευθείας, αν υπάρχει.

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

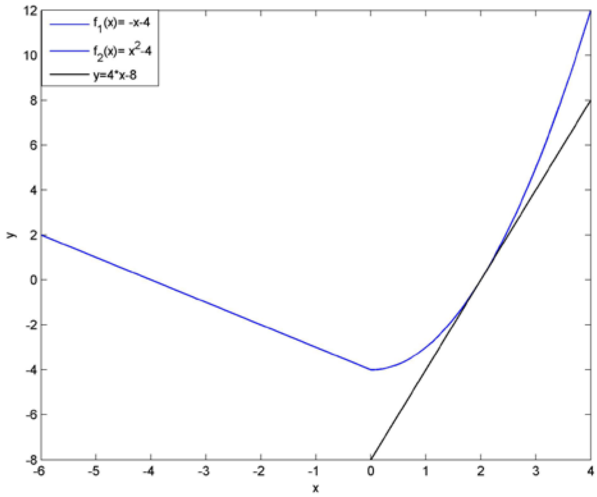
Εξετάζουμε την παράγωγο αν υπάρχει στο $x_0 = 0$. Από την (5.1.1) και $f(0) = 0^2 - 4 = -4$, έχουμε:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 4 - (-4)}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4 - (-4)}{x} = 0 \tag{5.1.4}$$

Από τις διαφορετικές τιμές στην (5.1.4) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Στο Σχήμα 5.2 διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, επειδή στο σημείο αυτό δεν ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) από τον Πίνακα 5.2 υπολογίζεται ότι η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν} \quad x < 0 \\ 2x, & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Η παράγωγος στο $x_1 = 2$ ορίζεται από την (5.1.5) και είναι $f'(2) = 4$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την (5.1.3) και είναι $y - 0 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 8$.



Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση της f και της εφαπτόμενης ευθείας του Παραδείγματος 5.1.4

◊◊

5.1. Πίνακας με κανόνες παραγώγισης

1.	$\left(c \cdot f(x)\right)' = cf'(x)$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$\left(a\, f(x) + bg(x)\right)' = af'(x) + bg'(x)$	$a, b \in \mathbb{R}$
3.	$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(g(x)\right)'$	
4.	$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$	
5.	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{\left(f(x)\right)' \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(g(x)\right)'}{g^2(x)}$	
6.	$\left((f \circ g)(x)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$	
7.	$\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$	

5.2. Πίνακας παραγώγισης στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x)$	**Παράγωγος** $f'(x)$	**Πεδίο ορισμού**
1.	c	$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
2.	$x^n,\ n \in \mathbb{R}$,	$\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
3.	e^x	$\left(e^x\right)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$\ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
5.	a^x, $a > 0,\ a \neq 1$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\sin(x)$	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\tan(x)$	$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
9.	$\cot(x)$	$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
10.	$\sec(x)$	$(\sec(x))' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
11.	$\operatorname{co\,sec}(x)$	$(\operatorname{co\,sec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
12.	$\sin^{-1}(x)$	$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
13.	$\cos^{-1}(x)$	$\left(\cos^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
14.	$\tan^{-1}(x)$	$\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\cot^{-1}(x)$	$\left(\cot^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\sinh(x)$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\cosh(x)$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
18.	$\tanh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$
19.	$\coth(x)$	$(\coth(x))' = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{(\sinh(x))^2}$	$x \in \mathbb{R}$

20.	$\sinh^{-1}(x)$	$\left(\sinh^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
21.	$\cosh^{-1}(x)$	$\left(\cosh^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$
22.	$\tanh^{-1}(x)$	$\left(\tanh^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1,1)$

5.2. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `diff` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων οποιασδήποτε τάξης μίας συνάρτησης f με ανεξάρτητη μεταβλητή x, η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές `syms` και `diff` είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για τον υπολογισμό της παραγώγου η εντολή `diff` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση `f`
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`
- την τάξη της παραγώγου `n`.
  Αν δεν σημειωθεί τιμή για το `n`, τότε υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος.
  Αν `n` = 0, τότε υπολογίζεται η συνάρτηση `f`

Σύνταξη εντολής: `diff(f,x,n)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=e^{2x}-3x^3e^x$ γράφουμε:

```
syms x
f = exp(2*x)-3*x^3*exp(x);
diff(f,x,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
2*exp(2*x) - 9*x^2*exp(x) - 3*x^3*exp(x)
```

Για τον υπολογισμό της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\sin(2x)-x^2\cos(x)$ γράφουμε:

```
syms x
f = sin(2*x)-x^2*cos(x);
[f1]=diff(f,x,1)
[f2]=diff(f,x,2)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
f1 = 2*cos(2*x) + x^2*sin(x) - 2*x*cos(x)
f2 = x^2*cos(x) - 2*cos(x) - 4*sin(2*x) + 4*x*sin(x)
```

5.3. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

5.3.1 Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $f(x) = xe^{-x^2}$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κανόνα γινομένου και σύνθετης συνάρτησης από τον Πίνακα 5.1.

Απάντηση: Η παράγωγος είναι $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from http://www.gnu.org/software/octave

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

5.1. Να αποδειχθούν οι κανόνες παραγώγισης, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1., χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 5.1.1.

5.2. Να αποδειχθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στον Πίνακα 5.2. χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των συναρτήσεων που αναφέρονται και τους κανόνες παραγώγισης από τον Πίνακα 5.1.