ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σειρές πραγματικών αριθμών

Προσέγγιση του π

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$	Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287 π.Χ - 212 π.Χ.)
$\pi = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$	François Viète (1540 - 1603)
$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$	John Wallis (1616 - 1703)
$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{\vdots}}}}}$	Viscount Brouncker (1620 - 1684)
$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$	James Gregory (1638 - 1675)
$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}+\cdots$	Sir Isaac Newton (1643 - 1727)
$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$	Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)
$\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$	Leonhard Euler (1707 - 1783)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σειρές πραγματικών αριθμών

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται όλοι οι ορισμοί και τα σημαντικότερα κριτήρια ελέγχου σύγκλισης των σειρών πραγματικών αριθμών. Ειδικές σειρές μελετώνται, όπως είναι οι γεωμετρικές, οι τηλεσκοπικές, οι p-αρμονικές, οι εναλλάσσουσες.

Προαπαιτούμενη γνώση
Ακολουθίες πραγματικών αριθμών, άθροισμα n-πρώτων όρων ακολουθίας.

3.1 Ορισμοί

Οι σειρές είναι ειδικές περιπτώσεις ακολουθιών, που χρησιμοποιούνται είτε για την προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα (ως δυναμοσειρές Taylor), είτε από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (ως σειρές Fourier), τα οποία βρίσκουν πολλές εφαρμογές στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, στα Σήματα και Συστήματα, στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, στις Τηλεπικοινωνίες, στην Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων, στη Θεωρία Ουρών κ.ά., (βλέπε, Ασημάκης, Ν. (2008), Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014), Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014), Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015)).

Ορισμός 3.1.1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, από την οποία κατασκευάζεται μία νέα ακολουθία πραγματικών αριθμών, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = a_1 + a_2 \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ &S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

Η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία των **μερικών αθροισμάτων** των όρων της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Το όριο της ακολουθίας $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, καθώς το n τείνει στο άπειρο (σημειώνεται $n \to +\infty$), ονομάζεται **σειρά πραγματικών αριθμών** (series of real numbers) και συμβολίζεται $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.1.1}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέγονται **όροι** της σειράς, ειδικότερα ο a_n ονομάζεται **γενικός όρος** της, και

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (3.1.2)$$

λέγεται **μερικό άθροισμα** των ***n* πρώτων όρων** της σειράς.

Σε μερικές περιπτώσεις η σειρά μπορεί να αρχίζει την άθροιση από τον i όρο με $i \neq 1$, και τότε σημειώνεται $\sum_{n=i}^{\infty} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n + \cdots$.

Αν όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί (αρνητικοί) αριθμοί, τότε αυτή ονομάζεται **θετική (αρνητική)** σειρά, ενώ αν οι όροι της εναλλάσσονται από θετικό σε αρνητικό αριθμό, η σειρά ονομάζεται **εναλλάσσουσα σειρά** (alternating series).

Παραδείγματα 3.1.2.

Στη συνέχεια, ορισμένα από τα χαρακτηριστικότερα μερικά αθροίσματα παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της σειράς στην (3.1.1) και την ορολογία του Ορισμού 3.1.1:

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots$

έχει όρους τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ο τύπος του μερικού αθροίσματος αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Εδώ να υπενθυμίσουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = n$ είναι αριθμητική πρόοδος[1] με $a_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$, γι' αυτό και η παραπάνω σειρά ονομάζεται *αριθμητική σειρά*. Το παραπάνω μερικό άθροισμα των n πρώτων της σειράς επαληθεύει το γενικό τύπο του αθροίσματος της αριθμητικής προόδου.

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \cdots$

έχει όρους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3.1.3)$$

Ο τύπος του μερικού αθροίσματος αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

iii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

[1] Η αριθμητική πρόοδος είναι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a_1 + (n-1)\omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου ω είναι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2}$.

έχει όρους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},\ldots,\frac{1}{n(n+1)},\ldots$, συνεπώς, είναι μία θετική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Η ανάλυση του n–οστού μερικού αθροίσματος της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ως διαφορά κλασμάτων, που είναι διαδοχικοί όροι μίας ακολουθίας, βασίζεται στο είδος της σειράς, (βλέπε, Ορισμό 3.1.10, και Παράδειγμα 3.1.11.(i)).

iv) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-4n-1)=(-5)+(-9)+\cdots+(-4n-1)+\cdots$

έχει όρους τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $-5,-9,-13,\ldots,(-4n-1),\ldots$, συνεπώς, είναι μία αρνητική σειρά, έχει γενικό όρο $a_n=-4n-1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-4k-1)=(-5)+(-9)+\cdots+(-4n-1)=-n(2n+3)$$

v) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$

έχει όρους τους ακέραιους αριθμούς $1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n+1},\ldots$, συνεπώς, είναι μία εναλλάσσουσα σειρά, έχει γενικό όρο $a_n=(-1)^{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}=\begin{cases}1, & \text{αν} \quad n=2r-1,\ r\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{αν} \quad n=2r,\ r\in\mathbb{N}\end{cases} \tag{3.1.5}$$

το οποίο είναι σταθερός αριθμός, εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n (αν είναι περιττός ή άρτιος).

vi) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)=\sin(1)+\sin(2)+\cdots+\sin(n)+\cdots$

έχει όρους τους πραγματικούς αριθμούς $\sin(1),\sin(2),\ldots,\sin(n),\ldots$, συνεπώς, η σειρά δεν ανήκει σε καμία κατηγορία, έχει γενικό όρο $a_n=\sin n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(k)=\sin(1)+\sin(2)+\cdots+\sin(k)$$ ◊◊

Ορισμός 3.1.3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό s, και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός s, τέτοιος ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στον αριθμό s, δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s \tag{3.1.6}$$

Ο πραγματικός αριθμός s ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς (3.1.1).
Αν $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ ($\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$), τότε η σειρά (3.1.1) ονομάζεται **αποκλίνουσα στο** $+\infty(-\infty)$, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει το όριο, τότε η σειρά λέγεται **ταλαντευόμενη** ή **αόριστα αποκλίνουσα**.

Παρατηρήστε ότι, ο παραπάνω ορισμός σχετικά με τη σύγκλιση ή την απόκλιση μίας σειράς συνεπάγεται από τους αντίστοιχους ορισμούς, που δόθηκαν στο Κεφάλαιο 2, για τις ακολουθίες, (βλέπε, Ορισμός 2.5.4, Ορισμός 2.7.1 και 2.7.2)

Ορισμός 3.1.4. Μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέγεται ότι **συγκλίνει απόλυτα** (ή είναι **απόλυτα συγκλίνουσα**), αν η σειρά των απολύτων τιμών της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, δηλαδή, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s.

Παραδείγματα 3.1.5.

i) Η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ του Παραδείγματος 3.1.2 (iii) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $s=1$, δικαιολογώντας το χαρακτηρισμό της σειράς ως συγκλίνουσας, (βλέπε, Ορισμό 3.1.3). Πράγματι, συνδυάζοντας την (3.1.4) με την (3.1.6) υπολογίζεται το όριο του μερικού αθροίσματος των n πρώτων όρων, που είναι ίσο με το άθροισμα της σειράς $s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με Matlab, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.4.)

ii) Η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ του Παραδείγματος 3.1.2 (ii) είναι αποκλίνουσα στο $+\infty$, επειδή συνδυάζοντας την (3.1.6) με το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων από την (3.1.3) υπολογίζεται ότι ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{6} \lim_{n\to+\infty} \big(n(n+1)(2n+1)\big) = +\infty ,$$

δικαιολογώντας το χαρακτηρισμό της σειράς ως αποκλίνουσας, (βλέπε, Ορισμό 3.1.3).

iii) Η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ του Παραδείγματος 3.1.2 (v) είναι ταλαντευόμενη, επειδή από την (3.1.5) και την (3.1.6) αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το όριο του μερικού αθροίσματος των n πρώτων όρων της. ◊◊

Ορισμός 3.1.6. Έστω ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός a. Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots, \tag{3.1.7}$$

ονομάζεται **γεωμετρική σειρά** με πρώτο όρο τον a και **λόγο** r.

Ο γενικός όρος της γεωμετρικής σειράς στην (3.1.7) είναι γεωμετρική ακολουθία[2] που έχει γενικό όρο $a_n = ar^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots,\}$.

Εφαρμογή 3.1.7. Η γεωμετρική σειρά στην (3.1.7), $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, $a \in \mathbb{R}-\{0\}$, είναι :

i) Συγκλίνουσα, όταν $|r|<1$, με άθροισμα

$$s = \frac{a}{1-r}. \tag{3.1.8}$$

ii) Αποκλίνουσα στο $+\infty$, όταν $r \geq 1$ και $a>0$, είναι αποκλίνουσα στο $-\infty$, όταν $r \geq 1$ και $a<0$.

iii) Ταλαντευόμενη, όταν $r \leq -1$.

Απόδειξη: Αν $r=1$, τότε προφανώς η γεωμετρική σειρά στην (3.1.7) έχει μερικό άθροισμα $S_n = a(n+1)$, συνεπώς, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, από όπου αποδεικνύεται ο ισχυρισμός στο (ii), όταν $r=1$.

