ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

…Όταν διαδοχικές τιμές που παίρνει μία μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μία συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν λιγότερο από όσο επιθυμεί κανείς, η τελευταία αυτή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)

…Από αμνημόνευτους χρόνους, το άπειρο συγκινούσε τη ψυχή του ανθρώπου περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μία ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Αλλά και καμία άλλη έννοια δεν χρήζει οριστικής διασάφησης περισσότερο από αυτήν…

Über das Unendliche, Mathematische Annalen, 95(1), (1926),161-190

David Hilbert (1862 - 1943)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι έννοιες της ακολουθίας και της υπακολουθίας των πραγματικών αριθμών, ορίζονται οι έννοιες της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας και διατυπώνονται οι ιδιότητες που συνδέουν αυτές τις έννοιες μεταξύ τους. Παρουσιάζονται τα σημαντικότερα κριτήρια και οι προτάσεις μίας συγκλίνουσας ακολουθίας και μελετώνται τα χαρακτηριστικά όρια ακολουθιών.

Προαπαιτούμενη γνώση
Συναρτήσεις

2.1. Η έννοια της ακολουθίας

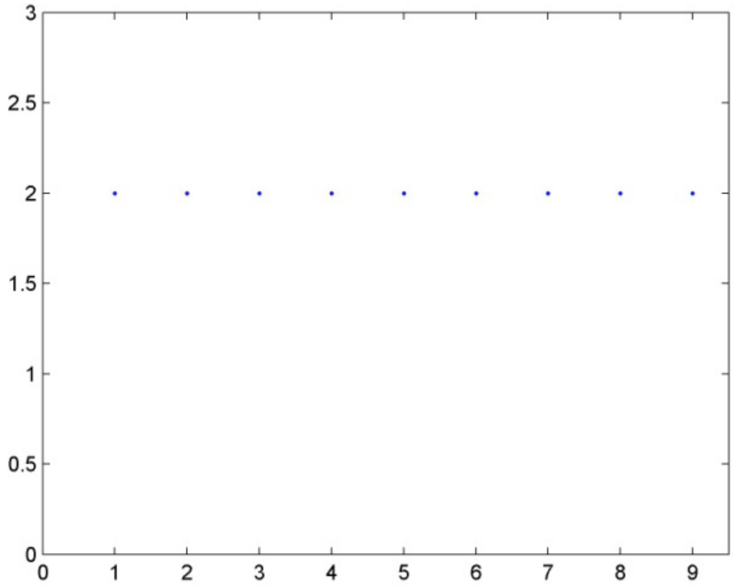
Οι ακολουθίες αποτελούν ειδική περίπτωση συναρτήσεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε προβλήματα διακριτοποίησης, τα οποία βρίσκουν πολλές εφαρμογές στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, στα Σήματα και Συστήματα, στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, στις Τηλεπικοινωνίες, στην Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων, στη Θεωρία Ουρών κ.ά., (βλέπε, Ασημάκης (2008); Ασημάκης & Αδάμ, (2015); Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014), Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012); Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014); Spivak, M. (2010)).

Ορισμός 2.1.1. Ακολουθία (sequence) πραγματικών αριθμών ονομάζεται μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Η ακολουθία ως συνάρτηση σημειώνεται $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, η οποία έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την n, και εξαρτημένη μεταβλητή (εικόνα του στοιχείου $n\in\mathbb{N}$) την $a(n)$, που στη συνέχεια σημειώνεται a_n, δηλαδή, θέτουμε $a(n)=a_n$.
Ο πραγματικός αριθμός a_n, που είναι η εικόνα του στοιχείου $n\in\mathbb{N}$ της συνάρτησης $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, ονομάζεται ***n*-οστός όρος** της ακολουθίας, ενώ όταν αναφέρεται στον τύπο της ακολουθίας a_n αυτός ονομάζεται **γενικός όρος** της.

Σε μερικές περιπτώσεις η ακολουθία μπορεί να έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$, οπότε ορίζεται και ο μηδενικός όρος της ακολουθίας ως a_0.

