# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης

…Αγνοώ το πώς με βλέπει ο κόσμος˙ αλλά στον εαυτό μου, φαίνομαι σαν να μην ήμουν τίποτα άλλο από ένα αγοράκι που παίζει στην ακρογιαλιά και κατά καιρούς ανακαλύπτει μια γυαλιστερή πέτρα ή ένα όστρακο πιο όμορφο από τα συνηθισμένα˙ ενώ ο μεγάλος ωκεανός της αλήθειας απλώνεται μπροστά μου χωρίς να τον γνωρίζω.

…Ο Θεός δημιούργησε τα πάντα με αριθμούς, βάρος και μέτρο.

…Δεν θα ορίσω το χρόνο, το χώρο, τον τόπο και την κίνηση, όπως αυτά είναι γνωστά σε όλους.

Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Όριο και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης

**Σύνοψη**
*Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης, η οποία είναι θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού. Δίνονται ο ορισμός και οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται κοντά σ' έναν πραγματικό αριθμό ή όταν αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα. Μελετώνται τα όρια χαρακτηριστικών συναρτήσεων, όπως πολυωνυμικών, ρητών, τριγωνομετρικών, κ.α.. Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται «εύκολα», όταν η μεταβολή των τιμών της συνάρτησης γίνεται με «συνεχή» τρόπο, η συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται συνεχής συνάρτηση. Διατυπώνονται οι ιδιότητες και οι σημαντικότερες προτάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις, από τις οποίες προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.*

**Προαπαιτούμενη γνώση**
*Πεδίο ορισμού συνάρτησης, τιμή συνάρτησης, φραγμένη συνάρτηση, οριακή τιμή ακολουθίας*

## 4.1 Η έννοια του ορίου

Πολλά φυσικά φαινόμενα σχετίζονται με τη μεταβολή κάποιων ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα, η επιτάχυνση ενός κινητού, η οποία είναι αποτέλεσμα της μεταβολής της ταχύτητάς του, που με τη σειρά της είναι αποτέλεσμα της μεταβολής του διαστήματος στη μονάδα του χρόνου. Η μαθηματική θεωρία, η οποία αναπτύχθηκε στα τέλη του 16ου αιώνα, για να μελετήσει τον τρόπο μεταβολής διαφόρων μεγεθών λέγεται *λογισμός* και οφείλεται στους μαθηματικούς Isaac Newton και Gottfried Wihelm von Leibniz.

Ο λογισμός χωρίζεται σε δύο μεγάλους σημαντικούς κλάδους:
α) το *διαφορικό λογισμό*, (όρια, παράγωγοι και εφαρμογές τους, όπως μονοτονία και ακρότατες τιμές συνάρτησης) και
β) τον *ολοκληρωτικό λογισμό*, (ολοκληρώματα και εφαρμογές τους, όπως εμβαδό επίπεδης περιοχής, όγκος στερεού, μήκος καμπύλης, κ.α.).
Θεμελιώδης έννοια-εργαλείο του λογισμού είναι η έννοια του *ορίου* συνάρτησης. Η λέξη «όριο» χρησιμοποιείται για μία τιμή μίας συνάρτησης $f$, έστω $\ell$, την οποία πλησιάζουν οι τιμές $f(x)$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή $x$ πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό ή αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα.

Η ακριβής διατύπωση του ορισμού του ορίου χρειάζεται τις ακόλουθες έννοιες.

**Ορισμός 4.1.1.** Το σημείο $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A$, αν για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό $\varepsilon$, (συνήθως αρκετά μικρό), ισχύει

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} \neq \varnothing , \tag{4.1.1}$$

δηλαδή, όταν το σύνολο $A$ εκτός του σημείου $x_0$ έχει πάντοτε κοινά σημεία με οποιαδήποτε ανοικτό διάστημα, που περιέχει το $x_0$. Το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ονομάζεται **περιοχή** κέντρου $x_0$, συμβολίζεται με $\pi(x_0, \varepsilon)$, ή **γειτονιά του σημείου** $x_0$ και **ακτίνας** $\varepsilon$.
Στη περίπτωση που υπάρχει $\varepsilon > 0$, για το οποίο ισχύει $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A - \{x_0\} = \varnothing$, τότε το $x_0$ ονομάζεται **απομονωμένο σημείο** του συνόλου $A$.

**Παραδείγματα 4.1.2.**

i) Έστω $A=[-2,5)$, τότε κάθε σημείο του $A$ είναι σημείο συσσώρευσης.

Πράγματι, αν $-2<x_0<5$ και $d_1$, $d_2$ είναι οι αποστάσεις του $x_0$ από τα σημεία $-2$ και 5 αντίστοιχα, θεωρούμε $d_0=\min\{d_1,d_2\}$. Έτσι, αν $0<\varepsilon<d_0$, το $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\bigcap A-\{x_0\}\subset A$, ενώ αν $\varepsilon>d_0$, τότε

$$(x_0-d_0,x_0+d_0)\subseteq(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\bigcap A-\{x_0\}.$$

Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση επαληθεύεται η (4.1.1), δηλαδή, $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\bigcap A-\{x_0\}\neq\varnothing$.

Αν $x_0=-2$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$, ισχύει $(-2-\varepsilon,-2+\varepsilon)\bigcap A-\{x_0\}=(-2,-2+\varepsilon)\neq\varnothing$.

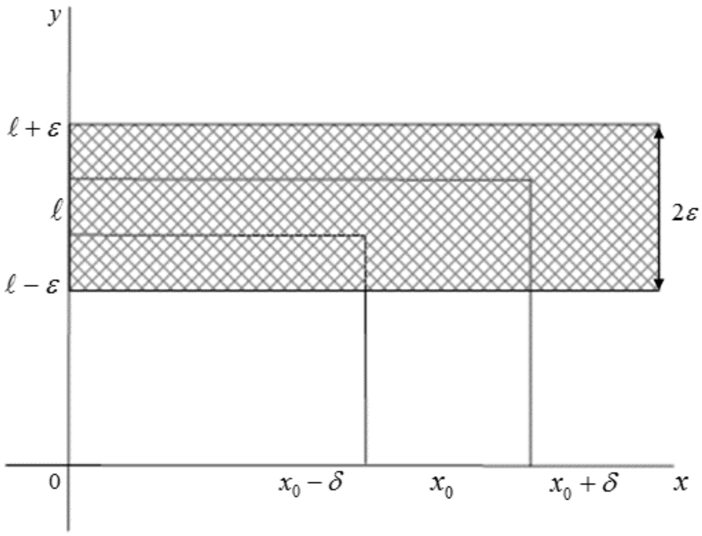
Γενικότερα, αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο, ότι σημείο συσσώρευσης είναι κάθε σημείο των διαστημάτων της μορφής $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,b)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$ και $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

ii) Το σύνολο $A=(-3,2]\bigcup\{4\}$, το $x=4$ αποτελεί ένα απομονωμένο σημείο, επειδή για $\varepsilon=1$, το διάστημα $(4-1,4+1)=(3,5)$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το $A$. ◊◊

**Ορισμός 4.1.3.** Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq R$ και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$. Αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό $\varepsilon$ υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός $\delta$ (εξαρτώμενος από τον $\varepsilon$) τέτοιος ώστε, για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, τότε ο πραγματικός αριθμός $\ell$ ονομάζεται **όριο** (**οριακή τιμή**) της συνάρτησης $f$ στο $x_0$. Η οριακή τιμή της $f$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή $x$ τείνει στο $x_0$ (σημειώνεται $x\to x_0$), συμβολίζεται με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Δηλαδή,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ (4.1.2)




**Σχήμα 4.1:** Η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης f.

Στο Σχήμα 4.1 αναπαριστάνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Παρατηρούμε, στο Σχήμα 4.1, ότι, η έννοια του ορίου της συνάρτησης $f$ στο σημείο $x_0$ ισοδυναμεί με το εξής:
επί του άξονα $y'0y$ όσο μικρό διάστημα $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ επιλεγεί γύρω από το $\ell$, δηλαδή, όσο μικρή ακτίνα $\varepsilon > 0$ χρησιμοποιηθεί, υπάρχει πάντα μία ακτίνα $\delta > 0$ τέτοια ώστε, **όλα** τα $x \in A$ με $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, (ισοδύναμα, $|x - x_0| < \delta$), έχουν εικόνες $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, (ισοδύναμα, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).
Εδώ να σημειώσουμε ότι, το ανοικτό διάστημα στον άξονα $y'0y$ της μορφής $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ είναι ένα συμμετρικό διάστημα με κέντρο το $\ell$ μήκους $2\varepsilon$, και αντίστοιχα στον άξονα $x'0x$ το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι επίσης ένα συμμετρικό διάστημα με κέντρο το $x_0$ μήκους $2\delta$.

**Παρατηρήσεις 4.1.4**

i) Στον Ορισμό 4.1.3 απαιτείται το $x_0$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε $x_0 \in A$, θεωρούμε (παντού) ότι το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$.
ii) Στην (4.1.2) του Ορισμού 4.1.3, αν θεωρήσουμε ως συνάρτηση $F(x) = f(x) - \ell$ μπορούμε να γράφουμε ισοδύναμα $\lim_{x \to x_0} \left( f(x) - \ell \right) = 0$.
iii) Από τον Ορισμό 4.1.3 προκύπτει ότι: αν υπάρχει **κάποιο** $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε **για κάθε** $\delta > 0$, να ισχύει $|f(x) - \ell| > \varepsilon$, όταν $x \in A$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τότε η συνάρτηση $f$ **δεν έχει πραγματικό όριο** και ονομάζεται **αποκλίνουσα**, (βλέπε, Ορισμό 2.5.4 και Ορισμό 2.7.1.).

**Πρόταση 4.1.5.** Το $x_0$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A$, αν και μόνο αν υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία σημείων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $A - \{x_0\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι το $x_0$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A$. Μπορούμε να επιλέξουμε ως $\varepsilon > 0$, το $\varepsilon = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\left( x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right) \cap A - \{x_0\} \neq \varnothing,$$

το οποίο σημαίνει ότι, υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A - \{x_0\}$, τέτοια ώστε

$$x_n \in \left( x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 4.1.3 με το γεγονός ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ είναι μηδενική, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0.$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει μία ακολουθία

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A - \{x_0\}, \tag{4.1.3}$$

τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Από τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας, (βλέπε, Κεφάλαιο 2), για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \tag{4.1.4}$$

Συνδυάζοντας (4.1.3) με (4.1.4) συμπεραίνουμε ότι το $x_0$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A$, (βλέπε, Ορισμό 4.1.1), το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ◊◊

**Παραδείγματα 4.1.6.**

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) η συνάρτηση $f:[2,5)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=4x+2$, έχει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=14$.

ii) η σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$, έχει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

iii) η ταυτοτική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$, έχει $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

i) Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 4.1.3 και την (4.1.2), για τυχαίο $\varepsilon>0$ αναζητούμε $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in[2,5)$ με $|x-3|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-14|<\varepsilon$. Επειδή

$$|f(x)-14|<\varepsilon\Rightarrow|4x+2-14|<\varepsilon\Rightarrow|4(x-3)|<\varepsilon\Rightarrow|x-3|<\frac{\varepsilon}{4},$$

θεωρούμε $0<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$. Επομένως, για κάθε $x\in[2,5)$ με $|x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$ ισχύει

$$|f(x)-14|=|4(x-3)|=4|x-3|<4\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,$$

το οποίο επαληθεύει την (4.1.2), εφόσον για το τυχαίο $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{4}\right)$, τέτοιο ώστε $|f(x)-14|<\varepsilon$, για κάθε $x\in[2,5)$ με $|x-3|<\delta$.

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax+b$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=ax_0+b$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.1).

ii) Για τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, μπορούμε να γράψουμε $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $0<\delta<\varepsilon$, τότε προφανώς επαληθεύεται η (4.1.2), επειδή για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-c|<\varepsilon$.

Επομένως, το όριο μίας σταθερής συνάρτησης **δεν εξαρτάται** από την τιμή $x_0$ στην οποία τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή και ισούται πάντα με την ίδια τη σταθερά.

iii) Για την ταυτοτική συνάρτηση $f(x)=x$, είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, μπορούμε να γράψουμε $|f(x)-x_0|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\varepsilon$. Επομένως, για να επαληθεύεται η (4.1.2), αρκεί να επιλέξουμε $\delta=\varepsilon$. ◊◊

**Εφαρμογή 4.1.7.** Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, ισχύουν

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin(x)=\sin(x_0)$,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos(x)=\cos(x_0)$.