Αν $r \neq 1$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1-r^{n+1} = (1-r)(1+r+\cdots+r^n)$ μπορούμε να γράψουμε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων ως ακολούθως

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}\right). \tag{3.1.9}$$

i) Για $|r|<1$, συνδυάζοντας την (3.1.9) με το χαρακτηριστικό όριο της γεωμετρικής ακολουθίας $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$, (βλέπε, Πρόταση 2.6.1, Πίνακας 2.3), προκύπτει

$$s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = \frac{a}{1-r}.$$

---

[2] Η γεωμετρική ακολουθία ή γεωμετρική πρόοδος είναι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a_1 r^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου r είναι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_n = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$.

ii) Για $r>1$, συνδυάζοντας το χαρακτηριστικό όριο της γεωμετρικής ακολουθίας $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ με την (3.1.9) προκύπτει

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = a\cdot(+\infty).$$

Συνεπώς, η γεωμετρική σειρά αποκλίνει προς το $\pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του a, συμπληρώνοντας έτσι την απόδειξη για το (ii).

iii) • Για $r=-1$, από το μερικό άθροισμα στην (3.1.9) επιλέγονται οι υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων S_{2n} και S_{2n-1} με $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = 0$. Συνεπώς, υπάρχουν δύο υπακολουθίες με διαφορετική οριακή τιμή (βλέπε, Πρόταση 2.5.9 (ii)), άρα, η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει, δηλαδή, το $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ δεν υπάρχει. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3 η σειρά είναι ταλαντευόμενη.

• Αν $a>0$ με $r<-1$ από την (3.1.9) έχουμε τις υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων να ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$, και $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = -\infty$.

Συνεπώς, για $r\le -1$ η σειρά ταλαντεύεται, όπως ταλαντεύεται και η αντίστοιχη ακολουθία $\left(r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του (iii). ◊◊

Ορισμός 3.1.8. Έστω p πραγματικός αριθμός. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3.1.10}$$

ονομάζεται **αρμονική σειρά** ***p*****-τάξης** ή ***p*****-αρμονική**. Είναι γνωστή και ως σειρά *Dirichlet*.

Εφαρμογή 3.1.9. Έστω η αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ δεύτερης τάξης ($p=2$).

Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των 10 πρώτων όρων της. Η σειρά συγκλίνει;

Απόδειξη: Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ είναι :

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}.$$

Το άθροισμα των παραπάνω όρων είναι $S_{10} = 1.54976$.

Σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.5.23, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς δεύτερης τάξης $(p=2)$, $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, είναι ακολουθία Cauchy, συνεπώς, είναι συγκλίνουσα ακολουθία (βλέπε, Θεώρημα 2.5.22). Επειδή όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί αριθμοί, προφανώς ένα κάτω φράγμα του αθροίσματος είναι το μηδέν. Στο Παράδειγμα 3.5.6 υπάρχει μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς με άνω φράγμα τον αριθμό 1.644, δηλαδή,

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1.644 .$$

Στο Παράδειγμα 10.1.17 (ii) αποδεικνύεται ότι το κάτω φράγμα του αθροίσματος της αρμονικής σειράς με $p = 2$ είναι ο αριθμός 1. ◊◊

Ορισμός 3.1.10. Τηλεσκοπική ονομάζεται η σειρά που έχει τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) + \cdots , \tag{3.1.11}$$

δηλαδή, ο γενικός όρος a_n της σειράς γράφεται ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών.

Το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της (3.1.11) είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3, η τηλεσκοπική σειρά συγκλίνει, όταν το άθροισμα της σειράς στην (3.1.11) είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή, όταν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} \tag{3.1.12}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, η τηλεσκοπική σειρά συγκλίνει, όταν $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Παραδείγματα 3.1.11.

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι, ο γενικός όρος $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ της σειράς έχει παρονομαστή γινόμενο διαδοχικών παραγόντων. Από αυτήν τη μορφή υποψιαζόμαστε ότι κάνοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα ο γενικός όρος a_n ίσως μπορούσε να γραφεί ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (βλέπε, Ορισμός 3.1.10). Γράφουμε διαδοχικά

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} ,$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$a + b = 0$$

$$a = 1$$

Η λύση του συστήματος είναι $a = 1$ και $b = -1$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a, b, ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1} ,$$

όπου θέτουμε $b_n = \frac{1}{n}$, και $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Άρα, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επιπλέον, από την (3.1.12) υπολογίζεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \frac{1}{1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1,$$

που είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως, η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.2 και Παράδειγμα 3.5.4.)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

Όπως παραπάνω στο (i) προσπαθούμε τον γενικό όρο $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ της σειράς να τον εκφράσουμε ως διαφορά δύο διαδοχικών όρων κάποιας ακολουθίας $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα. Γράφουμε διαδοχικά

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{b_1}{n+1} + \frac{b_2}{(n+1)^2} = \frac{a_1 n(n+1)^2 + a_2(n+1)^2 + b_1 n^2(n+1) + b_2 n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{(a_1+b_1)n^3 + (2a_1+a_2+b_1+b_2)n^2 + (a_1+2a_2)n + a_2}{n^2(n+1)^2}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 = 0 \\ &2a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0 \\ &a_1 + 2a_2 = 2 \\ &a_2 = 1 \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$ και $b_2 = -1$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a_1, a_2, b_1, b_2, ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = b_n - b_{n+1},$$

όπου θέτουμε $b_n = \frac{1}{n^2}$, και $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επιπλέον, από την (3.1.12) υπολογίζεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}=\frac{1}{1^2}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-0=1,$$

που είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}=1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

iii) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ είναι αποκλίνουσα στο $+\infty$.

Η σειρά έχει γενικό όρο $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, αν θέσουμε $b_n=\sqrt{n}$, τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει

$$b_n-b_{n+1}=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=-a_n.$$

Συνεπώς, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1}),$$

δηλαδή, η σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ είναι τηλεσκοπική σειρά.

Επειδή $\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$, από την (3.1.12) υπολογίζεται το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=-\left(b_1-\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}\right)=-\left(1-\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}\right)=+\infty$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει στο άπειρο, (βλέπε, Ορισμός 3.1.3). ◊◊

Ορισμός 3.1.12. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ονομάζεται **φραγμένη** αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 3.1.13.

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.2(i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}n$ έχει γενικό όρο $a_n=n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3.1.13)$$

Συνδυάζοντας την ισοδυναμία του Ορισμού 3.1.12 με την (3.1.13) συμπεραίνουμε ότι η σειρά δεν είναι φραγμένη, επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη. ◊◊

3.2 Κριτήρια σύγκλισης

Στην Ενότητα 2.5 διατυπώνονται τα σημαντικότερα κριτήρια, που χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί η σύγκλιση μίας σειράς σε πραγματικό αριθμό ή η απόκλισή της, την απόδειξη τους ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει σε οποιοδήποτε από τα συγγράμματα στη βιβλιογραφία.
Όπως διατυπώθηκε στο Θεώρημα Cauchy (βλέπε, Θεώρημα 2.5.22) ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση μίας ακολουθίας στον $\mathbb{R}$ είναι η ακολουθία να είναι Cauchy. Το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων είναι ακολουθία, συνεπώς, μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. (*Κριτήριο Cauchy*). Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $n_0(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \text{ για κάθε } m,n, \text{ με } m \geq n > n_0(\varepsilon). \tag{3.2.1}$$

Ισοδύναμες εκφράσεις της (3.2.1), είναι:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) > 0$: $|S_m - S_n| < \varepsilon$, για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, με $m \geq n > n_0(\varepsilon)$ (3.2.2)

για κάθε $\varepsilon > 0$, $\rho \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|S_{n+\rho} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_{n+\rho} - S_n) = 0$ (3.2.3)

Παρατηρήστε ότι, το παραπάνω κριτήριο δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία σειρά να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Εφαρμογή 3.2.2. Η αρμονική σειρά (harmonic series) πρώτης τάξης ($p=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει.

Απόδειξη: Αν η σειρά συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy, πρέπει να ισχύει η (3.2.2). Οπότε για $m = 2n$ πρέπει να υπάρχει $n_0(\varepsilon)$, (εξαρτάται από ε), τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n > n_0(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon \tag{3.2.4}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το γενικό όρο της αρμονικής σειράς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$|S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2},$$

άρα, δεν επαληθεύεται η (3.2.4). Συνεπώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει. ◊◊

Η ακόλουθη πρόταση στηρίζεται στην ισοδυναμία της Πρότασης 3.2.1.

Πρόταση 3.2.3. Έστω ότι η σειρά των πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: i) Επειδή από την υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\rho = 1$ στην (3.2.3), οπότε μπορούμε να γράψουμε $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1} - S_n) = 0$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, από όπου το συμπέρασμα είναι προφανές.

ii) Θεωρούμε[3] στο (i) ως πρόταση p: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και ως πρόταση q: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Το ζητούμενο είναι άμεσο συμπέρασμα από την ισοδυναμία που προκύπτει από την άρνηση της συνεπαγωγής στο (i). ◊◊

Παραδείγματα-Αντιπαραδείγματα 3.2.4.

i) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+7}$ **δεν** συγκλίνει, επειδή $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5} \neq 0$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.3 (ii)).

ii) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.2.2, η αρμονική σειρά πρώτης τάξης $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 ,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι το **αντίστροφο** της Πρότασης 3.2.3 (i) **δεν** ισχύει.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι αποκλίνουσα σειρά.