Στη συνέχεια, η ακολουθία συμβολίζεται με την αναγραφή ορισμένων πρώτων όρων και του γενικού όρου της ως συνάρτηση του n, δηλαδή $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$, $n\in\mathbb{N}$, ή σύντομα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ή απλούστερα (a_n).
Επίσης, μπορεί να ορίζονται k το πλήθος πρώτοι (αρχικοί) όροι της ακολουθίας $a_1,a_2,\ldots,a_k$ και για κάθε $n\geq k+1$, ο όρος a_n να ορίζεται ως συνάρτηση των αρχικών όρων $a_1,a_2,\ldots,a_k$, κάθε όρος της ακολουθίας με $n\geq k+1$ υπολογίζεται από έναν τύπο, που ονομάζεται **αναδρομικός**.
Από τον Ορισμό 2.1.1 και τον παραπάνω συμβολισμό είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο, που έχει στοιχεία τους όρους της ακολουθίας, δηλαδή, $\{a_1,a_2,\ldots,a_n, n\in\mathbb{N}\}$, το οποίο είναι πεπερασμένο ή μη πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της ακολουθίας είναι διακριτά σημεία στο δεξιό ημιεπίπεδο, δείτε στα Σχήμα 2.1 και Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.1: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα 2.1.2.

i) Η ακολουθία των φυσικών αριθμών έχει γενικό όρο $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί αριθμητική πρόοδο[1] με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$.

ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όρους $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots$ συνεπώς, το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, έχει μόνο δύο στοιχεία, $-1, 1$.

iii) Για κάθε αριθμό $c \in \mathbb{R}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όλους τους όρους της ίσους με το σταθερό αριθμό c και ονομάζεται **σταθερή** ακολουθία. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{c\}$.

Στο Σχήμα 2.1 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

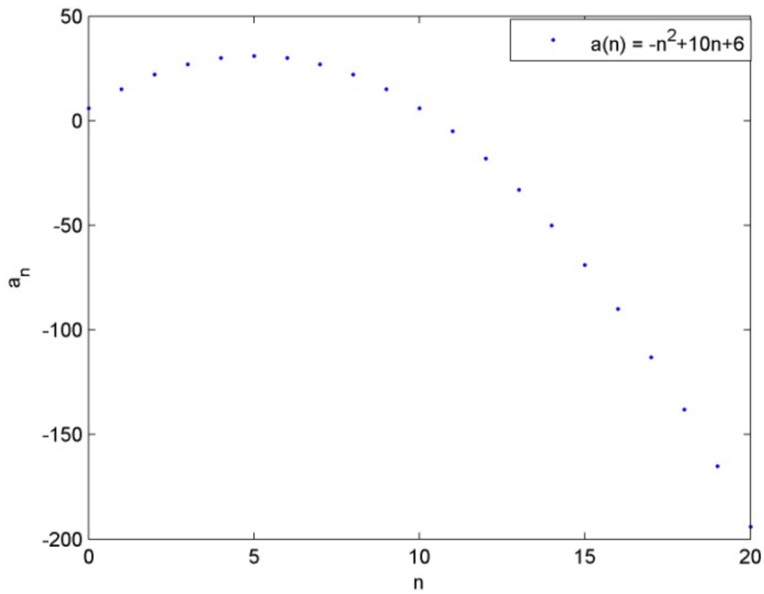
iv) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι οι άρτιοι αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.

v) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι οι περιττοί αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.

vi) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{4}n^2$, $n \in \mathbb{N}$ έχει ως πρώτους όρους $\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{1}{4}n^2, \ldots$. Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι θετικοί ρητοί αριθμοί, που είναι μη πεπερασμένο σύνολο.

vii) Οι δύο πρώτοι όροι μίας ακολουθίας είναι $a_1 = a_2 = 1$ και κάθε άλλος όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$, η ακολουθία είναι γνωστή και ως ακολουθία Fibonacci. ◊◊

[1] Αριθμητική πρόοδος είναι μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + \omega$, για κάποιον σταθερό πραγματικό αριθμό ω, που ονομάζεται διαφορά της ακολουθίας, επειδή από τον αναδρομικό τύπο ισούται με τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της. Αποδεικνύεται ότι , ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = a_1 + (n-1)\omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.



Σχήμα 2.2: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = -n^2 + 10n + 6$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.1.3. Δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζονται **ίσες** αν ισχύει $a_n = b_n$, για κάθε φυσικό αριθμό n.

Οι πράξεις *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο*, *γινόμενο επί αριθμό* και *πηλίκο* μεταξύ ακολουθιών, ορίζονται όπως ορίστηκαν και οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ δύο συναρτήσεων, βλέπε Ορισμό 1.2.3.