## Απόδειξη:

i) Αρχικά αποδεικνύεται ότι, για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$|\sin(x)-\sin(x_0)|\le|x-x_0|. \tag{4.1.5}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1),

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y),\qquad \sin(-x)=-\sin(x),\qquad \cos(-x)=\cos(x)$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin(x)=\sin\left(\frac{x-x_0}{2}+\frac{x+x_0}{2}\right)=\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right),$$

και

$$\sin(x_0)=\sin\left(\frac{x+x_0}{2}+\frac{-x+x_0}{2}\right)=\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{-x+x_0}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{-x+x_0}{2}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(-\frac{x-x_0}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(-\frac{x-x_0}{2}\right).$$
$$=\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ανισώσεις

$$|\sin(x)|\le|x|, \quad \text{και} \quad |\cos(x)|\le 1,$$

αποδεικνύεται η (4.1.5), επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$|\sin(x)-\sin(x_0)|=2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|=2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|$$
$$\le 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le 2\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|$$

Είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, από την (4.1.5) έχουμε $|\sin(x)-\sin(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon$. Επομένως, για να επαληθεύεται η (4.1.2), αρκεί να επιλέξουμε $\delta=\varepsilon$.

ii) Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως στο (i), χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα (7) για το συνημίτονο από τον Πίνακα 1.5.1, και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει τη σχέση μεταξύ ορίου συνάρτησης και ορίου ακολουθίας, η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.2). Επίσης, ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη της (Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

**Πρόταση 4.1.8.** Έστω η συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Η $f$ έχει όριο τον αριθμό $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $x$ τείνει στο $x_0$, δηλαδή, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A-\{x_0\}$, που συγκλίνει στο $x_0$, η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\ell$.

Ερμηνεύοντας την Πρόταση 4.1.8, παρατηρούμε ότι, αν μία συνάρτηση $f$ έχει όριο τον αριθμό $\ell$ στο σημείο $x_0$, τότε, αν επιλεγεί οποιοσδήποτε τρόπος για να «πλησιάσει» το $x$ στο $x_0$, δηλαδή, οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A-\{x_0\}$ και αν επιλεγεί τέτοια ώστε $x_n\to x_0$, τότε οι εικόνες $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό, που ταυτίζεται με το όριο $\ell$ της συνάρτησης $f$.

**Παρατηρήσεις 4.1.9.**

i) Αν μία συνάρτηση $f$ έχει **οριακή τιμή** $\ell\in\mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0$, τότε αυτή είναι **μοναδική**.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές οριακές τιμές, έστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell'$, με $\ell\ne\ell'$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μία ακολουθία σημείων (διαφορετικών του $x_0$), που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f$, η οποία συγκλίνει στο $x_0$. Επειδή το όριο μίας ακολουθίας, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό (βλέπε, Κεφάλαιο 2), τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8, για την ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει η

μοναδικότητα του ορίου της, συνεπώς $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell = \ell'$, δηλαδή, η αρχική υπόθεση $\ell \neq \ell'$ δεν ισχύει. Άρα, το όριο της συνάρτησης $f$, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.

ii) Από την ισοδυναμία, που διατυπώνεται στην Πρόταση 4.1.8, είναι φανερό ότι, αν δεν υπάρχει $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων (διαφορετικών του $x_0$), που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $f$, η οποία συγκλίνει στο $x_0$, ενώ η αντίστοιχη ακολουθία $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει.

iii) Συνδυάζοντας τη μοναδικότητα της οριακής τιμής μίας συνάρτησης $f$ σε κάποιο σημείο $x_0$ με την Πρόταση 4.1.8, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, όταν υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του πεδίου ορισμού της $f$, που συγκλίνουν στο $x_0$ (δηλαδή, $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$), και οι αντίστοιχες ακολουθίες των εικόνων τους $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(f(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν διαφορετικά όρια, τότε **δεν υπάρχει** $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Η παρούσα παρατήρηση αποτελεί έναν τρόπο απόδειξης, όταν το όριο μίας συνάρτησης δεν υπάρχει.

**Παράδειγμα 4.1.10.**

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, στο σημείο $x_0 = 0$.

Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι οποίες συγκλίνουν στο μηδέν (γιατί;). Οι ακολουθίες των εικόνων τους $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(f(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερές, επειδή οι γενικοί όροι τους είναι

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1, \quad \text{και} \quad f(y_n) = \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Συνεπώς, ως σταθερές ακολουθίες συγκλίνουν στο 1 και 0, αντίστοιχα. Επομένως, το όριο της συνάρτησης $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει, (βλέπε, Παρατήρηση 4.1.9 (iii)). ◊◊

## 4.2 Ιδιότητες των ορίων

Ο υπολογισμός του ορίου συνάρτησης σε σημείο, αποδεικνύοντας την (4.1.2), είναι τις περισσότερες φορές επίπονος και δύσχρηστος, είναι όμως αναγκαίος για την απόδειξη των ιδιοτήτων του ορίου, οι οποίες διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.2.1.** Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, όπου $A\cap B\neq\varnothing$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A\cap B$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$.

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$ .

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, αν $b\neq 0$.

iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^n(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ .

v) Για κάθε $x\in A$, αν $f(x)\geq 0$, και $a>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}$ .

**Απόδειξη:** Η απόδειξη των τριών πρώτων ιδιοτήτων στην (i)-(iii) είναι άμεση εφαρμογή του ορισμού των πράξεων των συναρτήσεων, (βλέπε, Κεφάλαιο 1), και αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.3).

iv) Η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $n=2$, αν θέσουμε $f=g$ στην παραπάνω ιδιότητα (ii) του γινομένου έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot f(x)\right)=a\cdot a=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^2$$, άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει.

Θεωρούμε ότι ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό $k$ , δηλαδή, ότι ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^k(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f^{k-1}(x)\cdot f(x)\right)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^k,\ \text{(υπόθεση επαγωγής).}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ιδιότητα στην (iv) ισχύει και για $k+1$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) και την υπόθεση της επαγωγής μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{k+1}(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f^k(x)\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f^k(x)\right)\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{k+1},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για $k+1$. Συνεπώς η ιδιότητα στην (iv) ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$ .

v) Από την (4.1.2), (βλέπε, Ορισμό 4.1.3), και την υπόθεση, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$, έχουμε ότι :

για κάθε $\varepsilon>0$, και $\varepsilon\sqrt{a}>0$, υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιος ώστε αν $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$, τότε ισχύει

$$|f(x)-a|<\varepsilon\sqrt{a}\ . \tag{4.2.1}$$

Αν επιλέξουμε ως $\varepsilon$ τον πραγματικό θετικό αριθμό $\varepsilon\sqrt{a}$ , και Επειδή από την υπόθεση είναι $\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}>0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{(\sqrt{f(x)}-\sqrt{a})(\sqrt{f(x)}+\sqrt{a})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}}\right|=\left|\frac{f(x)-a}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}}\right|=\frac{|f(x)-a|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}},$$

την οποία συνδυάζοντάς τη με την (4.2.1) προκύπτει ότι

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{a}\right|=\frac{|f(x)-a|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}}\leq\frac{|f(x)-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon\ .$$

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, με $|x - x_0| < \delta$, το οποίο επαληθεύει την (4.1.2) στον Ορισμό 4.1.3, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◊◊

**Παραδείγματα 4.2.2.**

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot g(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$, για κάθε $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

iii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2} = -\dfrac{2}{3}$.

iv) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 7x + 10} = -\dfrac{1}{3}$.

v) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, για κάθε $a > 0$.

i) Πράγματι, συνδυάζοντας την ιδιότητα (ii) της Πρότασης 4.2.1, θέτοντας $f(x) = c$, με το συμπέρασμα του Παραδείγματος 4.1.6 (ii) προκύπτει το ζητούμενο.

ii) Έστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ μία πολυωνυμική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1 με το προηγούμενο Παράδειγμα 4.2.2 (i) και την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 4.2.1, (θέτοντας $\mathrm{g}(x) = x^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$), μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) &= \lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n\right) + \lim_{x \to x_0} \left(a_{n-1} x^{n-1}\right) + \cdots + \lim_{x \to x_0} (a_1 x) + \lim_{x \to x_0} a_0 \\
&= a_n \lim_{x \to x_0} \left(x^n\right) + a_{n-1} \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1}\right) + \cdots + a_1 \lim_{x \to x_0} (x) + \lim_{x \to x_0} a_0 \\
&= a_n \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x \to x_0} (x) + \lim_{x \to x_0} a_0
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, (βλέπε, Παράδειγμα 4.1.6 (iii) ), συνεπώς από την παραπάνω σχέση προκύπτει :

$$\lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 \tag{4.2.2}$$

iii) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$, και $g(x) = x^2 + 2$, υπολογίζονται οι οριακές τιμές των συναρτήσεων από την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1, οι οποίες είναι :

$$\lim_{x \to -1} \left(x^2 - 3\right) = 1 - 3 = -2, \text{ και } \lim_{x \to -1} \left(x^2 + 2\right) = 3$$

Από τις παραπάνω οριακές τιμές και την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 4.2.1 έχουμε :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2} = -\frac{2}{3}.$$

iv) Αρχικά, για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 7x + 10}$, παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0 = \lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 7x + 10\right)$, επομένως, η ιδιότητα (iii) του πηλίκου στην Πρόταση 4.2.1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, (είναι απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$).

Επειδή, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στον αριθμητή και στον παρονομαστή έχουν κοινή ρίζα το 2, μπορούμε να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση και να υπολογίσουμε το όριο ως ακολούθως:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x - 5)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 5} = -\frac{1}{3}.$$

v) Αρχικά, για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)=0=\lim_{x\to a}(x-a)$, επομένως, η ιδιότητα (iii) του πηλίκου στην Πρόταση 4.2.1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, (είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ του αριθμητή προκύπτει:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Από την ιδιότητα (v) της Πρότασης 4.2.1 συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

◊◊

**Εφαρμογή 4.2.3.** Έστω μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, με $a>0$ και $n\in\mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{a}.$$

**Απόδειξη:** Από την υπόθεση $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ και την (4.1.2) για τον θετικό αριθμό $\varepsilon\cdot a^{\frac{n-1}{n}}$, όπου $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει

$$|f(x)-a|<\varepsilon\cdot a^{\frac{n-1}{n}}. \tag{4.2.3}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας με κατάλληλες αντικαταστάσεις την ταυτότητα

$$x^k-y^k=(x-y)\left(x^{k-1}+x^{k-2}y+x^{k-3}y^2+\cdots+y^{k-1}\right),$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(f^{\frac{1}{n}}(x)-a^{\frac{1}{n}}\right)\left(f^{\frac{n-1}{n}}(x)+f^{\frac{n-2}{n}}(x)a^{\frac{1}{n}}+f^{\frac{n-3}{n}}(x)a^{\frac{2}{n}}+\cdots+a^{\frac{n-1}{n}}\right)=f(x)-a \tag{4.2.4}$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$, χρησιμοποιώντας τις (4.2.3) και (4.2.4), μπορούμε να γράψουμε

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{a}\right|=\left|f^{\frac{1}{n}}(x)-a^{\frac{1}{n}}\right|=\frac{|f(x)-a|}{\left|f^{\frac{n-1}{n}}(x)+f^{\frac{n-2}{n}}(x)a^{\frac{1}{n}}+f^{\frac{n-3}{n}}(x)a^{\frac{2}{n}}+\cdots+a^{\frac{n-1}{n}}\right|}\le\frac{|f(x)-a|}{\left|a^{\frac{n-1}{n}}\right|}\le\frac{\varepsilon a^{\frac{n-1}{n}}}{a^{\frac{n-1}{n}}}=\varepsilon$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη, επειδή για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon$, επαληθεύοντας την (4.1.2).

Προφανώς η ιδιότητα (v) της Πρότασης 4.2.1 είναι η περίπτωση $n=2$ της παρούσας εφαρμογής. ◊◊

**Πρόταση 4.2.4.** Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$, και $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Τότε

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|.$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών των πραγματικών αριθμών και του Ορισμού 4.1.3, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.4). ◊◊

**Παράδειγμα 4.2.5.**

i) Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.