Πράγματι, για το αντίστοιχο μερικό άθροισμα ισχύει

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} .$$

Εφαρμόζοντας την (3.1.1) στην προηγούμενη ανισότητα προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty .$$

Συνεπώς, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

---

[3] Υπενθυμίζουμε ότι στον προτασιακό λογισμό όταν για δύο λογικές προτάσεις p,q η πρόταση «p ⇒ q» είναι ισοδύναμη με την πρόταση « όχι q ⇒ όχι p » .

Επίσης, για το γενικό όρο $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

το οποίο υποδηλώνει ότι το **αντίστροφο** της Πρότασης 3.2.3 (i) **δεν** ισχύει. ◊◊

Πρόταση 3.2.5. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, ($a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 3.2.6. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που διατυπώνεται στο (i) της Πρότασης 3.2.5. αναφέρεται μόνο σε σειρά με μη αρνητικό γενικό όρο. Αν θεωρήσουμε σειρά με γενικό όρο οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, συνδυάζοντας τον Ορισμό 3.1.3 με τον Ορισμό 3.1.12 συμπεραίνουμε ότι αν η σειρά είναι συγκλίνουσα, τότε είναι φραγμένη, όμως το αντίστροφο **δεν** ισχύει. Άρα, στη γενικότερη περίπτωση των πραγματικών αριθμών το αντίστροφο της Πρότασης 3.2.5 (i) δεν ισχύει.

Πράγματι, η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ είναι φραγμένη, επειδή για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad n = 2r-1,\ r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αν} \quad n = 2r,\ r \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ισχύει $|S_n| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.2 (v)). Ωστόσο, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει στους πραγματικούς αριθμούς, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.5 (iii)).

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται ένα κριτήριο με το οποίο συγκρίνοντας τους όρους δύο ακολουθιών, που αντιστοιχούν στους γενικούς όρους δύο σειρών, και γνωρίζοντας τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση (σύγκλιση/απόκλιση) της μίας σειράς από αυτές προκύπτουν συμπεράσματα και για τη σύγκλιση/απόκλιση της άλλης.

Πρόταση 3.2.7. (*Κριτήριο σύγκρισης*). Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι σειρές μη αρνητικών όρων και $0 \leq a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε,

i) αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ii) αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παραδείγματα 3.2.8.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n\geq 2$, ισχύει

$$n^n \geq 2^n,$$

η απόδειξη της ανισότητας μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Θεωρώντας τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n=\frac{1}{n^n}$ και $b_n=\frac{1}{2^n}$, από $n^n\geq 2^n$ συμπεραίνουμε

$$0<a_n\leq b_n.$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x=\frac{1}{2}<1$, οπότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (i)). Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)).

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ αποκλίνει.

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n\geq 1$, ισχύει

$$0<\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n=\frac{1}{n+1}$ και $b_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ισχύει

$$0<a_n\leq b_n.$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), οπότε σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.2.2,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

αποκλίνει. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ αποκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (ii)).

iii) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+n}{5^n+n^2}$ συγκλίνει. Υπάρχει εκτίμηση για άνω και κάτω φράγμα της σειράς;

Αρχικά παρατηρούμε, ότι για κάθε $n\geq 1$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli[4] μπορούμε να γράψουμε $2^n=(1+1)^n\geq 1+n \Rightarrow n\leq 2^n-1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανίσωση ο γενικός όρος της σειράς γράφεται, ισχύει

$$0<\frac{2^n+n}{5^n+n^2}<\frac{2^n+2^n-1}{5^n+n^2}<\frac{2\cdot 2^n}{5^n}=2\left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

[4] Για κάθε $x>-1$ ισχύει: $(1+x)^n\geq 1+nx$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, (βλέπε, Ενότητα 2.6).

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n = \frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ και $b_n = 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ισχύει $0 < a_n \le b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ με τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ να έχει λόγο $r = \frac{2}{5} < 1$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7 (i) η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, που υπολογίζεται από την (3.1.8),

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}.$$

Άρα, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)). Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.5 (i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n + n}{5^n + n^2}$ είναι φραγμένη, οπότε ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n + n}{5^n + n^2} < 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{10}{3}$, άρα ένα άνω φράγμα της δοθείσας σειράς είναι το 10/3, και κάτω φράγμα της είναι το μηδέν, επειδή όλοι οι όροι του γενικού όρου της σειρά είναι θετικοί αριθμοί. ◊◊

Οι επόμενες προτάσεις αποτελούν γενίκευση της Πρότασης 2.5.10 των ακολουθιών, όπου διατυπώνονται οι ιδιότητες των πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης σειρών και δίνουν πληροφορίες για τη σύγκλιση/απόκλιση του αθροίσματος των αντίστοιχων σειρών.

Πρόταση 3.2.9. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί a, b, k, λ, και οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(ka_n + \lambda b_n\right) = ka + \lambda b.$$

Πρόταση 3.2.10. Έστω $a \in \mathbb{R}$, η συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, και η αποκλίνουσα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

αποκλίνει.

Παραδείγματα 3.2.11.

i) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n - 3^n}{4^n + 7^n}$ συγκλίνει.

Πράγματι, η αρχική σειρά γράφεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n+7^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4^n+7^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+7^n}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n\geq 1$, ισχύει

$$0<\frac{2^n}{4^n+7^n}<\frac{2^n}{7^n}=\left(\frac{2}{7}\right)^n,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για τις ακολουθίες θετικών όρων $a_n=\dfrac{2^n}{4^n+7^n}$ και $b_n=\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$ ισχύει $0<a_n\leq b_n$.

Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{2}{7}<1$, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για συγκλίνουσα σειρά, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (i)). Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4^n+7^n}$$

συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)).
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+7^n}$$

είναι συγκλίνουσα σειρά.
Θέτοντας $k=1$, $\lambda=-1$ στην Πρόταση 3.2.9, συμπεραίνουμε ότι η διαφορά συγκλινουσών σειρών είναι συγκλίνουσα, συνεπώς

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n+7^n}$$

συγκλίνει.

ii) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3n+2}{5n+7}\right)$ αποκλίνει.

Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{1}{2}<1$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7 (i) η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Επιπλέον,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+7}$$

είναι αποκλίνουσα σειρά, (βλέπε, Παράδειγμα 3.2.4 (i)). Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο στην Πρόταση 3.2.10 καταλήγουμε στο συμπέρασμα. ◊◊

Πρόταση 3.2.12. (*Κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy*). Έστω ότι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία φθίνουσα μη αρνητικών αριθμών, (δηλαδή, $a_n\geq a_{n+1}\geq 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$).

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (αποκλίνει στο $+\infty$).

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (αποκλίνει στο $+\infty$).

Εφαρμογή 3.2.13. Έστω p πραγματικός αριθμός. Η αρμονική σειρά p-τάξης,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

i) συγκλίνει, όταν $p > 1$, και

ii) αποκλίνει στο $+\infty$, όταν $p \leq 1$.

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν θεωρήσουμε $p \leq 0 \Rightarrow -p = k \geq 0$, τότε ισχύει $\lim_{n\to+\infty} n^{-p} = \lim_{n\to+\infty} n^k \neq 0$, και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι σειρά θετικών όρων. Επομένως, η σειρά δεν συγκλίνει στους πραγματικούς αριθμούς, αποκλίνει στο $+\infty$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.3 (ii)).
- Αν θεωρήσουμε $p > 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $a_n = \frac{1}{n^p}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.12), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x^k \;, \qquad (3.2.5)$$

όπου $r \equiv 2^{1-p}$. Προφανώς στην (3.2.5) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ είναι γεωμετρική σειρά. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7 η παραπάνω γεωμετρική σειρά συγκλίνει, όταν $2^{1-p} < 1 = 2^0 \Rightarrow p > 1$, ενώ η γεωμετρική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, όταν $2^{1-p} \geq 1 = 2^0 \Rightarrow p \leq 1$, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (ii)). ◊◊

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται ένα κριτήριο, το οποίο αναφέρεται στην οριακή τιμή του λόγου των γενικών όρων δύο θετικών σειρών και γνωρίζοντας τη σύγκλιση/απόκλιση μίας σειράς από αυτές προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση/απόκλιση της άλλης. Το κριτήριο στη βιβλιογραφία είναι γνωστό και ως δεύτερο κριτήριο σύγκρισης, το πρώτο διατυπώθηκε στην Πρόταση 3.2.7.

Πρόταση 3.2.14. (*Κριτήριο οριακής σύγκλισης ή γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης*). Έστω ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είναι σειρές μη αρνητικών όρων και $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$.

i) Αν $0<k<+\infty$, και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (αποκλίνει) $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (αποκλίνει).

ii) Αν $k=0$, και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

iii) Αν $k=+\infty$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.2.15.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^4+5}$ συγκλίνει.

Ο γενικός όρος της σειράς είναι $b_n=\frac{2n+1}{3n^4+5}\geq 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο οποίος παράγει όλους τους όρους της θετικούς. Η ισοδυναμία που υπάρχει στο (i) του κριτηρίου οριακής σύγκλισης (ή γενικευμένου κριτηρίου σύγκρισης) οδηγεί στην αναζήτηση μίας «βοηθητικής» ακολουθίας, της οποίας γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της αντίστοιχης σειράς (σύγκλιση/απόκλιση)[5] και επιπλέον η οριακή τιμή του πηλίκου των δύο ακολουθιών να είναι μη μηδενική πεπερασμένη τιμή, (βλέπε, Παρατήρηση 3.2.16 (ii)).