2.2. Φραγμένες ακολουθίες

Η έννοια της φραγμένης ή μη φραγμένης συνάρτησης, που διατυπώθηκε στον Ορισμό 1.2.12, μπορεί να επεκταθεί και να διατυπωθεί με ανάλογο τρόπο και για την ακολουθία, όπως στη συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται

i) **άνω φραγμένη** (upper bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός M, τέτοιος ώστε $a_n \le M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** (upper bound) της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα της ακολουθίας ονομάζεται **άνω πέρας** (supremum) και συμβολίζεται $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

ii) **κάτω φραγμένη** (lower bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός m, τέτοιος ώστε $a_n \ge m$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Το μέγιστο από τα κάτω φράγματα της ακολουθίας ονομάζεται **κάτω πέρας** (infimum) και συμβολίζεται $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

iii) **φραγμένη** (bounded), όταν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη.

iv) **απόλυτα φραγμένη** (absolutely bounded), όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός a, τέτοιος ώστε να ισχύει $|a_n| \le a$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Ο αριθμός a ονομάζεται **απόλυτο φράγμα** της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Από τον Ορισμό 2.2.1(i) είναι φανερό ότι αν ο M είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και οποιοσδήποτε άλλος αριθμός μεγαλύτερος του M είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Συνεπώς, το άνω φράγμα μίας άνω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικό. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη το άνω πέρας υπάρχει και είναι μοναδικό, (βλέπε, Ενότητα 3.8, (Ρασσιάς, 2014)). Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε γράφουμε $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$.

Αντίστοιχα, από τον Ορισμό 2.2.1(ii) είναι φανερό ότι αν ο m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και οποιοσδήποτε άλλος αριθμός μικρότερος του m είναι κάτω φράγμα της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα, το κάτω φράγμα μίας κάτω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικό. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη το κάτω πέρας υπάρχει και είναι μοναδικό. Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε γράφουμε $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty$.

Παρόλο που τα φράγματα (άνω ή κάτω) μίας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδικά, όταν χρειάζεται να «εντοπίσουμε» κάποιο φράγμα (άνω ή κάτω) της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αρχικά αναζητούμε την ύπαρξη ενός απόλυτου φράγματος της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, επειδή οι έννοιες απόλυτα φραγμένη και φραγμένη ακολουθία είναι ισοδύναμες, όπως διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (iii) είναι άνω και κάτω φραγμένη, συνεπώς υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί m, M τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$m \le a_n \le M, \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Θεωρούμε $\mu = \max\{|m|, |M|\}$, οπότε η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφεί

$$-\mu \le -|m| \le m \le a_n \le M \le |M| \le \mu \text{, για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.1}$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$-\mu \le a_n \le \mu \Leftrightarrow |a_n| \le \mu, \tag{2.2.2}$$

επομένως η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη, (βλέπε, Ορισμό 2.2.1(iv)).

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη από ένα θετικό πραγματικό αριθμό a, συνδυάζοντας τον Ορισμό 2.2.1(iv) με την ιδιότητα της απόλυτης τιμής στην (2.2.2), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| \le a \Leftrightarrow -a \le a_n \le a$, το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό a και κάτω φραγμένη από τον αριθμό $-a$, συνεπώς η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, Ορισμό 2.2.1 (iii)). ◊◊

Η ισοδυναμία που παρουσιάζεται στην Πρόταση 2.2.2 εξασφαλίζει άνω και κάτω φράγμα για την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από τον ίδιο αριθμό κατά απόλυτη τιμή. Αν δεν υπάρχει απόλυτο φράγμα, αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία δεν είναι άνω και κάτω φραγμένη από τον ίδιο (κατά απόλυτη τιμή) πραγματικό αριθμό, (βλέπε, στη σχέση (2.2.1)), το οποίο δεν είναι ισοδύναμο με το ότι η ακολουθία δεν είναι φραγμένη. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ή να μην είναι φραγμένη.

Παραδείγματα 2.2.3.

i) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί και επειδή οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, προφανώς, μπορούμε να γράψουμε

$$0 < a_n \le 1 \text{, για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (i) και (ii) ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία είναι ο αριθμός 0 και ένα άνω φράγμα είναι ο αριθμός 1.

Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το άνω φράγμα αποτελεί επίσης άνω φράγμα για την ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι το άνω πέρας της ακολουθίας είναι $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, (βλέπε, Ορισμός 2.2.1 (i)).