Αν θέσουμε $\ell = 0$ στην Πρόταση 4.2.4,το ευθύ είναι προφανές.

Για το αντίστροφο, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f(x)| = \big||f(x)|\big|$ , και στη συνέχεια να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 4.1.3.

ii) Το αντίστροφο της Πρότασης 4.2.4 **δεν** ισχύει.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|f(x)| = 1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 1$.

Επιπλέον, το όριο της $f$ στο σημείο μηδέν δεν υπάρχει, επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, (βλέπε, Πρόταση 4.4.4). ◊◊

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως «κριτήριο παρεμβολής» ή «κανόνας Sandwich», επειδή δίνει τη δυνατότητα του υπολογισμού ορίου συνάρτησης, όταν αυτή είναι «εγκλωβισμένη» από δύο άλλες συναρτήσεις, οι οποίες έχουν την ίδια οριακή τιμή.

**Πρόταση 4.2.6.** (*Κριτήριο παρεμβολής*). Έστω $A$ το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f$, $g$ και $h$, και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Αν για κάθε $x \in A$ ισχύουν

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell = \lim_{x\to x_0} h(x),$$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 4.5). ◊◊

**Παραδείγματα 4.2.7.**

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(x)}{x^6 + x^2} = 0$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} \left((x-2)^2 \cos(3x+5) + 3\right) = 3$

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = \dfrac{x^2}{x^6 + x^2}$, η οποία προφανώς είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι το ημίτονο είναι φραγμένη συνάρτηση, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανίσωση επί $k(x) \geq 0$ προκύπτει

$$0 \leq \left|\frac{x^2 \sin(x)}{x^6 + x^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^6 + x^2}. \tag{4.2.5}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^6+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(x^4+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$, εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής στην (4.2.5) προκύπτει το ζητούμενο, (βλέπε, Πρόταση 4.2.6).

ii) Επειδή, η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι απόλυτα φραγμένη, για κάθε $\omega \equiv (3x+5)\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\cos(\omega)|\le 1 \Rightarrow -1\le \cos(\omega)\le 1$, από όπου μπορούμε να γράψουμε $-(x-2)^2\le (x-2)^2\cos(\omega)\le (x-2)^2$, και

$$-(x-2)^2+3\le (x-2)^2\cos(3x+5)+3\le (x-2)^2+3. \qquad (4.2.6)$$

Αν θεωρήσουμε $f(x)=(x-2)^2+3$, σύμφωνα με την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.2.1, έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left((x-2)^2+3\right)=3=\lim_{x\to 2}\left(-(x-2)^2+3\right)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής στην (4.2.6) προκύπτει το ζητούμενο, (βλέπε, Πρόταση 4.2.6). ◊◊

**Εφαρμογή 4.2.8.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

**Απόδειξη:** Είναι γνωστό από την τριγωνομετρία ότι για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ισχύει $|\sin(x)|<|x|$, και για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $|x|<|\tan(x)|$.

Θεωρώντας $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι φανερό ότι $\cos(x)>0$, και $\dfrac{\sin(x)}{x}>0$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω τριγωνομετρικές ανισώσεις μπορούμε να γράψουμε

$$|\cos(x)|\cdot|x|<|\sin(x)|<|x| \Rightarrow |\cos(x)|<\frac{|\sin(x)|}{|x|}<1. \qquad (4.2.7)$$

Από τα πρόσημα των $\cos(x)$, $\dfrac{\sin(x)}{x}$, η (4.2.7) γράφεται $0<\cos(x)<\dfrac{\sin(x)}{x}<1$, από όπου προκύπτει:

$$\cos(x)-1<\frac{\sin(x)}{x}-1<0$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$, (βλέπε, Εφαρμογή 4.1.7 (ii)), τότε $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x)-1)=0$, (βλέπε, Παράδειγμα 4.1.4 (ii)). Επομένως, εφαρμόζοντας στην παραπάνω ανίσωση το κριτήριο παρεμβολής, (βλέπε, Πρόταση 4.2.6), έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}-1\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \qquad ◊◊$$

Η ακόλουθη πρόταση σχετίζεται με το όριο μίας σύνθετης συνάρτησης.

**Πρόταση 4.2.9.** Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$, $y_0$ σημείο συσσώρευσης του $B$, και $f\left(A-\{x_0\}\right)\subseteq B-\{y_0\}$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ και $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=\ell$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right)=\ell.$$

**Απόδειξη:** Από την (4.1.2), επειδή $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=\ell$, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta_1>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $y\in B$ με $|y-y_0|<\delta_1$, να ισχύει $|g(y)-\ell|<\varepsilon$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, για κάθε $\varepsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - y_0| < \delta_1$, (βλέπε, Ορισμό 4.1.3).
Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$. Συνεπώς, επαληθεύεται η (4.1.2), άρα $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$. ◊◊

**Παράδειγμα 4.2.10.**
Να υπολογισθεί

$$\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{x+3}{5x^2-1}\right).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+3}{5x^2-1}$, και $g(y) = \cos(y)$.
Αν $x_0 = 1$, και από την ιδιότητα (iv) στην Πρόταση 4.2.1 παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{5x^2-1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+3)}{\lim_{x\to 1}(5x^2-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

Αν $y_0 = 1$, τότε $\lim_{y\to 1} \cos(y) = \cos(1)$, (βλέπε, Εφαρμογή 4.1.7 (ii) ). Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.9 προκύπτει

$$\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{x+3}{5x^2-1}\right) = \cos(1).$$ ◊◊

## 4.3 Όριο συνάρτησης το άπειρο. Όριο συνάρτησης στο άπειρο

**Ορισμός 4.3.1.** Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$. Η $f$ έχει **όριο το** +άπειρο $(+\infty)$ στο σημείο $x_0$, και συμβολίζεται $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν

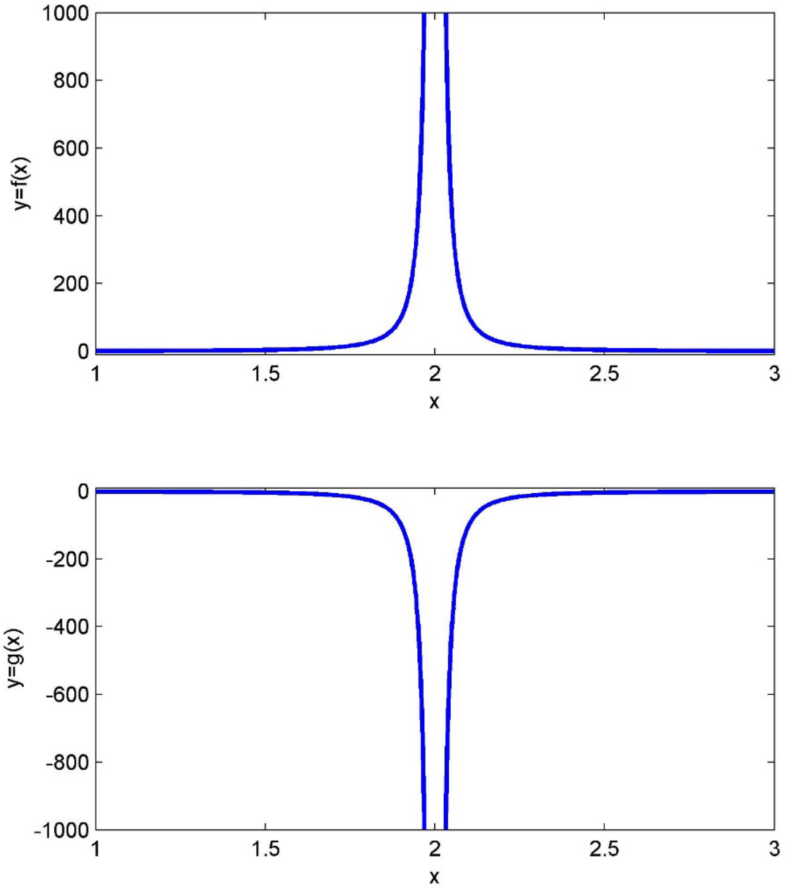
για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $f(x) > \varepsilon$ (4.3.1)

Ανάλογα, η $f$ έχει **όριο το** -άπειρο $(-\infty)$ στο σημείο $x_0$, και συμβολίζεται $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $f(x) < -\varepsilon$ (4.3.2)

Στο Σχήμα 4.2 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ (πάνω σχήμα) και της $g(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (κάτω σχήμα).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f, g$ δεν ορίζονται στο $x = 2$ και ότι $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ (πάνω) και $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty$ (κάτω).




**Σχήμα 4.2:** Γραφικές παραστάσεις $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ (πάνω) και $g(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (κάτω)

**Παραδείγματα 4.3.2.**

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) αν $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, τότε, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)=-\infty$.

iii) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

iv) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

v) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

vi) αν $f,g:A\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις, $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $f(x)\le g(x)$, $x\in A$, (ή σε ένα διάστημα $I\subseteq A$, όπου $x_0\in I$ ), τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

i) Παρατηρήστε ότι, $f(x)>0$, για κάθε $x\in(2,+\infty)$, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon>0$, για τον οποίο ισχύει $f(x)>\varepsilon$. Τότε

$$\frac{1}{x-2}>\varepsilon\Rightarrow x-2<\frac{1}{\varepsilon}.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $\delta>0$ τέτοιον ώστε $0<\delta<\dfrac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ με $|x-2|<\delta$ προκύπτει $f(x)=\dfrac{1}{x-2}>\varepsilon$ . Επομένως, επαληθεύεται η (4.3.1) του Ορισμού 4.3.1 και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$.

ii) Θεωρούμε $f(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Έστω $\varepsilon>0$ για τον οποίο ισχύει $f(x)<-\varepsilon$. Τότε

$$-\frac{1}{(x-2)^2}<-\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}>(x-2)^2\Rightarrow|x-2|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Αν επιλέξουμε έναν οποιονδήποτε $\delta>0$ τέτοιον ώστε $0<\delta<\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, τότε για $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ με $|x-x_0|<\delta$ προκύπτει

$$f(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}<-\varepsilon.$$

Συνεπώς, η (4.3.2) επαληθεύεται , άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$.

iii) Έστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$. Θεωρώντας οποιονδήποτε $\varepsilon>0$ (μικρό) υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε, αν $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει

$$f(x)>\frac{1}{\varepsilon}>0.$$

Από την παραπάνω μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{1}{f(x)}<\varepsilon,$$

συνεπώς για κάθε $\varepsilon>0$ (μικρό) υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε, αν $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $\dfrac{1}{f(x)}<\varepsilon$, το οποίο επαληθεύει την (4.1.2), (βλέπε, Ορισμό 4.1.3). Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη για $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

iv) Ας υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 και την (4.3.2) έχουμε ότι

για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε: αν $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $f(x)<-\varepsilon \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon$, από όπου αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Όμοια είναι η απόδειξη, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

v) Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, αν $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$ έχουμε $f(x)>\varepsilon>0$, οπότε $\sqrt{f(x)}>\sqrt{\varepsilon}$. Έτσι, όταν θεωρήσουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon_1=\varepsilon^2$, επαληθεύεται ο Ορισμός 4.3.1 για τη συνάρτηση $\sqrt{f(x)}$.

vi) Η απάντηση είναι φανερή από το γεγονός ότι κάθε φορά που $g(x)>f(x)>\varepsilon$, για κάποιο $\varepsilon>0$ τότε, υπάρχει $\delta>0$ με $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$, τέτοιο ώστε $g(x)>\varepsilon$. ◊◊

Θα μελετήσουμε, στη συνέχεια, το όριο συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή *x* τείνει είτε στο $+\infty$ (συμβολικά $x\to+\infty$) είτε στο $-\infty$ (συμβολικά $x\to-\infty$), με τη προϋπόθεση ότι, το πεδίο ορισμού *A* «επιτρέπει» τη μεταβλητή *x* να παίρνει τέτοιες τιμές.

**Ορισμός 4.3.3**. i) Έστω ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με $A=(x,+\infty)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το $+\infty$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A\subseteq\mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon>0$, ισχύει $(\varepsilon,+\infty)\cap A\neq\varnothing$.

ii) Έστω ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με $A=(-\infty,x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το $-\infty$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A\subseteq\mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon>0$, ισχύει $(-\infty,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.

Έτσι, για παράδειγμα, το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $(2,+\infty)$ και το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $(-\infty,1]$.