Εδώ παρατηρήστε ότι, η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία που αντιστοιχεί σε ρητή συνάρτηση με αριθμητή ένα πολυώνυμο 1[ου] βαθμού και παρονομαστή 4[ου] βαθμού. Για να προκύψει οριακή τιμή πραγματικός αριθμός (διάφορος του μηδενός), αρκεί να επιλέξουμε μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο τέτοιον ώστε ο παρονομαστής της να είναι πολυώνυμο βαθμού ίσου με τη διαφορά των βαθμών των προηγούμενων πολυωνύμων, δηλαδή, επιλέγουμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n=\frac{1}{n^3}>0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.7.1 (i), προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{3}{2}=k.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ είναι p-αρμονική με $p=3>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13 (i)). Επιπλέον, $k=\frac{3}{2}$, συνεπώς εφαρμόζοντας το κριτήριο οριακής σύγκλισης, (βλέπε, Πρόταση 3.2.14 (i)), καταλήγουμε στο συμπέρασμα. ◊◊

[5] Ακολουθίες, που γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των «σειρών» είναι οι αντίστοιχες σε γεωμετρικές ή p-αρμονικές, κ.α., (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 και Εφαρμογή 3.2.13).

Παρατηρήσεις 3.2.16.

i) Τα δύο κριτήρια σύγκρισης (βλέπε, Πρόταση 3.2.7., Πρόταση 3.2.14.), αναφέρονται σε σειρές των οποίων οι γενικοί όροι είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

ii) Η Πρόταση 3.2.7. εφαρμόζεται συνήθως, όταν πρόκειται να μελετηθούν σειρές με φαινομενικά «σύνθετους-πολύπλοκους» γενικούς όρους από σειρές με «απλούστερους» γενικούς όρους, με την προϋπόθεση ότι η σύγκλιση/απόκλιση της «απλούστερης» σειράς είναι γνωστή, τέτοιες σειρές επιλέγονται να είναι μία από τις γεωμετρική, p-αρμονική, τηλεσκοπική σειρά, κ.α., (βλέπε, Παράδειγμα 3.2.15).

iii) Η Πρόταση 3.2.14. εφαρμόζεται συνήθως, όταν ο γενικός όρος της σειράς έχει ρητή μορφή ή όταν προκύπτει $\lambda = 1$ κατά την εφαρμογή των κριτηρίων λόγου ή ρίζας, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17, Πρόταση 3.2.19), χρησιμοποιώντας ως «γνωστή σειρά» μία από τις γεωμετρική, p-αρμονική, τηλεσκοπική σειρά, κ.α., (βλέπε, Παραδείγματα 3.2.11).

Πρόταση 3.2.17. (*Κριτήριο λόγου του D' Alembert*). Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να είναι σειρά μη μηδενικών όρων και $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$, με λ μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ή $\lambda = +\infty$.

i) Αν $\lambda < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

ii) Αν $\lambda > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει στο $+\infty$, και $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

iii) Αν $\lambda = 1$, δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Παραδείγματα 3.2.18.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει.

Πράγματι, θέτοντας $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, και χρησιμοποιώντας $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, (βλέπε, Πίνακα 2.3 ή Πρόταση 2.6.6), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = \lambda < 1.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου του D' Alembert, συμπεραίνουμε ότι η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17 (i)).

ii) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ είναι συγκλίνουσα.

Θέτοντας $a_n=\frac{|x|^n}{n!}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το γενικό όρο της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0=\lambda<1.$$

Επειδή η παραπάνω οριακή τιμή είναι ανεξάρτητη του x, εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17 (i)).

◊◊

Πρόταση 3.2.19. (*Κριτήριο ρίζας του Cauchy*). Έστω η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ πραγματικών αριθμών και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda$, με λ μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ή $\lambda=+\infty$.

i) Αν $0\le\lambda<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει.

ii) Αν $\lambda>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ αποκλίνει στο $+\infty$.

iii) Αν $\lambda=1$, δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε για τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Παραδείγματα 3.2.20.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n-1}{3^n}$ συγκλίνει.

Θέτοντας $a_n=\frac{n^3+2n-1}{3^n}>0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n-1}{3^n}$, και χρησιμοποιώντας $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, (βλέπε, Πίνακα 2.3 ή Πρόταση 2.6.5), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^3+2n-1}{3^n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3+2n-1}{3^n}}=\frac{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^3}}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n}}=\frac{\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3}{3}=\frac{1}{3}=\lambda<1$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^3+2n-1}{3^n}\right|$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.19 (i)). Επιπλέον, η αρχική σειρά είναι θετική, άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n-1}{3^n}$ συγκλίνει.

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Θέτοντας $a_n=\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}>0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το γενικό όρο της θετικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$, και χρησιμοποιώντας $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^{3n}}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+2n+1}}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^n}\right)^3}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}}=\frac{e^3}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\right)^2}=e^3=\lambda>1$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, συμπεραίνουμε ότι η θετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}}{(n+1)^2}$ αποκλίνει στο $+\infty$, (βλέπε, Πρόταση 3.2.19 (ii)). ◊◊

Το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης σειρών βασίζεται στη γνωστή ιδιότητα των απολύτων τιμών

$$|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta,$$

όπου $\theta\ge 0$. Αν θεωρήσουμε ότι στην παραπάνω ισοδυναμία στη θέση του x υπάρχει μία σειρά μίας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, και στη θέση του θ υπάρχει το άθροισμα των απολύτων τιμών των όρων της ακολουθίας, τότε, θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\Leftrightarrow-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\le\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

Συνδυάζοντας το κριτήριο παρεμβολής των ακολουθιών, (βλέπε, Πρόταση 2.5.17), την ιδιότητα των απολύτων τιμών του αθροίσματος[6] με την παραπάνω ισοδυναμία οδηγούμαστε στην ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση μίας απόλυτα συγκλίνουσας σειράς και της αρχικής της.

Πρόταση 3.2.21. (*Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης*). Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι σειρά πραγματικών αριθμών.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει και μάλιστα ισχύει

[6] Υπενθυμίζεται ότι για δύο πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει: $|a+b|\le|a|+|b|$.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \tag{3.2.6}$$

ToTo αντίστροφο **δεν** αληθεύει πάντοτε, βλέπε, Παρατήρηση-Αντιπαράδειγμα 3.3.4.

Παρατήρηση 3.2.22. Το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε εκείνες τις περιπτώσεις σειρών πραγματικών αριθμών, όπου οι σειρές έχουν τυχαίους όρους. Επειδή, τα περισσότερα κριτήρια όπως στις Προτάσεις 3.2.5, 3.2.7, 3.2.12, 3.2.14, 3.2.17, 3.2.19, που έχουν αναφερθεί έως εδώ, αναφέρονται σε σειρές με μη αρνητικούς όρους και το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης οδηγεί σε συμπέρασμα μόνο στην περίπτωση σύγκλισης της σειράς (όχι απόκλιση), στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης των σειρών τυχαίων όρων, πρώτα εφαρμόζονται τα κριτήρια για την απόλυτη σύγκλιση και μόνο όταν εξασφαλίζεται η απόλυτη σύγκλιση εφαρμόζεται η Πρόταση 3.2.21 για να προκύψουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα για την αρχική σειρά.

Παράδειγμα 3.2.23.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ συγκλίνει, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε $a_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ το γενικό όρο της σειράς, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$.

Επειδή, $|\sin(n\theta)| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε :

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

Επιπλέον, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει, επειδή έχει λόγο $r = \frac{1}{2} < 1$, οπότε εφαρμόζοντας το πρώτο κριτήριο σύγκρισης, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right|$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)). Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.21 η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ συγκλίνει. ◊◊

Στο Κεφάλαιο 10 των γενικευμένων ολοκληρωμάτων θα συναντήσουμε το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης των (αριθμητικών) σειρών (βλέπε, Θεώρημα 10.1.16), το οποίο δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση (σύγκλιση/απόκλιση) ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης και της σειράς με γενικό όρο εξαρτώμενο από τη συνάρτηση. Επιπλέον, σε περίπτωση σύγκλισης μπορούμε να έχουμε εκτίμηση για το διάστημα, όπου το άθροισμα βρίσκεται, συνεπώς μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του αθροίσματος από ένα άνω και κάτω φράγμα.

Πρόταση 3.2.24. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{1}^{+\infty} f(x) dx ,$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = s$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα, δηλαδή, έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση.

Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει

$$I < s < I + f(1), \tag{3.2.7}$$

όπου $I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \int_1^r f(x)dx$.