Επιπλέον, οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος από το κάτω φράγμα αποτελεί επίσης ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι το κάτω πέρας της ακολουθίας είναι $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$, (βλέπε, Ορισμός 2.2.1 (ii)).

Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι, ένα κριτήριο για τον εντοπισμό των περάτων (άνω ή κάτω), αν αυτά δεν είναι όροι της ακολουθίας, αποτελεί η Πρόταση 2.5.13, (βλέπε, Παρατήρηση 2.5.14).

Επειδή, η ακολουθία είναι άνω και κάτω φραγμένη χαρακτηρίζεται φραγμένη (βλέπε, Ορισμός 2.2.1 (iii)), και από την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη.

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < 1$, άρα ένα απόλυτο φράγμα της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ο αριθμός 1, δηλαδή, το απόλυτο φράγμα ταυτίζεται με το άνω πέρας της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = |-1|^n \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < 1$. Άρα ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ο αριθμός 1, και από την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Άλλωστε από $|a_n| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n < 1$ προκύπτουν δύο φράγματα (κάτω και άνω) για την ακολουθία, ένα κάτω φράγμα είναι $m = -1$, και ένα άνω φράγμα είναι $M = 1$.

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι όροι της ακολουθίας είναι $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, -\frac{1}{2k_1 - 1}, \frac{1}{2k_1}, \ldots,$ τους οποίους μπορούμε να αναδιατάξουμε και να τους γράψουμε σε ένα σύνολο ως ακολούθως

$$\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots, -\frac{1}{2k_1 - 1}, \frac{1}{2k_1}, \ldots, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}.$$

Παρατηρήστε ότι, το παραπάνω σύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο το $m = -1$, και μέγιστο στοιχείο το $\frac{1}{2}$, που είναι μικρότερο από το άνω φράγμα που υποθέσαμε. Επειδή, ο μικρότερος όρος της ακολουθίας ταυτίζεται με το κάτω φράγμα, m, το ελάχιστο του παραπάνω συνόλου, και οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (ii) το κάτω πέρας της ακολουθίας είναι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -1$.

Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το μέγιστο του παραπάνω συνόλου αποτελεί ένα άνω φράγμα για την ακολουθία, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 (ii) το άνω πέρας της ακολουθίας είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \frac{1}{2}$.

iii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρχικά να θυμίσουμε τον ορισμό του παραγοντικού, ο οποίος είναι : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, για κάθε $n \geq 1$, και $0! = 1$.

Παρατηρήστε ότι οι πρώτοι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $1, \frac{1}{2^2}, \frac{2!}{3^3}, \frac{3!}{4^4}, \ldots,$ από όπου είναι φανερό ότι όλοι οι όροι είναι θετικοί αριθμοί. Επομένως, ένα κάτω φράγμα της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $m = 0$. Επειδή οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του m είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας και όλοι οι όροι της ακολουθίας συνεχώς «πλησιάζουν» τον m, συμπεραίνουμε ότι το κάτω πέρας της ακολουθίας είναι $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$, (βλέπε, Παρατήρηση 2.5.14, Παραδείγματα 2.5.15 (ii)).

Επιπλέον χρησιμοποιώντας τον ορισμό του παραγοντικού μπορούμε να γράψουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} < \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \leq 1$$

Επομένως, ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $M = 1$. Άρα, η ακολουθία είναι φραγμένη και σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.2 είναι και απόλυτα φραγμένη, αρκεί να θεωρήσουμε ως απόλυτο φράγμα τον αριθμό 1 ή οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερο από αυτόν.

Επιπλέον παρατηρήστε ότι, οι όροι της ακολουθίας $1, \frac{1}{2^2}, \frac{2!}{3^3}, \ldots$ συνεχώς «φθίνουν» , (βλέπε, Παράδειγμα 2.3.3 (ii)) και ότι όλοι οι όροι είναι μικρότεροι του απολύτου φράγματος 1, εκτός από τον πρώτο όρος της. Σύμφωνα με τον Ορισμός 2.2.1 (i) το άνω πέρας της ακολουθίας είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$.

iv) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ είναι φραγμένη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, από τη γνωστή αλγεβρική ταυτότητα γνωρίζουμε ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα και τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής, έχουμε:

$$|a_n| = \left|\frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right| = \frac{2}{3}\left|1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq \frac{2}{3}\left(1 + \left|-\frac{1}{2}\right|^n\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{4}{3}$$