**Παρατήρηση**

Αν το $+\infty$ (αντίστοιχα, το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου *A*, τότε το *A* περιέχει ένα υποσύνολο της μορφής $(\alpha,+\infty)$ (ή $(-\infty,\alpha)$ αντίστοιχα).

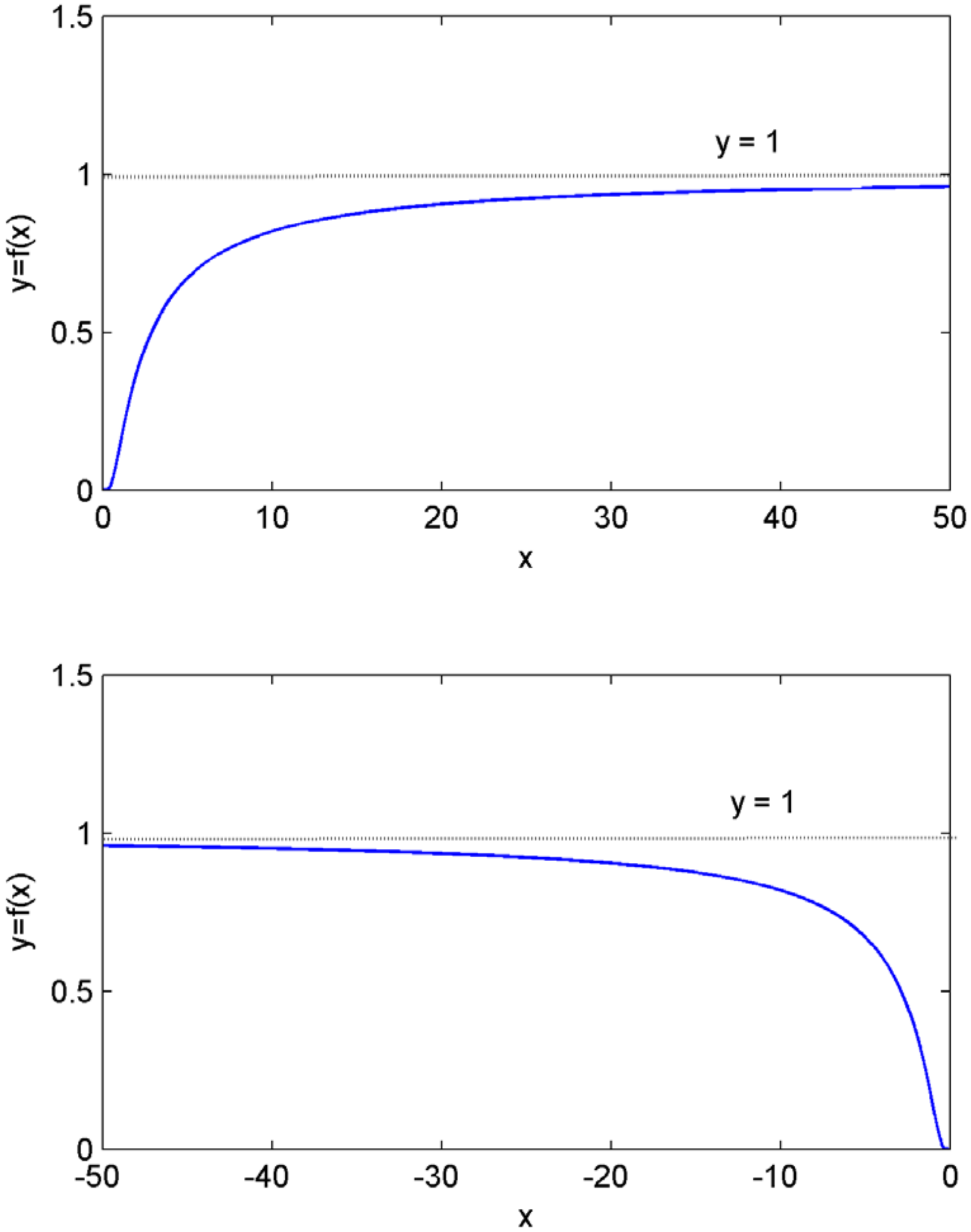
Επιπλέον, αν το $+\infty$ (αντίστοιχα, το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου *A*, τότε (βλέπε, Παράδειγμα 4.1.2 (ii) ) υπάρχει μία ακολουθία (γιατί;) σημείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του *A*, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ (ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, αντίστοιχα).

**Ορισμός 4.3.4**. i) Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Ο αριθμός $\ell$ ονομάζεται **όριο** της $f$ στο $+\infty$, και συμβολίζεται $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε, αν $x>\delta$, τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Ο αριθμός $\ell$

ονομάζεται **όριο** της $f$ στο $-\infty$, και συμβολίζεται $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε, αν $x<-\delta$, τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Στο Σχήμα 4.3 αναπαριστάνεται η γεωμετρική ερμηνεία του $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell=1$ (πάνω) και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell=1$ (κάτω).




**Σχήμα 4.3:** Γεωμετρική ερμηνεία του $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (πάνω) και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ (κάτω)

**Παραδείγματα 4.3.5.**

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

ii) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, η αντίστοιχη ακολουθία $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει όριο το $\ell$, δηλαδή, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot \sin(x)\right) = 0$.

i) Εξετάζοντας την περίπτωση $x \to +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 0$ και $\varepsilon > 0$. Προφανώς, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\dfrac{1}{x^k} < \varepsilon$. Τότε $x > \sqrt[k]{\varepsilon}$, οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon} > 0$, τέτοιο ώστε $x > \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x^k}\right| < 0$.

Όμοια είναι η απόδειξη όταν $x \to -\infty$.

ii) Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ και μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Τότε, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν $x > \delta$, τότε $\left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$.

Επιπλέον, από $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Αν $m = \max\{[\delta]+1, n_0\}$, όπου $[\delta]$ το ακέραιο μέρος του $\delta \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\left|f(x_n) - \ell\right| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq m$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Αντίστροφα, έστω ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \ell$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x > \delta$ για τα οποία $\left|f(x) - \ell\right| > \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x_n \in A$, τέτοια ώστε $x_n > \delta \Rightarrow \left|f(x_n) - \ell\right| > \varepsilon$, δηλαδή, υπάρχει μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ για την οποία, ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \ell$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση για το $-\infty$.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin(x)$. Έστω μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Τότε, η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία μηδενική ακολουθία, (βλέπε, Παράδειγμα 4.3.5 (i) και (ii)) και η ακολουθία των εικόνων $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n}\sin(x_n)$ είναι γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης ακολουθίας, υπενθυμίζεται ότι $\left(\sin(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, επειδή $\left|\sin(x_n)\right| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_n}\sin(x_n)\right) = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8 ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης χωρίς τη χρήση ακολουθιών προτείνεται στην άσκηση 4.6 (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις). ◊◊

**Ορισμός 4.3.6**. i) Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Η συνάρτηση $f$ έχει **όριο** $+\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x > \delta$, τότε $f(x) > \varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Η συνάρτηση $f$ έχει **όριο** $+\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x < -\delta$, τότε $f(x) > \varepsilon$.

**Ορισμός 4.3.7**. i) Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $+\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Η συνάρτηση $f$ έχει **όριο** $-\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε, αν $x > \delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$.

ii) Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $-\infty$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Η συνάρτηση $f$ έχει **όριο** $-\infty$, συμβολίζεται $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε αν $x < -\delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$.

**Παράδειγμα 4.3.8**.

i) Αν $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x - 2$, τότε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Θα επαληθεύσουμε την ισχύ του Ορισμού 4.3.7, εφόσον το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}$. Έστω $f(x) < -\varepsilon$ για ένα $\varepsilon > 0$. Τότε

$$3x - 2 < -\varepsilon \Rightarrow x < \frac{-\varepsilon + 2}{3}.$$

Αρκεί λοιπόν, για κάθε $\varepsilon > 0$ να επιλέξουμε $\delta < \frac{-\varepsilon + 2}{3}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x < \frac{-\varepsilon + 2}{3}$ να προκύπτει $f(x) < -\varepsilon$.

ii) Οι Ορισμοί 4.3.6 και 4.3.7 είναι ισοδύναμοι με : «για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ να προκύπτει $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$ ».

Οι αποδείξεις είναι ανάλογες με εκείνη του Παραδείγματος 4.3.5 (ii). ◊◊

Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν το όριο είναι $\pm\infty$, και η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στον πραγματικό αριθμό $x_0$.

**Πρόταση 4.3.9.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$, και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$, με $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$).

Τότε,

i) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$, (αντ. $\lim_{x\to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$ )

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=+\infty$, (αντ. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=+\infty$)

iii) Αν $c\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(c\cdot f(x)\big)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } c>0, \quad (αντ. \ -\infty)\\ -\infty, & \text{αν } c<0, \quad (αντ. \ +\infty)\end{cases}$.

**Απόδειξη:** i) Η απόδειξη είναι εφαρμογή του Ορισμού 4.3.1. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty$.

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \text{για κάθε } \frac{\varepsilon}{2}>0, \text{ υπάρχει } \delta_1>0, \text{ τέτοιο ώστε } |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow f(x)<-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty \Leftrightarrow \text{για κάθε } \frac{\varepsilon}{2}>0, \text{ υπάρχει} \delta_2>0, \text{ τέτοιο ώστε } |x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow g(x)<-\frac{\varepsilon}{2}$$

Αν θεωρήσουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, τότε για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$, έχουμε $f(x)+g(x)<-\varepsilon$, από όπου αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Οι (ii) και (iii) αποδεικνύονται ανάλογα και αφήνονται ως άσκηση.

Παρατήρηση: Η απόδειξη της Πρότασης 4.3.9 μπορεί να γίνει και με τη χρήση ακολουθιών, (βλέπε, Πρόταση 4.1.8). ◊◊

**Παρατήρηση**

Η Πρόταση 4.3.9 μπορεί να επαναδιατυπωθεί, θεωρώντας $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$, με $\ell\in\mathbb{R}$ με τη μόνη διαφορά στο γινόμενο να έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\begin{cases}+\infty \ (αντ. -\infty), & \text{αν } \ell>0\\ -\infty \ (αντ. +\infty), & \text{αν } \ell<0\end{cases}.$$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι αντίστοιχες της Πρότασης 4.3.9, στην κάθε πρόταση διατυπώνονται οι ιδιότητες που αφορούν στις οριακές τιμές στο άπειρο.

**Πρόταση 4.3.10.** Έστω οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$.

Τότε,

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=+\infty$

iii) Αν $c\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(c\cdot f(x)\big)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } c>0\\ -\infty, & \text{αν } c<0\end{cases}$.

iv) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)\big)^n=+\infty$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

**Πρόταση 4.3.11.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Τότε

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = -\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = +\infty$

iii) Αν $c\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(c\cdot f(x)\right) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } c>0 \\ +\infty, & \text{αν } c<0 \end{cases}$.

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n=2k \\ -\infty, & \text{αν } n=2k+1 \end{cases}$.

**Πρόταση 4.3.12.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$. Τότε,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = -\infty .$$

**Παράδειγμα 4.3.13**.
Ισχύουν τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu\ n=2k \\ -\infty, & \alpha\nu\ n=2k+1 \end{cases}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε την ισχύ τους από την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 4.3.11. ◊◊

**Εφαρμογή 4.3.14.** Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{με} \quad a_i \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ a_n \neq 0 .$$

Τότε,

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_n>0 \\ -\infty, & \text{αν } a_n<0 \end{cases}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a_n>0 \\ +\infty, & \text{αν } a_n<0 \end{cases}$

**Απόδειξη:** i) Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(a_{n-1}\frac{1}{x}\right) + \cdots + \lim_{x\to+\infty}\left(a_1\frac{1}{x^{n-1}}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(a_0\frac{1}{x^n}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n\right)$$

εφόσον $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)=0,\ k\in\mathbb{N}$ (βλέπε, Παράδειγμα 4.3.5 (i) ). Το αποτέλεσμα είναι πλέον φανερό από την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 4.3.10 και από το Παράδειγμα 4.3.13.

Αν, για παράδειγμα, $f(x)=3x^2-5x+7$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2-5x+7\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=+\infty .$$

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με το (i) και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

**Εφαρμογή 4.3.15.** Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, και $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$, με $a_i,b_j\in\mathbb{R}$ και $a_n,b_m\neq 0$.