Παράδειγμα 3.2.25. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ συγκλίνει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4x^2}$, για κάθε $x \in [1,+\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, θετική, και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5) και επιπλέον ισχύει

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^2}dx = \frac{1}{4}\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{4}\lim_{r\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^r = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^r = \frac{1}{4}\left(-\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}+1\right) = \frac{1}{4}. \tag{3.2.8}$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.24 και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

είναι συγκλίνουσα σειρά. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (3.2.8) και $f(1) = \frac{1}{4}$ στην (3.2.7) συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα έχει τιμή, που ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0.25, 0.5)$, επειδή ισχύει

$$\frac{1}{4} < s < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Παρατήρηση: Η Πρόταση 3.2.24 όπως το Θεώρημα 10.1.16 είναι ιδιαίτερα σημαντικά, αποτελέσματα, επειδή συνδέουν τις πληροφορίες της σύγκλισης της σειράς με το γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επομένως, όταν ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε πληροφορίες για τη σύγκλιση της σειράς και μάλιστα σε ποιο διάστημα εντοπίζεται το άθροισμά της, τότε χρειάζεται η γνώση του αντίστοιχου γενικευμένου ολοκληρώματος. Όμοια, όταν ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε πληροφορίες για τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος (βλέπε, Εφαρμογή 10.1.3), τότε χρειάζεται η γνώση της αντίστοιχης σειράς (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13). ◊◊

3.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Στην παρούσα ενότητα, θα ασχοληθούμε με τη σύγκλιση των εναλλασσουσών σειρών, (βλέπε, Ορισμός 3.1.1) και την εκτίμηση του αθροίσματός τους, (βλέπε, Πρόταση 3.3.5).

Πρόταση 3.3.1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι εναλλάσσουσα αν και μόνο αν ισχύει

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0 \text{, για κάθε } n\in\mathbb{N}. \tag{3.3.1}$$

Η Πρόταση 3.3.1 δίνει ένα ισοδύναμο κριτήριο του Ορισμού 3.1.1, προκειμένου να αποδεικνύεται ότι μία σειρά είναι εναλλάσσουσα, χρησιμοποιώντας μόνο το γενικό όρο της σειράς.

Πρόταση 3.3.2. (*Κριτήριο Leibniz*). Αν οι απόλυτες τιμές των όρων μίας εναλλάσσουσας σειράς αποτελούν φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, τότε η σειρά συγκλίνει.

Ισοδύναμα, αν για $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και

ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

τότε, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει.

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι αν για την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ισχύουν οι προϋποθέσεις σύγκλισης του κριτηρίου Leibniz, συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$, η οποία έχει πρώτο όρο $-a_1<0$. Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 3.2.9 και της σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Εφαρμογή 3.3.3. Έστω p ένας θετικός αριθμός, ($p>0$). Η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά p-τάξης,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^{p}}, \tag{3.3.2}$$

συγκλίνει.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία των θετικών όρων $a_n=\frac{1}{n^p}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή, $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $p>0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1/n^p}{1/(n+1)^p}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\geq 1\Rightarrow a_n\geq a_{n+1},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, (βλέπε, Ενότητα 2.3, Παρατήρηση 2.3.2). Επιπλέον, σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.5.18 έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις της Πρότασης 3.3.2 επαληθεύονται, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει.

◊◊

Παρατήρηση-Αντιπαράδειγμα 3.3.4. Η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

συγκλίνει, και **δεν** συγκλίνει απόλυτα.
Πρώτα αποδεικνύεται, ότι η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει, εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\frac{1}{n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Προφανώς, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών όρων. Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=a_n,$$

και μηδενική, προφανώς ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, (βλέπε, Πρότασης 3.3.2), άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ συγκλίνει.
Παρατηρούμε ότι, η σειρά **δεν** συγκλίνει απόλυτα, (βλέπε, Ορισμός 3.1.4), επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει ως p-αρμονική με $p=1$, (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2).

Έτσι μελετήθηκε ένα παράδειγμα, που ενώ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ συγκλίνει, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right|$ αποκλίνει, άρα το αντίστροφο της Πρότασης 3.2.21 **δεν** ισχύει.
Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave υπολογίζεται ότι το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ είναι $s=\ln(2)=0.69314$. ◊◊

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, οι συγκλίνουσες εναλλάσσουσες σειρές έχουν άθροισμα, που μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.5. (*Εκτίμησης αθροίσματος εναλλάσσουσας σειράς*). Αν η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 3.3.2, τότε το $n-$οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$$

προσεγγίζει το άθροισμα s της σειράς με σφάλμα, του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μικρότερη από τον $(n+1)$ -όρο της ακολουθίας, δηλαδή,

$$\left|s - S_n\right| = \left|s - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \ . \tag{3.3.3}$$

Επίσης, το υπόλοιπο $s - S_n$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον όρο a_{n+1}.

Παράδειγμα 3.3.6. Να υπολογιστεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$.

Πρόκειται για μία εναλλάσσουσα σειρά για την οποία πρώτα εξετάζεται η σύγκλισή της ελέγχοντας, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{2n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η οποία προφανώς είναι ακολουθία θετικών όρων. Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = a_n ,$$

και μηδενική, προφανώς ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1} = 0 .$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2), άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ συγκλίνει.

Επειδή ζητείται μία εκτίμηση του αθροίσματος της σειράς με σφάλμα μικρότερο του 0.01, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.5, θα πρέπει

$$a_{n+1} < 0.01 = 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 48.5 .$$

Επομένως, πρέπει να γνωρίζουμε το άθροισμα των πρώτων 49 όρων προκειμένου το σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.01.

Υπολογίζοντας τον $a_{50} = 0.0099009$, το μερικό άθροισμα των 49 πρώτων όρων της σειράς $S_{49} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{1}{99} = 0.2196013$, και συνδυάζοντας την ιδιότητα της απόλυτης τιμής με την (3.3.3) μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|s - S_{49}\right| \le a_{50} \Leftrightarrow -a_{50} + S_{49} \le s \le a_{50} + S_{49} \ \Leftrightarrow \ 0.2097004 \le s \le 0.2295022$$

Άρα, το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων είναι ένας πραγματικός αριθμός s με $s \in [0.209, 0.229]$.

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς υπολογίζεται ότι είναι $s = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.214$, το οποίο πράγματι ανήκει στο παραπάνω διάστημα $[0.209, 0.229]$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.5.3). ◊◊

3.4 Παραδείγματα και Εφαρμογές

Παράδειγμα 3.4.1. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1}{12}.$$

Πράγματι, η σειρά έχει γενικό όρο $a_n=\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, αν κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα, όπως στο Παράδειγμα 3.1.11 (i), τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n=\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{a_1}{4n-1}+\frac{a_2}{4n+3}=\frac{(4a_1+4a_2)n+3a_1-a_2}{(4n-1)(4n+3)}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned}4a_1+4a_2&=0\\ 3a_1-a_2&=1\end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $a_1=\dfrac{1}{4}$, και $a_2=-\dfrac{1}{4}$.

Συνεπώς, μετά την αντικατάσταση των τιμών των a_1,a_2, ο γενικός όρος αναλύεται σε απλά κλάσματα

$$a_n=\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1/4}{4n-1}-\frac{1/4}{4n+3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left(b_n-b_{n+1}\right),$$

όπου θέτουμε $b_n=\dfrac{1}{4n-1}$, και $b_{n+1}=\dfrac{1}{4n+3}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, από την παραπάνω ανάλυση, η σχέση που συνδέει την αρχική ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με την ακολουθία $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι:

$$a_n=\frac{1}{4}\left(b_n-b_{n+1}\right) \tag{3.4.1}$$

Επομένως, η δοθείσα σειρά έχει τη μορφή στην (3.1.11), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ είναι τηλεσκοπική σειρά, (βλέπε, Ορισμός 3.1.10).

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty}b_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4n+3}=0$, συνδυάζοντας την (3.4.1) με την (3.1.12) υπολογίζεται το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=\frac{1}{4}\left(b_1-\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{12}$$

Επομένως, το άθροισμα της τηλεσκοπικής σειράς είναι πραγματικός αριθμός, η σειρά συγκλίνει σε αυτόν, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1}{12}.$$

◊◊

Παράδειγμα 3.4.2. Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$$

συγκλίνει και να υπολογιστεί ένα άνω και κάτω φράγμα για το αντίστοιχο άθροισμά της.

Η δοθείσα σειρά έχει γενικό όρο $a_n=\frac{1}{2^n+1}$, για κάθε $n=2,3,\dots$.

Είναι φανερό ότι μπορούμε να γράψουμε

$$a_n=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}=b_n\ ,$$

και ότι οι ακολουθίες, που δημιουργούνται από τους παραπάνω γενικούς όρους a_n και b_n, είναι θετικών όρων.