Τότε,

i) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n=m\\ 0, & \text{αν } n<m\end{cases}$$

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{αν } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n=m\\ 0, & \text{αν } n<m\end{cases}$$

**Απόδειξη:** i) Όπως και στην Εφαρμογή 4.3.14 (i) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{m-1}}+b_0\frac{1}{x^m}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left[x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)\right]}{\lim_{x\to+\infty}\left[x^m\left(b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{m-1}}+b_0\frac{1}{x^m}\right)\right]}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(a_nx^n\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(b_mx^m\right)}=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m}$$

Η απάντηση είναι άμεση συνέπεια του Παραδείγματος 4.3.13 και του Παραδείγματος 4.3.5 (i).
ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με το (i) και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Στους ακόλουθους πίνακες συνοψίζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω προτάσεων και παραδειγμάτων για το όριο συνάρτησης στο άπειρο.

**Πίνακας 4.1:** Ιδιότητες ορίων όταν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$ (αντ. όταν $x\to x_0$)

| $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} g(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} \left(f(x)+g(x)\right)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} \dfrac{1}{f(x)}$ | $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x\to x_0)}} \left(c\cdot f(x)\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$, $c>0$<br>$-\infty$, $c<0$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | απροσδιόριστο | $-\infty$ | $0$ | όμοια |
| $-\infty$ | $+\infty$ | απροσδιόριστο | $-\infty$ | $0$ | $-\infty$, $c>0$<br>$+\infty$, $c<0$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | όμοια |
| $\ell\in\mathbb{R}-\{0\}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$, $\ell>0$<br>$-\infty$, $\ell<0$ | $\dfrac{1}{\ell}$ | $c\cdot\ell$ |
| $\ell\in\mathbb{R}-\{0\}$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$, $\ell>0$<br>$+\infty$, $\ell<0$ | $\dfrac{1}{\ell}$ | $c\cdot\ell$ |

**Πίνακας 4.2**: Ιδιότητες ορίων όταν $x\to\pm\infty$ και $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ .

| | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_nx^n\right)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a_nx^n\right)$ | |
|---|---|---|---|
| $a_n>0$ | $+\infty$ | $+\infty$<br>αν $n=2k$ | $-\infty$<br>αν $n=2k+1$ |
| $a_n<0$ | $-\infty$ | $-\infty$<br>αν $n=2k$ | $+\infty$<br>αν $n=2k+1$ |

## 4.4 Πλευρικά όρια συνάρτησης σε σημείο

Όταν λέμε ότι το όριο μίας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ο αριθμός $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $x\to x_0$, όπου $x_0$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του $A$, εννοούμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή $x$ προσεγγίζει το $x_0$ με οποιονδήποτε τρόπο. Δηλαδή, το $x\to x_0$, είτε με τιμές μεγαλύτερες του $x_0$, είτε με τιμές μικρότερες του $x_0$.

Αν $A=(a,b]$ ή $A=(a,+\infty)$ και $x_0=a$, τότε το $a$ εξακολουθεί να είναι σημείο συσσώρευσης του $A$ (γιατί;) και $x$ τείνει στο $x_0$ ($x\to x_0$) μόνο πλησιάζοντας στο $x_0$ με τιμές μεγαλύτερες του $x_0$, δηλαδή, πλησιάζοντάς το από δεξιά, επειδή το πεδίο ορισμού της $f$ δεν περιέχει πραγματικούς αριθμούς μικρότερους ή ίσους του $a$.

Αν $A=[a,b)$ ή $A=(-\infty,b)$ και $x_0=b$, τότε το $b$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$, και $x\to x_0$ μόνο πλησιάζοντας στο $x_0$ με τιμές μικρότερες του $x_0$, δηλαδή, πλησιάζοντάς το από αριστερά.

**Ορισμός 4.4.1**. Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Το **δεξιό όριο** της $f$ στο $x_0$ είναι ο αριθμός $\ell\in\mathbb{R}$, όταν το $x$ τείνει στο $x_0$ **από δεξιά του**, και σημειώνεται $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $x_0<x<x_0+\delta$, ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ (4.4.1)

Το **αριστερό όριο** της $f$ στο $x_0$ είναι ο αριθμός $\ell\in\mathbb{R}$, όταν το $x$ τείνει στο $x_0$ **από αριστερά του**, και σημειώνεται $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $x_0-\delta<x<x_0$, ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ (4.4.2)

**Παρατήρηση 4.4.2**.

i) Το δεξιό όριο της $f$ στο $x_0$ και το αριστερό όριο της $f$ στο $x_0$ είναι γνωστά ως **πλευρικά όρια** της $f$ στο $x_0$.

ii) Για τον υπολογισμό των πλευρικών ορίων της $f$ στο $x_0$ εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων, που διατυπώθηκαν στην Πρόταση 4.2.1, στην Εφαρμογή 4.2.3, στα Παραδείγματα 4.2.2 (i) - (ii).

iii) Όταν το $+\infty$ (αντίστοιχα το $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης του $A$, (βλέπε, Ορισμός 4.3.3), τότε ο Ορισμός 4.4.1 ταυτίζεται με τον Ορισμό 4.3.4.

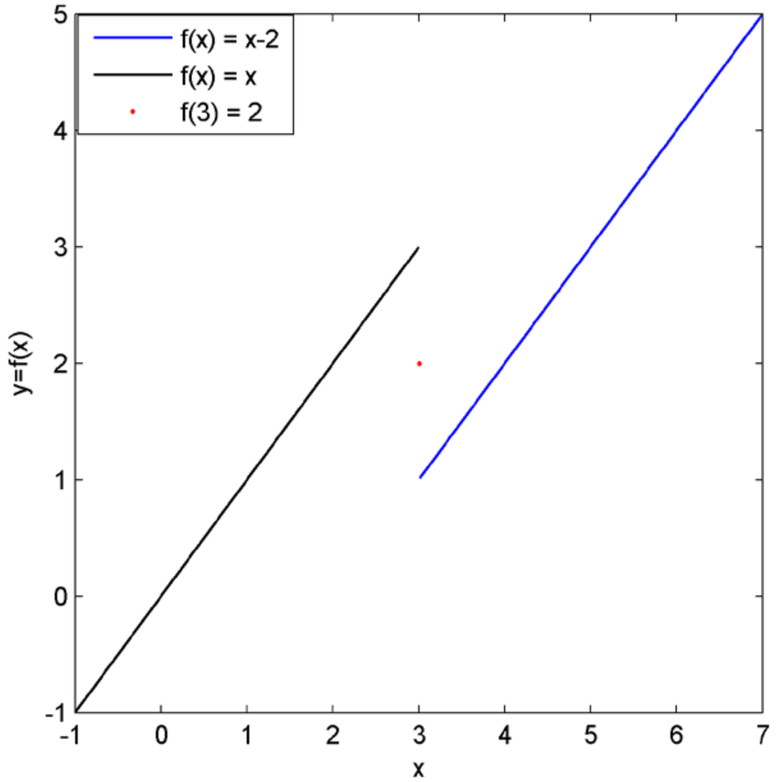
**Παραδείγματα 4.4.3**.

i) Να υπολογισθούν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x<3 \\ 2, & \text{αν } x=3 \\ x-2, & \text{αν } x>3 \end{cases}$$

Προφανώς, το πεδίο ορισμού της $f$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Όταν $x\to 3^-$, δηλαδή, το $x$ τείνει στο 3 με τιμές μικρότερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των $x$ δίνονται από τον τύπο $f(x)=x$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.1.6 (iii) ισχύει

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x=3.$$




**Σχήμα 4.4:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.4.3 (i)

Όταν $x \to 3^+$, δηλαδή το $x$ τείνει στο 3 παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των $x$ δίνονται από τον τύπο $f(x) = x - 2$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.2.2 (ii) και από την (4.2.2) προκύπτει

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 2) = 1.$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι τα πλευρικά όρια της $f$ στο $x_0 = 3$ είναι διαφορετικά, το οποίο αναπαριστάνεται στο Σχήμα 4.4.

ii) Να υπολογισθούν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, για τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

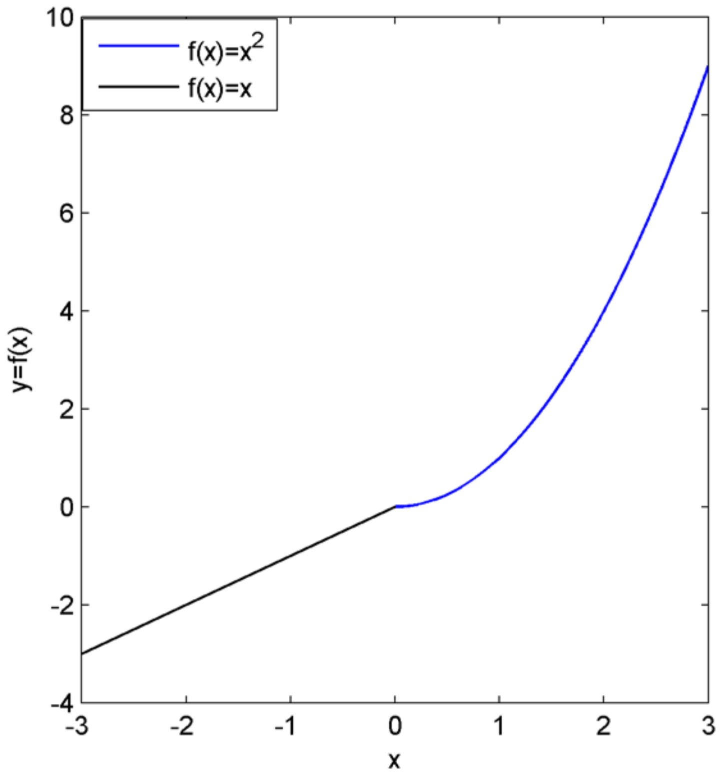
Προφανώς, το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $\mathbb{R}$. Όταν $x \to 0^-$, δηλαδή, το $x$ τείνει στο 0 με τιμές μικρότερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των $x$ δίνονται από τον τύπο $f(x) = x$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.1.6 (iii) ισχύει

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0.$$

Όταν $x \to 0^+$, δηλαδή, το $x$ τείνει στο 0 παίρνοντας τιμές μεγαλύτερες από αυτό, τότε οι εικόνες όλων αυτών των $x$ δίνονται από τον τύπο $f(x) = x^2$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.2.2 (ii) και από την (4.2.2) προκύπτει

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2) = 0.$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι τα πλευρικά όρια της $f$ στο $x_0 = 0$ είναι ίσα, (βλέπε, Σχήμα 4.5).




**Σχήμα 4.5:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.4.3(ii)

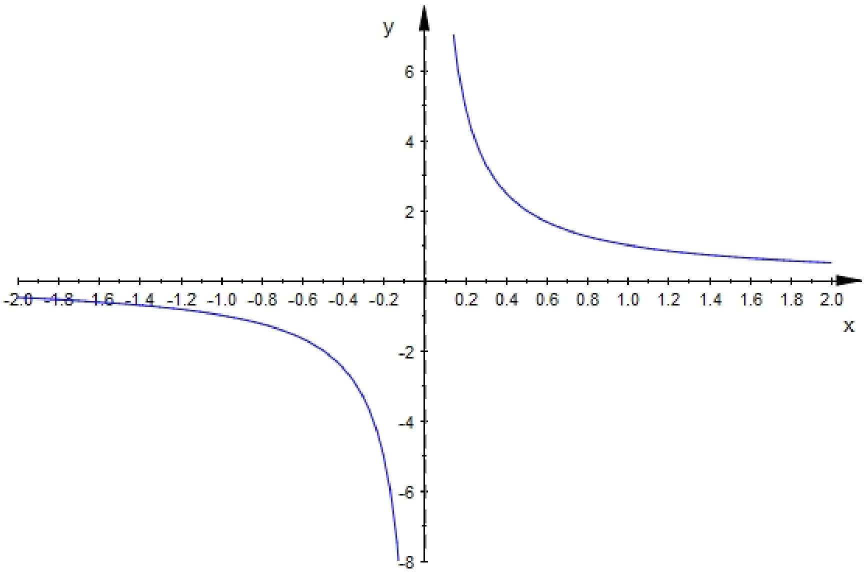
iii) Να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty .$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 και την (4.3.1) από $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $0<x<\delta$, να ισχύει $\frac{1}{x}>\varepsilon$.

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $\delta=\frac{1}{\varepsilon}>0$ , τότε για κάθε $x\in A$ με $0<x<\frac{1}{\varepsilon}$ προκύπτει $\frac{1}{x}>\varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας την (4.3.2) του Ορισμού 4.3.1 αποδεικνύεται $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, το οποίο αφήνεται ως άσκηση. Στο Σχήμα 4.6 αναπαριστάται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ , από όπου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.




**Σχήμα 4.6:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$. ◊◊

Συνδυάζοντας (4.1.2) με τις (4.4.1) και (4.4.2) αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση, στην οποία διατυπώνεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη (πραγματικής) οριακής τιμής μίας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι η ύπαρξη των πλευρικών ορίων της συνάρτησης στο σημείο αυτό με την ίδια οριακή τιμή.

**Πρόταση 4.4.4.** Έστω η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell=\lim_{x\to x_0^-} f(x). \tag{4.4.3}$$

**Παραδείγματα 4.4.5**

i) Στο Παράδειγμα 4.4.3 (ii) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f$ στο $x_0=0$, και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. Επομένως, από την ισοδυναμία στην (4.4.3) συμπεραίνουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

ii) Στο Παράδειγμα 4.4.3 (i) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f$ στο $x_0=3$ με $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3$, και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$. Επειδή τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, δεν υπάρχει το όριο της $f$ στο σημείο 3, (βλέπε, Πρόταση 4.4.4).

iii) Να εξετάσετε, αν υπάρχει στο $x_0=0$, το όριο της συνάρτησης :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ 2 \quad , & \text{αν } x=0 \\ 3x+1, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Αρχικά υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο $x_0=0$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3x+1)=1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.4, το όριο της $f$ υπάρχει, επειδή τα πλευρικά όρια της $f$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Επιπλέον, από την ισοδυναμία στην (4.4.3) συμπεραίνουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. ◊◊

## 4.5 Συνέχεια συνάρτησης

**Ορισμός 4.5.1.** Έστω η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Η $f$ ονομάζεται **συνεχής** στο **σημείο** $x_0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.5.1)$$

Ισοδύναμα, $f$ είναι **συνεχής** στο **σημείο** $x_0$, αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (4.5.2)$$

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $B \subseteq A$ ονομάζεται **συνεχής** στο σύνολο **B**.

Αν για τη συνάρτηση $f$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η $f$ είναι **ασυνεχής** στο $x_0 \in A$ και το σημείο $x_0$ λέγεται **σημείο ασυνέχειας** της $f$.

Η γεωμετρική ερμηνεία μίας συνεχούς συνάρτησης παρουσιάζεται στην Παρατήρηση 4.5.3 (ii).

**Παραδείγματα 4.5.2.**

i) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, επειδή $\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$, (βλέπε, Εφαρμογή 4.1.7 (i)), σύμφωνα με τον Ορισμό 4.5.1 και την (4.5.1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο $x_0$.
Επειδή $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι τυχαίο σημείο, η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με $f(x) = \cos(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο, όπως στο Παράδειγμα 4.5.2 (i), χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 4.1.7 (ii).

iii) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, από το Παράδειγμα 4.1.6 (ii) έχουμε ότι $\lim_{x \to x_0} c = c$. Από την (4.5.1) συμπεραίνουμε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

iv) Η ταυτοτική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, από το Παράδειγμα 4.1.6 (iii) έχουμε ότι $\lim_{x \to x_0} x = x_0$. Από την (4.5.1) συμπεραίνουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

v) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 5}{x - 3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 1, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

Πράγματι, αν $x \neq 3$ ένα οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού $\mathbb{R}$ της $f$, τότε από τις ιδιότητες ορίων έχουμε

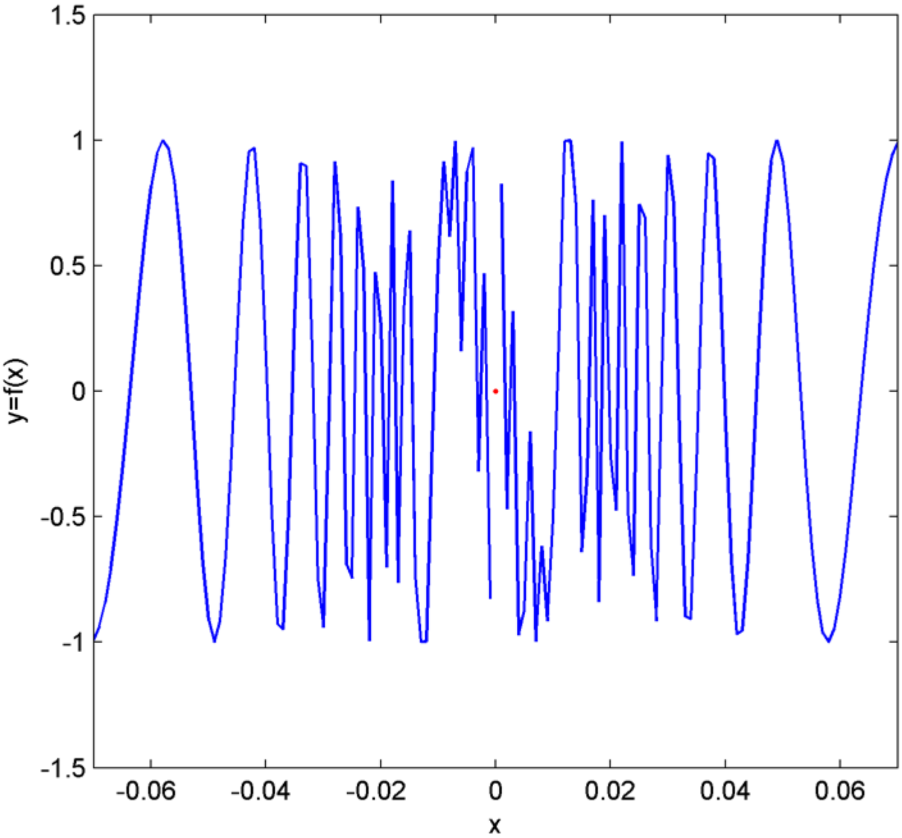
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+4)=7\neq 1=f(3).$$

Επομένως, η $f$ είναι ασυνεχής στο $x_0=3$, (βλέπε, Ορισμό 4.5.1).

vi) Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Στο Σχήμα 4.7, το μέρος της καμπύλης με μπλε χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και μία κόκκινη κουκίδα αντιστοιχεί στο σημείο (0,0) της συνάρτησης. Προφανώς, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ δεν είναι συνεχή στο $x_0=0$.




**Σχήμα 4.7:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 4.5.2 (vi)

Το όριο $\lim_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **δεν** υπάρχει.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ και είναι αριθμός. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικούς όρους

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}} \quad \text{και} \quad y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}},\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N},$$

για τις οποίες ισχύει $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, (γιατί;). Οι αντίστοιχες ακολουθίες των εικόνων $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\left(f(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν διαφορετικά όρια, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

άρα, το $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει, (βλέπε, Πρόταση 4.1.8 και Παρατήρηση 4.1.9 (iii)). Επειδή το όριο δεν υπάρχει, η συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, (βλέπε, Ορισμό 4.5.1). ◊◊

**Παρατηρήσεις 4.5.3**.

i) Η συνέχεια μίας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ αναφέρεται σε σημεία $x_0$ του πεδίου ορισμού *A*. Αν το *A* είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του *A*, (βλέπε, Ορισμό 4.1.1). Αν το $x_0$ είναι απομονωμένο σημείο του *A*, τότε δεν είναι σημείο συσσώρευσης, (βλέπε, Ορισμό 4.1.1), επειδή υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta_1, x_0 - \delta_1) \cap A = \{x_0\}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta < \delta_1$, τέτοιο ώστε για $x \in A$ να ισχύει

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο απομονωμένο σημείο $x_0$.

Για παράδειγμα, αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $A = (-2,3] \cup \{5,7\}$, τα σημεία 5 και 7 είναι απομονωμένα σημεία του *A*, συνεπώς, η $f$ είναι συνεχής σε καθένα από αυτά.

Επομένως, από εδώ και στο εξής, δε θα μας ενδιαφέρουν τα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού, εφόσον είναι δεδομένη η συνέχεια σε αυτά, παρά μόνο η μελέτη στα σημεία συσσώρευσης, που ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

ii) Η γεωμετρική ερμηνεία μίας **συνεχούς** συνάρτησης *f* είναι ότι, η γραφική παράστασή της είναι μία συνεχής γραμμή. Και αυτό επειδή, οι εικόνες $f(x)$ μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο όσο μεταβάλλεται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής *x* στο πεδίο ορισμού της. Έτσι, το γράφημα της *f* δεν παρουσιάζει καμία «διακοπή» όσο το *x* κινείται μέσα στο πεδίο ορισμού της *f*. Ακόμη, αν το πεδίο ορισμού μίας συνεχούς συνάρτησης περιέχει και απομονωμένα σημεία, τότε η γεωμετρική ερμηνεία εξακολουθεί να είναι μία συνεχής γραμμή, μαζί με όλα τα διακεκριμμένα σημεία $(x_0, f(x_0))$, όπου $x_0$ ένα απομονωμένο σημείο, (βλέπε, Παράδειγμα 4.5.2 (vi), Σχήμα 4.7).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση *f* είναι **ασυνεχής** στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε η γραφική της παράσταση παρουσιάζει διακοπή στο σημείο αυτό (ή άλμα). Στο Παράδειγμα 4.4.3 (i), η *f* είναι ασυνεχής στο $x_0 = 3$ και το γράφημα της παρουσιάζει άλμα στο $x_0 = 3$, (βλέπε, Σχήμα 4.4).

Στις δύο επόμενες προτάσεις μελετώνται οι σημαντικότερες ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

**Πρόταση 4.5.4.** Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A \cap B \neq \varnothing$. Τότε

i) $f + g$ και $f \cdot g$ και $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0$

ii) Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$ και $c \cdot f$ είναι συνεχείς στο $A \cap B$ και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $(A \cap B) - \{x \in B : g(x) = 0\}$.

**Απόδειξη:** Είναι φανερό ότι η απόδειξη είναι συνέπεια της Πρότασης 4.2.1 και του Ορισμού 4.5.1 και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

**Παραδείγματα 4.5.5.**

i) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots n$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, συνδυάζοντας την (4.2.2) του Παραδείγματος 4.2.2 (ii) με την (4.5.1) του Ορισμού 4.5.1 συμπεραίνουμε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Έστω $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα του $x$. Τότε η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, το οποίο δεν αποτελεί ρίζα του $Q(x)$. Δηλαδή, η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Το συμπέρασμα προκύπτει από το προηγούμενο Παράδειγμα (i) και την Πρόταση 4.5.4 (ii).
Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 - 5}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

iii) Οι συναρτήσεις $\tan(x)$ και $\cot(x)$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $\tan(x)$ και $\cot(x)$ είναι πηλίκα των συνεχών συναρτήσεων $\sin(x)$, $\cos(x)$, (βλέπε, Παραδείγματα 4.5.2 (i) και (ii), αντίστοιχα), επομένως, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους, (βλέπε, Πρόταση 4.5.4 (ii)).

iv) Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και η $\coth(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη Πρόταση 4.5.4 και από τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων (βλέπε, Ορισμούς 1.6.1, 1.6.5, 1.6.9 και 1.6.13), επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ και } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. ◊◊

**Πρόταση 4.5.6.** Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$. Τότε :

i) Η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο $x_0$.

ii) Η συνάρτηση $\sqrt[n]{f}$ είναι συνεχής στο $x_0$, όταν $f(x_0) \geq 0$.

**Απόδειξη:**

i) Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.2.4 και την (4.5.1) του Ορισμού 4.5.1.

ii) Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την Εφαρμογή 4.2.3 και την (4.5.1) του Ορισμού 4.5.1. ◊◊

**Παράδειγμα 4.5.7**. Οι συναρτήσεις $|x^2-5|$, $\sqrt{x}$ και $\sqrt[3]{x^2-5x}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-5$, $g(x)=x$ και $h(x)=x^2-5x$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.5.5 (i) οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές, οπότε και οι περιορισμοί τους σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επομένως, η συνάρτηση $|x^2-5|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επειδή $f(x)=x^2-5$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 4.5.6 (i)).
Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, επειδή $g(x)=x$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και ο περιορισμός της στο $[0,+\infty)$ είναι συνεχής, (βλέπε, Πρόταση 4.5.6 (ii)).