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{1}{2}<1$, οπότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.7 (i)). Το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς υπολογίζεται από την ισότητα στην (3.1.8) και είναι ίσο με

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1-\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}. \tag{3.4.2}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο σύγκρισης για τις θετικές σειρές $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, (βλέπε, Πρόταση 3.2.7 (i)). Από τη σύγκλιση της σειράς συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, Πρόταση 3.2.5 (i)). Συνεπώς, από (3.4.2) γράφουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

Άρα, ένα άνω φράγμα της $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ είναι $\frac{1}{2}$, και ένα κάτω φράγμα της είναι το μηδέν, επειδή όλοι οι όροι του γενικού όρου της σειρά είναι θετικοί αριθμοί. ◊◊

Παράδειγμα 3.4.3. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες σειρές είναι αποκλίνουσες:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(2n)}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ iii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}$,

ο δεκαδικός λογάριθμος σημειώνεται με $\log n$.

i) Θεωρούμε ότι οι όροι της σειράς δίνονται από την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n=\frac{1}{n\log(2n)}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή, για $n\geq 1\Rightarrow \log(2n)>0$, οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση $f(x)=\log x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, είναι αύξουσα, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.4 (ii)), οπότε το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη ακολουθία, συνεπώς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\log(2n) < \log\big(2(n+1)\big) \Rightarrow n\log(2n) < n\log\big(2(n+1)\big) < (n+1)\log\big(2(n+1)\big),$$
από όπου προκύπτει
$$a_n = \frac{1}{n\log(2n)} > \frac{1}{(n+1)\log\big(2(n+1)\big)} = a_{n+1}.$$
Άρα, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.12), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(2n)}$ ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2\cdot 2^n)}$, για την οποία έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2\cdot 2^n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(2\cdot 2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2+\log(2^n)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2 + n\log 2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot\log 2 + n\log 2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log 2} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Επιπλέον, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ αποκλίνει (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2). Συνδυάζοντας την ισότητα στην (3.4.3) με την απόκλιση της αρμονικής σειράς συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2\cdot 2^n)}$ αποκλίνει. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(2n)}$ αποκλίνει.

ii) Η δοθείσα σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ έχει γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n\log n}$, για κάθε $n = 2,3,\ldots$.
Επειδή, για $n\geq 2 \Rightarrow \log(n) > \log 2 > 0$, είναι φανερό ότι $a_n > 0$.
Όπως αναφέρθηκε παραπάνω στο (i), χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης για την αντίστοιχη ακολουθία με $n\geq 2$, μπορούμε να γράψουμε
$$\log n < \log(n+1) \Rightarrow n\log n < n\log(n+1) < (n+1)\log(n+1),$$
από όπου προκύπτει
$$a_n = \frac{1}{n\log n} > \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = a_{n+1}.$$
Άρα, $(a_n)_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.12), η μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης/απόκλισης της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2^n)}$, για την οποία έχουμε:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log 2} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Επιπλέον, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ είναι αρμονική σειρά πρώτης τάξης ($p=1$), συνεπώς αποκλίνει (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2). Επομένως, από την παραπάνω ισότητα και την απόκλιση της αρμονικής σειράς συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\log(2^n)}$ αποκλίνει. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο συσσώρευσης του Cauchy η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ αποκλίνει.

iii) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}$ έχει γενικό όρο $a_n=\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}$, για κάθε $n=2,3,\ldots$

Όπως παραπάνω στο (ii) αποδεικνύεται ότι $a_n>0$, για κάθε $n\geq 2$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο οριακής σύγκλισης για τις ακολουθίες $a_n=\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}>0$, και την ακολουθία του (ii), που εδώ ο γενικός της όρος σημειώνεται $b_n=\frac{1}{n\log n}>0$, για κάθε $n\geq 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}}{\frac{1}{n\log n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\log n}{\log n}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}=1=k>0.$$

Επειδή, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ αποκλίνει, (βλέπε, Παράδειγμα 3.4.3 (ii)), σύμφωνα με το κριτήριο οριακής σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\log n}{n(\log n)^2}$$

αποκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.14 (i)). ◊◊

Παράδειγμα 3.4.4. Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$ συγκλίνει.

Θεωρώντας ότι ο γενικός όρος της δοθείσης σειράς είναι $a_n=\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}>0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, είναι φανερό ότι πρόκειται για θετική σειρά. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας του Cauchy, (βλέπε, Πρόταση 3.2.19 (i)), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n\cdot n^n}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{n\cdot n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}{\lim\limits_{n\to+\infty}2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}\tag{3.4.4}$$

Για τον υπολογισμό $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$, θεωρούμε την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n=\frac{n^2}{2^n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1,$$

η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε, όριο λόγου D' Alembert, Πρόταση 2.6.2). Επομένως, η ισότητα στην (3.4.4) γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}\right|}=\lim_{n\to+\infty}b_n=0=\lambda<1.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας του Cauchy έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}\right|$ συγκλίνει, από όπου εφαρμόζοντας το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.2.21). ◊◊

Παράδειγμα 3.4.5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\log n}$ συγκλίνει.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{3n^2+2n+1}$ αποκλίνει.

i) Η σειρά είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 2}$ με γενικό όρο $a_n=\frac{1}{n+\log n}$, για κάθε $n=2,3,\ldots$. Προφανώς, η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 2}$ είναι θετικών όρων, (βλέπε, Παράδειγμα 3.4.3 (i)). Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης για την αντίστοιχη ακολουθία με $n\geq 2$, μπορούμε να γράψουμε

$$\log n<\log(n+1)\Rightarrow n+\log n<n+\log(n+1)<n+1+\log(n+1),$$

από όπου προκύπτει

$$a_n=\frac{1}{n+\log n}>\frac{1}{n+1+\log(n+1)}=a_{n+1}.$$

Άρα, $(a_n)_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων.

Επιπλέον, η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 2}$ είναι μηδενική, επειδή ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+\log n}=0.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibniz συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\log n}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2).

ii) Η σειρά είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο

$a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2+2n+1} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επειδή,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

συμπεραίνουμε ότι **δεν** εφαρμόζεται το κριτήριο Leibniz, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2+1}{3n^2+2n+1}$ αποκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2 (ii)). ◊◊

Παράδειγμα 3.4.6. Να δοθεί μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$.

Η δοθείσα σειρά είναι εναλλάσσουσα γεωμετρική, επειδή μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Είναι φανερό ότι έχει λόγο $r = -\dfrac{1}{2}$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.7 (i) η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα ίσο με

$$s = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

Επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + (\frac{1}{256} - \cdots)$$

Συγκλίνει, μπορεί να γίνει εκτίμηση του αθροίσματός της, (βλέπε, Πρόταση 3.3.5). Αν κρατήσουμε τους πρώτους 8 όρους για να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, τότε το σφάλμα είναι μικρότερο από τον ένατο όρο, δηλαδή, μικρότερο από $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^8 = \dfrac{1}{256} \simeq 0.003906$. Υπολογίζοντας το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων έχουμε

$$S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = 0.664062$$

Επομένως, από την (3.3.3) η διαφορά

$$|s - S_8| = \left|\frac{2}{3} - 0.664062\right| = 0.002604$$

είναι θετική και μικρότερη από $\dfrac{1}{256} \simeq 0.003906$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα (άθροισμα γεωμετρικής σειράς και S_8) μπορούμε να τα επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, (βλέπε, Ενότητα 3.5). ◊◊

Εφαρμογή 3.4.7. Να υπολογιστούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2+n)}$$

συγκλίνει. Η σύγκλιση να μελετηθεί και στα άκρα του διαστήματος.

Απόδειξη:

• Θεωρούμε $a_n = \dfrac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2+n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το γενικό όρο της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2+n)}$. Για να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17), πρέπει να υπολογίσουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-2)^n}{3^{n+1}\cdot\left((n+1)^2+n+1\right)}}{\dfrac{(x-2)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+n)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^n\cdot 3^n\cdot(n^2+n)}{(x-2)^{n-1}\cdot 3^{n+1}\cdot(n^2+3n+2)}\right|$$

$$= \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{|x-2|}{3}\cdot 1 = \frac{|x-2|}{3} = \lambda$$

(3.4.5)

Σύμφωνα με το κριτήριο λόγου $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2+n)}$ συγκλίνει, όταν $\lambda < 1$, άρα από την (3.4.5) πρέπει να ισχύει

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5 .$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x \in (-1,5)$.

Επίσης χρειάζεται να εξεταστεί η σύγκλιση στα άκρα του παραπάνω διαστήματος, επειδή το κριτήριο λόγου δεν μπορεί να «αποφανθεί» για τη σύγκλιση/απόκλιση της σειράς, (βλέπε, Πρόταση 3.2.17 (iii)).

• Αντικαθιστώντας $x = -1$, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^n \cdot (n^2+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n(n+1)},$$

η οποία είναι εναλλάσσουσα σειρά. Η σύγκλισή της εξετάζεται ελέγχοντας, αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz, για την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = \dfrac{1}{3n(n+1)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών όρων. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το λόγο

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{3(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{3n(n+1)}}=\frac{n}{n+2}<1,$$

συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.
Τέλος,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n(n+1)}=0\,.$$

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n(n+1)}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2).

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+n)}$ είναι συγκλίνουσα σειρά, για $x=-1$.

- Αντικαθιστώντας $x=5$, η δοθείσα σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα τηλεσκοπική σειρά, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.11 (i)). Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+n)}$ είναι συγκλίνουσα σειρά, για $x=5$.

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+n)}$$

συγκλίνει για κάθε $x\in\left[-1,5\right]$.

Παρατήρηση: Η παραπάνω σειρά ονομάζεται δυναμοσειρά, η μελέτη των οποίων παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 9.1. ◊◊

3.5. Σειρές πραγματικών αριθμών σε προγραμματιστικό περιβάλλον

3.5.1 Σειρές πραγματικών αριθμών με συμβολικές εντολές

Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται, είτε για τον υπολογισμό του αθροίσματος των n_k πεπερασμένων όρων μίας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είτε για το άθροισμα μίας σειράς με γενικό όρο τον a_n. Για το ορθό αποτέλεσμα, χρειάζεται προσοχή στην σύνταξη της εντολής `symsum`, η διαφορά είναι στο πόσοι όροι χρησιμοποιούνται στην κάθε περίπτωση. Αν το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, τότε πρέπει να δίνεται η αρχή και το τέλος στην άθροιση των προσθετέων, ενώ αν το άθροισμα δεν έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, τότε πρόκειται για σειρά, οπότε το ένα ή και τα δύο άκρα είναι «άπειρα». Στις δύο περιπτώσεις ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται `n`, η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Οι εντολές `syms` και `symsum` είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Συγκεκριμένα:

➢ Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μερικού αθροίσματος μίας ακολουθίας με γενικό όρο την ακολουθία a_n και ανεξάρτητη μεταβλητή `n`.

Για τον υπολογισμό του **μερικού αθροίσματος** των **n_k πρώτων όρων** της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ χρησιμοποιείται η εντολή `symsum`, η οποία δέχεται ως εισόδους:

- το γενικό όρο του μερικού αθροίσματος, α_n
- την ανεξάρτητη μεταβλητή, n
- την αρχική τιμή n_0, την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πρώτου όρου του μερικού αθροίσματος (και είναι ο κάτω δείκτης), και
- την τελική τιμή n_k, την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου του μερικού αθροίσματος (είναι ο άνω δείκτης).

Σύνταξη εντολής: `symsum(αn,n,n0, nk)`

Παράδειγμα 3.5.1. Για τον υπολογισμό του μερικού αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών, οι οποίοι δίνονται από το γενικό όρο $a_n = n$, αποτελούν αριθμητική πρόοδο, γράφουμε:

```
syms n
an = n;
S100 = symsum(an,n,1,100);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
S100 = 5050
```

Το παραπάνω μερικό άθροισμα επαληθεύει για $n = 100$ τον τύπο στην (3.1.13) του αθροίσματος της αριθμητικής προόδου (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.2 (i)). ◊◊

- Η εντολή `symsum` χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αθροίσματος μίας σειράς με γενικό όρο την ακολουθία a_n και ανεξάρτητη μεταβλητή `n`, η οποία δηλώνεται με τη συμβολική εντολή `syms`. Εδώ η αρχική ή/και η τελική τιμή για το `n` μπορεί να είναι άπειρο ($\pm$ Inf).

Για τον υπολογισμό του **αθροίσματος της σειράς** με γενικό όρο a_n, χρησιμοποιείται η εντολή `symsum`, η οποία δέχεται ως εισόδους:

- το γενικό όρο της σειράς, α_n
- την ανεξάρτητη μεταβλητή, n
  - την αρχική τιμή n_1, την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πρώτου όρου της σειράς (είναι ο κάτω δείκτης στο άθροισμα). Εδώ μπορεί $n_1 = -$ Inf, και
  - την τελική τιμή n_2, την οποία δέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή n, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου της σειράς (είναι ο άνω δείκτης στο άθροισμα). Εδώ συνήθως n_2 = Inf

Σύνταξη εντολής: `symsum(`α_n`,n,`n_1`,` n_2`)`

Παράδειγμα 3.5.2. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, γράφουμε:

```
syms n
an = 1/(n*(n+1));
S = symsum(an,n,1,Inf);
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
S = 1
```

Το παραπάνω άθροισμα επαληθεύει τα θεωρητικά αποτελέσματα στο Παράδειγμα 3.1.11(i). ◊◊

Παράδειγμα 3.5.3. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ του Παραδείγματος 3.3.6, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms n
an = 1/(2*n+1);
bn = ((-1)^(n+1))*an;
s = symsum(bn,n,1,Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
s = 1- pi/4
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(s)
```

παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

```
S = 
```
$$1-\frac{\pi}{4}\approx 0.214602$$

Επιπλέον, στην ίδια εναλλάσσουσα σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$, αν χρειαζόταν να υπολογίσουμε το μερικό άθροισμα των $n_k=49$ πρώτων όρων της, καθώς και τον a_{50}, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms n
an = 1/(2*n+1);
bn = ((-1)^(n+1))*an;
S49 = symsum(bn,n,1,49)
a50=subs(an,n,50)
pretty(S49)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει το μερικό άθροισμα σε ρητή μορφή και ο όρος a_{50} ως ακολούθως:

```
S49 = 
```
$$\frac{2392294938482058442071223954439671549 93}{108938086296425745569584076461425474307 5}\approx 0.2196013$$

```
a50 = 0.0099009
```

Τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει η προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ για την αντικατάσταση των τιμών στην (3.3.3) του Παραδείγματος 3.3.6. ◊◊

3.5.2 Σειρές πραγματικών αριθμών με εντολές επανάληψης

Στις περιπτώσεις που χρειάζεται να επαναληφθούν κάποιες ενέργειες περισσότερες από μία φορές χρησιμοποιούμε την πιο απλή μορφή επανάληψης που ξεκινά με την εντολή `for` και τελειώνει με την `end`.

Για την εντολή επανάληψης **for** … **end** απαιτούνται :

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή, n
- η αρχική τιμή n_0, από την οποία ξεκινά η επαναληπτική διαδικασία
- η τελική τιμή n_1, στην οποία σταματά η επαναληπτική διαδικασία
- το βήμα k, με το οποίο διαμερίζεται το διάστημα $[n_0 \;\; n_1]$. Αν δεν δηλωθεί το βήμα θεωρείται ότι είναι ίσο με 1.
- εντολές-ενέργειες, που επαναλαμβάνονται

Σύνταξη εντολών: **for** $n = n_0: k: n_1$

εντολές-ενέργειες επανάληψης

end

Παράδειγμα 3.5.4. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία συνάρτηση (function), που υπολογίζει και δίνει στην έξοδο της συνάρτησης το μερικό άθροισμα s των πρώτων όρων της σειράς με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Παρατηρήστε ότι, n_0 και n_1 είναι παράμετροι στην είσοδο της συνάρτησης, που σημαίνει ότι ανάλογα με τις τιμές που εισάγονται υπολογίζονται και τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα, $\sum_{n=n_0}^{n_1} a_n = \sum_{n=n_0}^{n_1} \dfrac{1}{n(n+1)}$, με πρώτον όρο τον a_{n_0}. Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα k, επειδή για τις ακολουθίες θεωρείται $k=1$.

```
function [s]=sumconv(n0,n1)
    s=0;
    for n=n0:n1
        an=1/(n*(n+1));
        s=s+an;
    end
 end
```

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση και με $n_0 = 1$, $n_1 = 100$ βρίσκουμε ότι το άθροισμα είναι :

```
S = 0.990099009900990
```

Εκτελώντας τη συνάρτηση `sumconv(n0,n1)` για $n_0 = 1$, $n_1 = 500$, $n_1 = 1000$, $n_1 = 5000$, $n_1 = 10000$ και $n_1 = 100000$ προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές των αθροισμάτων:

```
n0=1      n1=500             S = 0.998003992015968
n0=1      n1=1000            S = 0.999000999001000
n0=1      n1=5000            S = 0.999800039992002
n0=1      n1=10000           S = 0.999900009999001
n0=1      n1=100000          S = 0.999990000100012
```

Τα παραπάνω μερικά αθροίσματα επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.1.5 (i) , καθώς και το άθροισμα της σειράς που υπολογίστηκε με τις συμβολικές εντολές της Matlab/Octave στο Παράδειγμα 3.5.2, δηλαδή, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ◊◊

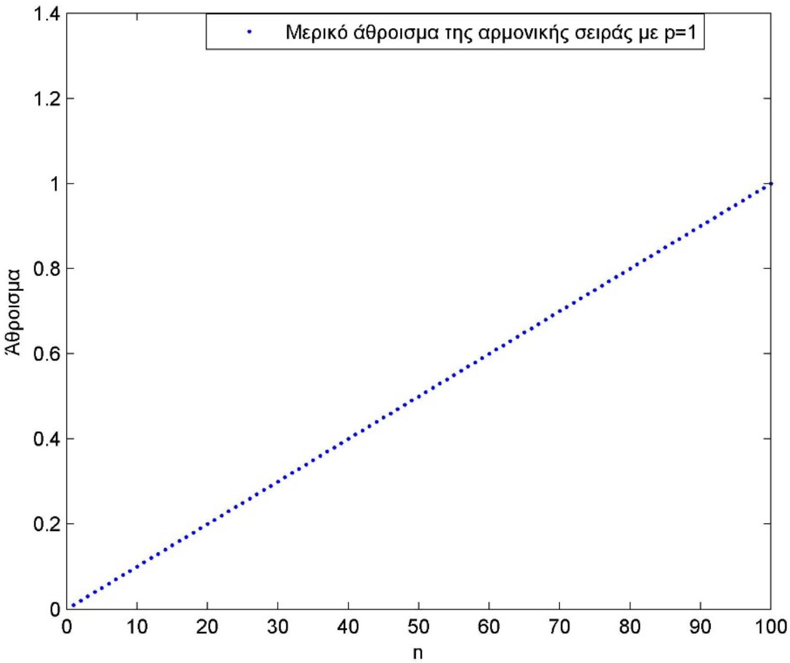
Παράδειγμα 3.5.5. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), `sumdirichlet(p, n1)`, που υπολογίζει το μερικό άθροισμα των `n1` πρώτων όρων μίας αρμονικής σειράς p-τάξης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Παρατηρήστε ότι, `p` και `n1` είναι παράμετροι στην είσοδο της συνάρτησης, που σημαίνει ότι ανάλογα με τις τιμές που εισάγονται υπολογίζονται και τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα. Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα `k`, θεωρείται $\mathtt{k} = 1$. Στην έξοδο της συνάρτησης δίνεται το μερικό άθροισμα, `s`.