Η συνάρτηση $\sqrt[3]{x^2-5x}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]\cup[5,+\infty)$, επειδή $h(x)=x^2-5x$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και ο περιορισμός της στο $(-\infty,0]\cup[5,+\infty)$ είναι συνεχής, (βλέπε, Πρόταση 4.5.6 (ii)). ◊◊

**Ορισμός 4.5.8.** Έστω $A\subset\mathbb{R}$, μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$.

i) Αν το σημείο $x_0\in A$ είναι δεξιό άκρο του διαστήματος $A$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, τότε λέμε ότι η $f$ είναι **συνεχής από αριστερά** στο $x_0$.

ii) Αν το σημείο $x_0\in A$ είναι αριστερό άκρο του διαστήματος $A$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, τότε λέμε ότι η $f$ είναι **συνεχής από δεξιά** στο $x_0$.

Ο Ορισμός 4.5.8 συνδέει την έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο με την «πλευρική συνέχεια» της συνάρτησης γύρω από αυτό. Από την (4.5.1) η έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο εξαρτάται αρχικά από την ύπαρξη της οριακής τιμής της συνάρτησης σε αυτό, η οποία συνδέεται με την ύπαρξη και την τιμή των «πλευρικών ορίων» της συνάρτησης γύρω από το σημείο, (βλέπε, τη σχέση (4.4.3) στην Πρόταση 4.4.4). Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, που εξασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και συνδέεται με την πλευρική συνέχεια, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 4.5.8. Η απόδειξη της πρότασης, που ακολουθεί, είναι ανάλογη της Πρότασης 4.4.4, απαιτεί την χρήση ακολουθιών και αφήνεται ως άσκηση.

**Πρόταση 4.5.9.** Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0\in A$ αν και μόνο αν είναι συνεχής από αριστερά και συνεχής από δεξιά στο $x_0$.

**Παραδείγματα 4.5.10.**

i) Η συνάρτηση (step function)

$$f(x)=\begin{cases} c, & \text{αν } x\geq 0 \\ 0, & \text{αν } x<0 \end{cases}, \text{ για κάθε } c\in\mathbb{R},$$

είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0=0$, ενώ **δεν** είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0=0$.
Προφανώς ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} c = c = f(0),$$

συνεπώς, η $f$ είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0 = 0$, (βλέπε, Ορισμός 4.5.8 (ii)).
Επειδή

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \neq c = f(0),$$

δεν επαληθεύεται ο Ορισμός 4.5.8 (i). Συνεπώς, η $f$ **δεν** είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0 = 0$.

ii) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ αν } -1 \leq x \leq 3 \\ -1\ , \text{ αν } x = -2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $A = [-1, 3] \cup \{-2\}$. Για κάθε $x \in (-1, 3)$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^2$ και ως πολυωνυμική είναι συνεχής. Στο σημείο $x = -1$ η $f$ είναι συνεχής από δεξιά (μόνο), επειδή

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = 1 = f(-1).$$

Η $f$ είναι συνεχής στο απομονωμένο σημείο $x = -2$, (βλέπε, Παρατήρηση 4.5.3 (i) ).

iii) Να εντοπισθούν τα διαστήματα του $\mathbb{R}$, όπου η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 2 \\ 1, & \text{αν } x = 2 \\ x-2\,, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. Η γραμμική συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής, για κάθε $x < 2$. Επειδή

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2 \neq 1 = f(2),$$

σύμφωνα με τον Ορισμός 4.5.8 (i), η $f$ **δεν** είναι συνεχής από αριστερά στο $x = 2$. Το $x = 2$ αποτελεί σημείο συνέχειας μόνο από δεξιά.

Η γραμμική συνάρτηση $f(x) = x - 2$ είναι συνεχής, για κάθε $x > 3$. Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x - 2 = 1 = f(3),$$

η $f$ είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 3$, (βλέπε, Ορισμός 4.5.8 (i)).

iv) Να εξετασθεί η συνέχεια της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x < 0$, η συνάρτηση $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x > 0$, η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, (σημειώνεται ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$). Στο σημείο $x_0=0$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης, έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$$

Επομένως, η $f$ είναι συνεχής από αριστερά στο $x_0=0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=1+\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=1+0=1\neq f(0),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η $f$ **δεν** είναι συνεχής από δεξιά στο $x_0=0$.

Άρα, η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

v) Να υπολογισθούν οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων $a,b$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} ax+5, & \text{αν } x<3 \\ 8a, & \text{αν } x=3 \\ x^2+(bx/3), & \text{αν } x>3 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<3$, η συνάρτηση $f(x)=ax+5$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x>3$, η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{b}{3}x$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή το σημείο $x=3$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$, πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής σε αυτό, το οποίο είναι ισοδύναμο με τη συνέχεια της συνάρτησης από αριστερά και τη συνέχεια από δεξιά στο $x=3$, (βλέπε, Πρόταση 4.5.9).

Σύμφωνα με τον Ορισμός 4.5.8 (i) πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}(ax+5)=8a \Leftrightarrow 3a+5=8a\Leftrightarrow a=1$$

και σύμφωνα με τον Ορισμός 4.5.8 (ii) πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}\left(x^2+\frac{b}{3}x\right)=8a=8\Leftrightarrow 9+\frac{b}{3}3=8\Leftrightarrow b=-1$$

Άρα, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, $\mathbb{R}$, όταν $a=1$ και $b=-1$. ◊◊

Στα επόμενα, αναφέρουμε κάποια σημαντικά θεωρήματα, τα οποία αποτελούν εφαρμογές της συνέχειας μίας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα, ξεκινώντας με το θεώρημα Bolzano, την απόδειξη του ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει σε οποιοδήποτε σύγγραμμα της βιβλιογραφίας, (Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014).

**Θεώρημα 4.5.11** (Bolzano). Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a)\cdot f(b)<0$, τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

**Παρατηρήσεις 4.5.12.**

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.11, μία συνεχής συνάρτηση $f$ σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, με την προϋπόθεση ότι $f$ έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα $a$ και $b$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0$ μεταξύ των $a$

και $b$, (η ρίζα δεν είναι κάποιο από τα άκρα $a$, $b$). Το Θεώρημα 4.5.11 δεν δίνει πληροφορίες για το ποια είναι η ρίζα αυτή, διαπιστώνει μόνο την ύπαρξή της και εντοπίζει το διάστημα $(a, b)$ μέσα στο οποίο αυτή ανήκει.

ii) Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 4.5.11 είναι ότι : μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, στο οποίο οι τιμές $f(a)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημες, έχει γραφική παράσταση, η οποία τέμνει τον άξονα $x'0x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, το $x_0$, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των $a$ και $b$, (βλέπε, Σχήμα 4.8).

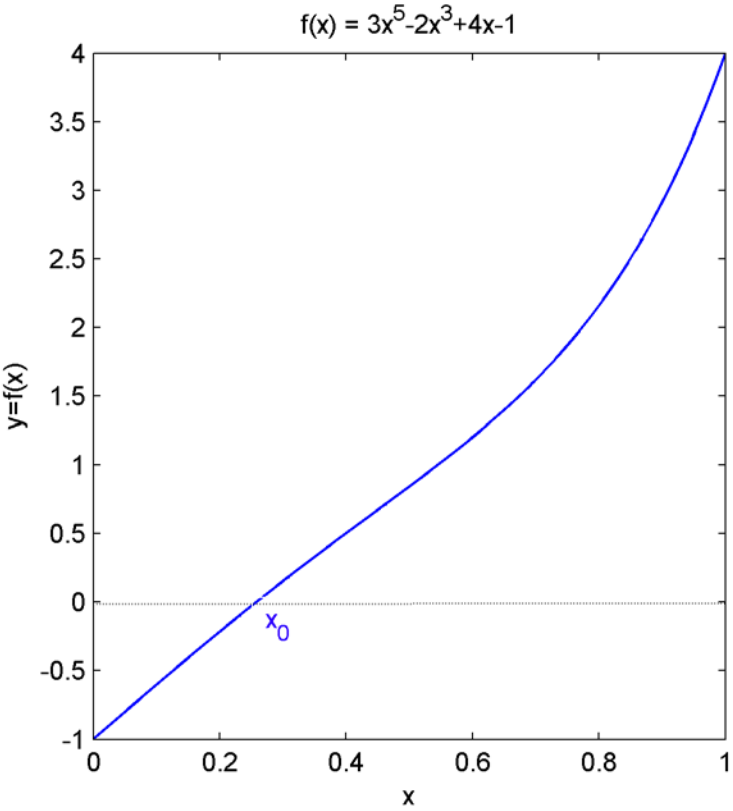
**Παραδείγματα 4.5.13**

i) Το πολυώνυμο $3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Πράγματι, θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$, η οποία ως πολυωνυμική είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, επομένως και στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$. Εύκολα, διαπιστώνουμε ότι $f(a)\cdot f(b) = f(0)\cdot f(1) = (-1)\cdot 4 = -4 < 0$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.11, η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, τέτοια ώστε $0 < x_0 < 1$.

Συνεπώς, $3{x_0}^5 - 2{x_0}^3 + 4x_0 - 1 = 0$, με $x_0 \in (0, 1)$.

Στο Σχήμα 4.8 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ στο $(0, 1)$, η ρίζα $x_0$ εντοπίζεται στο διάστημα $(0.2, 0.3)$.




**Σχήμα 4.8:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1$

ii) Η εξίσωση $\cos(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-5, 5)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\cos(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι συνεχής και στο κλειστό διάστημα $[-5, 5]$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $[-\pi, \pi]\subset[-5, 5]$. Επιπλέον,

$$f(-\pi)=\cos(-\pi)-(-\pi)=1+\pi>0, \text{ και } f(\pi)=\cos(\pi)-\pi=-1-\pi<0,$$

από όπου $f(\pi)\cdot f(-\pi)<0$. Επομένως, επαληθεύονται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, συνεπώς, υπάρχει $x_0\in[-\pi, \pi]\subset[-5, 5]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, (βλέπε, Θεώρημα 4.5.11). Άρα, η εξίσωση $\cos(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-5, 5)$. ◊◊

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 4.5.11 διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.5.14.** Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(a)\neq f(b)$. Τότε, για κάθε τιμή $\lambda$ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(a, b)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\lambda$.

**Απόδειξη:** Επειδή $f(a)\neq f(b)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $f(a)<f(b)$, οπότε ισχύει $f(a)<\lambda<f(b)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-\lambda$, για κάθε $x\in[a,b]$. Η $g$ επαληθεύει τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, (βλέπε, Θεώρημα 4.5.11), επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής, και η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον για τη $g$ ισχύει $g(a)\cdot g(b)=(f(a)-\lambda)(f(b)-\lambda)<0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $x_0\in(a,b)$, τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο, $g(x_0)=f(x_0)-\lambda=0$. Άρα, $f(x_0)=\lambda$. ◊◊

**Παρατηρήσεις 4.5.15.**

i) Η Πρόταση 4.5.14 είναι γνωστή και ως «Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής» των συνεχών συναρτήσεων, επειδή για οποιαδήποτε τιμή $\lambda$, μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $k\in(a, b)$ του οποίου η εικόνα ισούται με $\lambda$.

ii) Η γεωμετρική ερμηνεία της Πρότασης 4.5.14 είναι ότι: αν η $f$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$, η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y=\lambda$, όπου $\lambda$ οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(k, \lambda)$.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ένα Θεώρημα χρήσιμο στον υπολογισμό της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής μίας συνεχούς συνάρτησης, που είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα, η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση και μπορεί να αναζητηθεί (Ρασσιάς, 2014; Παντελίδης, 2008).

**Θεώρημα 4.5.16.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Η $f$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

ii) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2\in[a, b]$, τέτοιοι ώστε

$$f(x_1)=\min f=m, \quad \text{και} \quad f(x_2)=\max f=M.$$

iii) $f([a,b])=[m, M]$.

**Παρατήρηση 4.5.17.**

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.16, αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε το σύνολο $f([a,b]) = \{ f(x) \colon x \in [a,b] \}$ των εικόνων της $f$ είναι φραγμένο, υπάρχουν, δηλαδή, δύο πραγματικοί αριθμοί $m$ και $M$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως, η γραφική παράσταση της $f$ είναι μία καμπύλη γραμμή, η οποία περικλείεται μεταξύ των οριζόντιων ευθειών $y = m$ και $y = M$, με τις οποίες εφάπτεται σε ένα τουλάχιστον σημείο. Επιπλέον, η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει και κάθε οριζόντια ευθεία $y = \lambda$, όπου $m \leq \lambda \leq M$, (βλέπε, Πρόταση 4.5.14).

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων και η απόδειξή της προκύπτει από την Πρόταση 4.2.9 και αφήνεται ως άσκηση.

**Πρόταση 4.5.18.** Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f(A) \subseteq B$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ και η $g$ συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$.
Γενικότερα, αν η $f$ είναι συνεχής στο $A$, και η $g$ είναι συνεχής στο $f(A)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο $A$.

**Παραδείγματα 4.5.19.**

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε:

i) Οι συναρτήσεις $\sin(f(x))$, $\cos(f(x))$, $\tan(f(x))$ και $\cot(f(x))$ είναι συνεχείς στο $A$, ως συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων, (βλέπε, Παραδείγματα 4.5.2 (i) και (ii), και Παράδειγμα 4.5.5 (iii)).
ii) Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh(f(x))$, $\cosh(f(x))$, $\tanh(f(x))$ και $\coth(f(x))$ είναι συνεχείς στο $A$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
iii) Οι εκθετικές συναρτήσεις, $e^{f(x)}$, $a^{f(x)}$, με $a > 0$, είναι συνεχείς στο $A$.
iv) Η λογαριθμική συνάρτηση, $\log_a(f(x))$, με $a > 0$, και $f(x) > 0$, είναι συνεχής στο $A$.
v) Η συνάρτηση $\sqrt{f(x)}$, όπου $f(x) \geq 0$, $x \in A$, είναι συνεχής στο $A$. ◊◊

**Πρόταση 4.5.20.** Έστω $A$ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Τότε, η $f^{-1} \colon f(A) \to A$ είναι συνεχής συνάρτηση.

**Παραδείγματα 4.5.21.**

i) Σύμφωνα με τους Ορισμούς και τις Παρατηρήσεις στην Ενότητα 1.5, καθώς και τα Παραδείγματα 4.5.2 (i) και (ii), Παράδειγμα 4.5.5 (iii) οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin^{-1}(x),\ \cos^{-1}(x),\ \tan^{-1}(x) \ \text{ και } \ \cot^{-1}(x)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους.

ii) Σύμφωνα με τους Ορισμούς και τις Παρατηρήσεις στην Ενότητα 1.6, καθώς και το Παράδειγμα 4.5.5 (iv) οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh^{-1}(x)\,,\ \cosh^{-1}(x)\,,\ \tanh^{-1}(x)\,,\ \text{και}\ \coth^{-1}(x)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους.

iii) Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, ως αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $e^x$, (βλέπε, Ενότητα 1.4).

iv) Η συνάρτηση $\ln\left(x^2+1\right)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\ln x$.

vi) Η συνάρτηση $\ln\left(1-x^2\right)$ είναι συνεχής στο $(-1,1)$, (γιατί;). ◊◊

**Παρατηρήσεις 4.5.22.**

i) Στην Πρόταση 4.5.20 αν το $A$ είναι ένα κλειστό διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A)=[m,M]$, όπου $m=\min f$ και $M=\max f$ στο διάστημα $A$.

ii) Το συμπέρασμα της Πρότασης 4.5.20 εξακολουθεί να ισχύει, όταν η υπόθεση «η $f$ είναι αμφιμονοσήμαντη» αντικατασταθεί με την υπόθεση «η $f$ είναι γνήσια μονότονη» (δηλαδή, γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $A$).

Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5.20, αν η $f$ είναι γνήσια μονότονη και συνεχής, τότε η $f^{-1}$ είναι συνεχής, και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη συνάρτηση $f$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6).

## 4.6. Όριο πραγματικής συνάρτησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Η εντολή `limit` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης $f$ της ανεξάρτητης μεταβλητής $x$, η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ έχουμε:

Για τον υπολογισμό του ορίου η εντολή `limit` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση `f`
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`
- το σημείο $x_0$ ή άπειρο (inf), όπου τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή
  Αν παραληφθεί, τότε το όριο υπολογίζεται στο $x_0 = 0$.
- το είδος του ορίου, με πλευρικά όρια από τις δύο πλευρές (δεν συμπληρώνεται τίποτα), πλευρικό όριο από δεξιά σημειώνεται right, ή πλευρικό όριο από αριστερά σημειώνεται left.

Σύνταξη εντολής: `limit(f,x,x0,'δηλώνεται το είδος του ορίου')`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$ της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit(f,x,1)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l=1
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit(f,x,0)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= NaN
```

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το όριο.

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
```

```
l=limit(f,x,0, 'right')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= Inf   δηλαδή το όριο είναι +∞
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit(f,x,0, 'left')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= -Inf   δηλαδή το όριο είναι –∞
```

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}$ γράφουμε:

```
syms x
f = 1/x;
l=limit(f,x,inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
l= 0
```

◊◊

## 4.7. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

**4.7.1** Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin(x)}{x^2-3x+1}$

Υπόδειξη: Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $x^2$ μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο παρεμβολής.
Απάντηση: Το όριο είναι ίσο με 1.

**4.7.2** Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, πολλαπλασιάστε με τη συζυγή παράσταση.
Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0.

**4.7.3** Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\cos(x)\right)=0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο παρεμβολής. Συμβουλευτείτε την απόδειξη στο Παράδειγμα 4.1.10.

**4.7.4** Να αποδείξετε ότι, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cos(x)\right)=0$.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε την απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.5 (iii).

**4.7.5** Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}-x+2}{x^2-5x+6}$

Υπόδειξη: Απλοποιήστε τη ρίζα, παραγοντοποιήστε τον παρονομαστή και απλοποιήστε την παράσταση. Υπολογίστε πλευρικά όρια, είναι διαφορετικά.
Απάντηση: Το όριο δεν υπάρχει.

**4.7.6** Να εξετάσετε, αν συγκλίνει το όριο : $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(2x)}{x^3}$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $2x$ μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο παρεμβολής.
Απάντηση: Δεν συγκλίνει, το όριο είναι $-\infty$ .

**4.7.7** Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο : $\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x+1}-x-2}{2x^2}$

Υπόδειξη: Είναι απροσδιόριστη μορφή, πολλαπλασιάστε με τη συζυγή παράσταση.

Απάντηση: Το όριο υπάρχει και είναι ίσο με $-\frac{1}{8}$.

**4.7.8** Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης: $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x<0\\ 2, & \text{αν } x=0\\ x, & \text{αν } x>0\end{cases}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 4.5.10.
Απάντηση: Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x=0$.

# Βιβλιογραφία

## Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία


Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός* (1η έκδοση ed. Vol. τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). *Εισαγωγή στη Matlab*. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). *Πραγματική Ανάλυση*. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). *Απειροστικός Λογισμός*. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). *Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). *Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf
Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). *Ολοκληρωτικός λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). *Διαφορικός Λογισμός Ι*: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). *Ανάλυση* (3η έκδοση βελτ. ed. Vol. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές*. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). *Μαθηματική Ανάλυση Ι* (1η έκδοση 2014 ed.). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Στεφανίδης, Γ. (2014). *Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (2η έκδοση ed.). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). *Μαθηματική Ανάλυση Ι*. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός* (2η έκδοση ed.). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.


## Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία


GNU Octave. from http://www.gnu.org/software/octave

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Stewart, J. (2007). *Calculus*: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus* (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis*: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

# Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

**4.1.** Να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$, όπου $a,b,x_0\in\mathbb{R}$.

**4.2.** Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in A$. Η $f$ έχει όριο τον αριθμό $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $x$ τείνει στο $x_0$, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $A-\{x_0\}$, που συγκλίνει στο $x_0$, η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ των εικόνων της $f$ συγκλίνει στον $\ell$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για την Πρόταση 4.1.8. Για το αντίστροφο, να υποθέσετε ότι το όριο της $f$ στο $x_0$ δεν ισούται με $\ell$, δηλαδή, ότι υπάρχει $\varepsilon_1>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ με $|x-x_0|<\delta$, ισχύει $|f(x)-\ell|\geq\varepsilon_1$ θεωρώντας $\delta=\dfrac{1}{n}$.

**4.3.** Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, όπου $A\cap B\neq\varnothing$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A\cap B$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, όταν $b\neq 0$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 4.1.8.

**4.4.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$, να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$, όπου $x_0$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της *f*.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε $\big||f(x)|-|\ell|\big|\leq|f(x)-\ell|$ και τον Ορισμό 4.1.3.

**4.5.** Έστω οι συναρτήσεις *f*, *g*, και *h* με κοινό πεδίο ορισμού το *A*, και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του *A*. Αν ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, για κάθε $x\in A$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$, να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

Υπόδειξη: Από τον Ορισμό 4.1.3 για τις συναρτήσεις *g* και *h* προκύπτει
$\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$, όταν $|x-x_0|<\delta_1$, για κάποιο $\delta_1>0$, και
$\ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$, όταν $|x-x_0|<\delta_2$, για κάποιο $\delta_2>0$.
Να θεωρήσετε $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ και να επαληθεύσετε τον Ορισμό 4.1.3.

**4.6.** Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, με $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot f(x)\right)=0$.

Υπόδειξη: Επειδή η $f$ είναι φραγμένη, θεωρήστε ότι είναι και απόλυτα φραγμένη, οπότε υπάρχει $M>0$, $M\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $|f(x)|\leq M$, για κάθε $x\in A$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, για $\dfrac{\varepsilon}{M}>0$ υπάρχει $\delta_1>0$, ώστε $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$, για κάθε $x\in A$, με $|x-x_0|<\delta_1$.
Να επαληθεύσετε τον Ορισμό 4.1.3 για τη συνάρτηση $g(x)\cdot f(x)$.

**4.7.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.2 (iii).

**4.8.** Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις, $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του *A*, με $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$ και $f(x)\leq g(x)$, για κάθε $x\in A$, (ή σε ένα διάστημα $I\subseteq A$, όπου $x_0\in I$ ).

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.2 (vi).

**4.9.** Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στην Πρόταση 4.2.1 (iv).

**4.10.** Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}-x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^4-3x+2}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-3x^2+5x-2}{x^3+3x^2-2x+1}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

**4.11.** Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\cos(x)=0$

Υπόδειξη: Ανάλογη απόδειξη στο Παράδειγμα 4.3.5 (iii).

**4.12.** Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\sqrt{6-x}}{x^2-4}$ ii) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^3-1}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^7-1}{x^{10}-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Υπόδειξη: Για το (iv) να θέσετε $x=y^{12}$.

**4.13.** Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}$ iv) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin(x)}$

v) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-\cos(3x)}{x^2}$ vi) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)}{x}$

Υπόδειξη: Στο (i) να θέσετε $y=x-\dfrac{\pi}{6}$.

Στο (ii) να πολλαπλασιάσετε με $(1+\cos(x))$.

Στο (iv) και (v) να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

**4.14.** Αν $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-g(x)+x\right)=3$, και $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)+g(x)-x\right)=5$, να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1} g(x)$.

**4.15.** Να εξετάσετε τη συνέχεια των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f_1(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ 2, & \text{αν } x=0 \\ 2x+1, & \text{αν } x>0 \end{cases}$, ii) $f_2(x)=\begin{cases} 1+\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right), & \text{αν } x<1 \\ 0, & \text{αν } x=1 \\ x\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right), & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

iii) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ 0, & \text{αν } x=1\\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{αν } x>1\end{cases}$, iv) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{|x|}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$.

**4.16.** Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση (Dirichlet)

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάποια σημεία του $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον Ορισμό 4.5.1, για $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, η $f$ δεν είναι συνεχής.

**4.17.** Για ποιες τιμές του $a$ οι ακόλουθες συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{αν } x\leq 1\\ 3-ax^2, & \text{αν } x>1\end{cases}$, ii) $g(x)=\begin{cases}\cos(x)+3a-3, & \text{αν } x>0\\ 1, & \text{αν } x=0\\ \sin(x)+a^2, & \text{αν } x<0\end{cases}$

είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

**4.18.** Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση $(x+1)2^{x+1}=1$ έχει μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

**4.19.** Αν $a<b$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-a}+\frac{x^6+1}{x-b}=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(a, b)$.