```
function [s]= sumdirichlet(p,n1)
    s=0;
    for n=1:n1
        an=1/(n^p);
        s=s+an;
    end
 end
```

Εκτελώντας τη συνάρτηση `sumdirichlet(p,n1)` για $\mathtt{p} = 1$, $n_1 = 100$ και $n_1 = 1000$ προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές των αθροισμάτων:

```
n1=100            S = 1.000000000000001
n1=1000           S = 1.000000000000001
```

Όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα η αρμονική σειρά με $p = 1$ τείνει στο άπειρο πολύ «αργά», (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.2.). Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος των 100 πρώτων όρων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.



Σχήμα 3.1: Η γραφική αναπαράσταση του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$.

◊◊

Παράδειγμα 3.5.6. Η συνάρτηση (function), `dirichletp(p,n1,n2)`, έχει στην είσοδο τις παραμέτρους `p`, `n1` και `n2` για να υπολογίζει το μερικό άθροισμα των `n1` και `n2` πρώτων όρων μίας p-αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ και να σχεδιάζει τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα, χρησιμοποιώντας την εντολή επανάληψης `for`. Στην είσοδο της συνάρτησης παραλείπεται το βήμα `k`, θεωρείται `k=1`. Στην έξοδο της συνάρτησης δίνονται τα αποτελέσματα των αντίστοιχων μερικών αθροισμάτων, `s1,s2`.

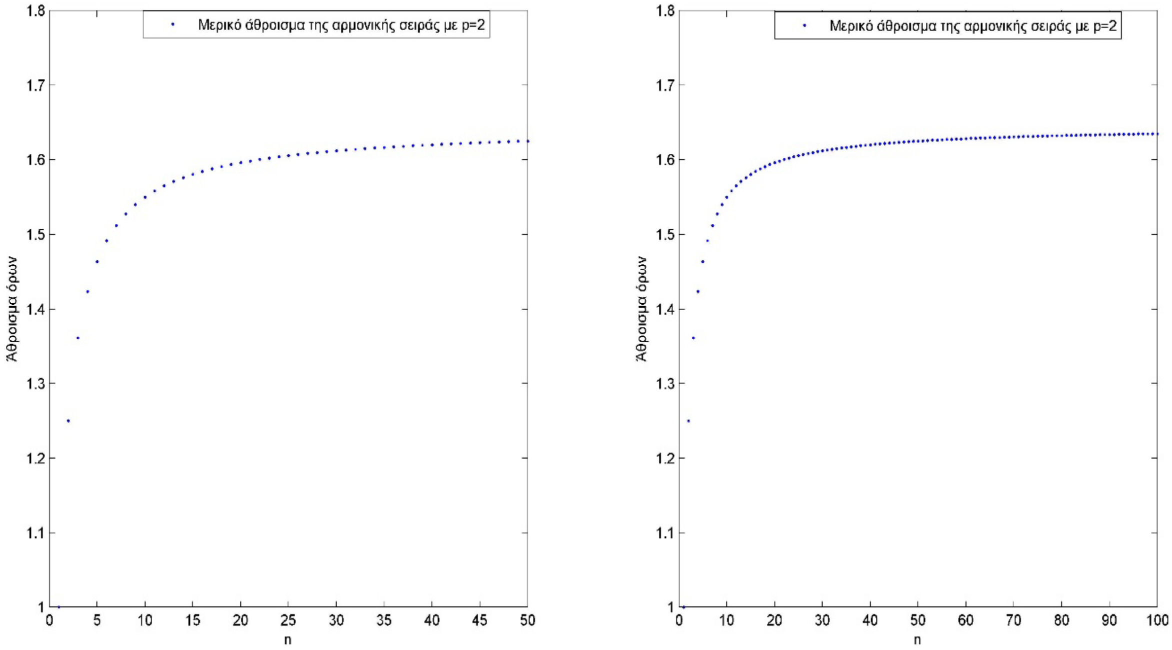
```
function [s1,s2] = dirichletp(p,n1,n2)

               s1=0;
               subplot(1,2,1)
           for n=1:n1
               an=1/(n^p);
               s1=s1+an;
               plot(n,s1,'.')
               hold on
           end
       xlabel('n')
       ylabel('Άθροισμα όρων')
```

```
        legend('Μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς με p=2')
                subplot(1,2,2)
                s2=0;
              for n=1:n2
                 an=1/(n^p);
                 s2=s2+an;
                 plot(n,s2,'.')
                 hold on
             end
        xlabel('n')
        ylabel('Άθροισμα όρων')
        legend('Μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς με p=2')
end
```

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `dirichletp(p,n1,n2)` για $p=2$, $n_1=50$ και $n_2=100$ βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα είναι:

n_1=50	S1 = 1.625132733621529
n_2=100	S2 = 1.634983900184892

Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος των 50 και 100 πρώτων όρων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Η γραφική αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος για $n_1=50$ είναι στην αριστερή εικόνα και για $n_2=100$ στη δεξιά.



Σχήμα 3.2: Η γραφική αναπαράσταση του μερικού αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Εκτελώντας άλλη μία φορά τη συνάρτηση `dirichletp(p,n1,n2)` για $p=2$, $n_1=2000$ και $n_2=5000$ βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα είναι:

```
n1=2000          S2 = 1.644434191827396
n2=5000          S2 = 1.644734086846901
```

Η αρμονική σειρά με $p=2$ συγκλίνει, (βλέπε, Εφαρμογή 3.1.9 και Εφαρμογή 3.2.13 (i)). Από τα παραπάνω μερικά αθροίσματα συμπεραίνουμε ότι με ακρίβεια τριών δεκαδικών ένα άνω φράγμα του αθροίσματος της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ είναι το 1.644.

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave και τη συμβολική εντολή `symsum` βρίσκουμε:[7]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.644934066848226$$

◊◊

[7] Η προσέγγιση αποδείχθηκε από τον Leonhard Euler (1707 - 1783).

3.6. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

3.6.1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης εναλλασσουσών σειρών (Leibniz).
Απάντηση: Συγκλίνει

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5^n \cdot (n+2)!}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert.
Απάντηση: Συγκλίνει

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8n^2+8}{2n^4+10n+12}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο οριακής σύγκλισης.
Απάντηση: Αποκλίνει

iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sin(n\theta)}{2n^2+4n+3}$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απόλυτη σύγκλιση και στη συνέχεια εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.
Απάντηση: Συγκλίνει

v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(3n+2)(3n+5)}$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι η σειρά είναι τηλεσκοπική, συμβουλευτείτε τα Παραδείγματα 3.1.11.
Απάντηση: Συγκλίνει

vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης εναλλασσουσών σειρών (Leibniz).
Απάντηση: Συγκλίνει

vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-6n}{2(n+1)!}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert.
Απάντηση: Συγκλίνει

viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4\cdot 5^n+1}{6^n+16\cdot 4^n}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy και αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{5}{6} < 1$.

Απάντηση: Συγκλίνει

ix) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n)+\sin(3n)}{5^n+7^n}$

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι συγκλίνει απόλυτα, το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης.
Απάντηση : Συγκλίνει

x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+4}\cdot n^2}{(n+3)^2}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy.
Απάντηση: Αποκλίνει

3.6.2. Να υπολογιστούν οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν. Η σύγκλιση να εξετασθεί και στα άκρα των αντίστοιχων διαστημάτων.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{5^n\cdot n^2}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Εξετάστε με αντικατάσταση των τιμών των άκρων του διαστήματος στην αρχική σειρά τη σύγκλιση της αριθμητικής σειράς που προκύπτει. Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 3.4.7.
Απάντηση: $3\le x\le 7$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(x-1)^n}{3n+7}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας του Cauchy, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3n+7}=1$. Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 3.4.7.
Απάντηση: $0\le x<2$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}\cdot n!}{4^{n-1}\cdot(n+2)!}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 3.4.7.
Απάντηση: $-2\le x\le 6$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(x-2)^n}{3n-2}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 3.4.7.
Απάντηση: $1<x<3$

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{2^n\cdot(n+1)^3}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου του D' Alembert ή το κριτήριο ρίζας του Cauchy, ώστε να συγκλίνει η σειρά. Συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 3.4.7.
Απάντηση: $-\frac{5}{2}\le x\le -\frac{1}{2}$

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.

Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ., τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from http://www.gnu.org/software/octave

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

3.1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές και να υπολογισθεί ένα άνω φράγμα για το αντίστοιχο άθροισμα, (όπου αυτό υπάρχει).

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3+8}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-n}{7^n+4n}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{2^n+16}$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+2)e^{n+1}}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-8n+10}{2n^5+4n+2}$ vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+5}{3^n+4}$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n-2}}$ viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

ix) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^2+6n+1}$ x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} n}{n+1}$

xi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{3n^2+2}$ xii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}}{(n+2)^3}$

xiii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$ xiv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+7^n+6\cdot 4^n}$

xv) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ xvi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+8n}{4n^5}$

xvii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$ xviii) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$

xix) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2015}\cdot e^{-n^2}$ xx) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

xxi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n^3}$ xxii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{2^n}+\frac{3n}{(n+1)!}+\frac{2}{\sqrt{n+1}}$

xxiii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ xxiv) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{-n^2}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

3.2. Να εκτιμήσετε την τιμή του σφάλματος, αν χρησιμοποιηθούν οι πέντε πρώτοι όροι για να γίνει προσέγγιση των ακόλουθων σειρών.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$