Επομένως, ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός $4/3$, και από την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και από τη (2.2.2) προκύπτει ότι ένα άνω φράγμα είναι $M = 4/3$ και ένα κάτω φράγμα είναι $m = -4/3$.

v) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n+5$ είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $m = 7$, επειδή, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει $7 \le 2n+5$. Προφανώς η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να είναι απόλυτα φραγμένη.

vi) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = -3n-1$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $M = -4$, επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $-3n-1 \le -4$, και προφανώς η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, συνεπώς, για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός a για τον οποίο να ισχύει $|a_n| \le a$. Άρα, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι απόλυτα φραγμένη.

vii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{n^3-1}{n}$ δεν είναι φραγμένη.

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.2 είναι και απόλυτα φραγμένη από ένα θετικό αριθμό a, δηλαδή, ισχύει:

$$|a_n| < a \Rightarrow \left|\frac{n^3-1}{n}\right| < a \Rightarrow \frac{|n^3-1|}{n} < a \Rightarrow |n^3-1| < an \tag{2.2.3}$$

Επειδή για κάθε $n \ge 2$ ισχύουν: $n^2-1 = |n^2-1|$ και $n^3-1 = |n^3-1|$ και $n^2-1 < n^3-1$, συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με τη (2.2.3) έχουμε:

$$n^2-1 < n^3-1 < an \Rightarrow n^2 - an - 1 < 0$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει όταν $n\in[n_1, n_2]$, όπου $n_1 = \dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$, $n_2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ είναι οι δύο διαφορετικές ρίζες του τριωνύμου $n^2 - an - 1$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.

viii) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με $a_1 = 2$, είναι φραγμένη.

Θα αποδείξουμε, με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $m = 1$, δηλαδή, ότι ισχύει $a_n > 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αρχικά έχουμε $a_1 = 2 > 1$, $a_2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} > 1$, άρα ο ισχυρισμός $a_n > 1$ επαληθεύεται για $n = 1,2$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n = k$ ισχύει $a_k > 1$ (υπόθεση επαγωγής). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k+1$.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής και τον αναδρομικό τύπο μπορούμε να γράψουμε:

$$a_k > 1 \Rightarrow \frac{1}{a_k} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{a_k} > -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{a_k} > 2 - 1 \Rightarrow a_{k+1} > 1$$

Συνεπώς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει $a_n > 1$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ από $a_n > 1 > 0$ μπορούμε να γράψουμε $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n} < 2$, δηλαδή, η ακολουθία είναι άνω φραγμένη, με ένα άνω φράγμα τον αριθμό $M = 2$.

Άρα, αποδείξαμε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει

$$1 < a_n < 2, \tag{2.2.4}$$

το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 2.2.1 (iii). Επομένως, η ακολουθία είναι φραγμένη. ◊◊

2.3. Μονοτονία ακολουθίας

Η έννοια της μονοτονίας μίας συνάρτησης, που διατυπώθηκε στον Ορισμό 1.3.1, μπορεί να επεκταθεί και να διατυπωθεί με ανάλογο τρόπο και για την ακολουθία, όπως στη συνέχεια.

Ορισμός 2.3.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται

i) **αύξουσα** (increasing), όταν ισχύει $a_n \le a_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συμβολικά : $(a_n)\uparrow$

ii) **γνήσια αύξουσα** (strictly increasing), όταν ισχύει $a_n < a_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

iii) **φθίνουσα** (decreasing), όταν ισχύει $a_n \ge a_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συμβολικά : $(a_n)\downarrow$

iv) **γνήσια φθίνουσα** (strictly decreasing), όταν ισχύει $a_n > a_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

v) **(γνήσια) μονότονη ακολουθία** (strictly monotonic sequence), όταν η ακολουθία είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

vi) **σταθερή** ακολουθία (constant sequence), όταν είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα. Συμβολικά : $a_n = c$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις 2.3.2.

i) Μία γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα) ακολουθία είναι αύξουσα (φθίνουσα), ενώ μία αύξουσα (φθίνουσα) δεν είναι πάντα γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα).

ii) Μία φθίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της, ενώ μία αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της.

iii) Πολλές φορές, προκειμένου να προσδιοριστεί το είδος της μονοτονίας μίας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που διατηρεί πρόσημο (οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί ή αρνητικοί για κάθε φυσικό αριθμό), συγκρίνεται το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας με τη μονάδα, ως εξής:

- όταν ισχύει $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **γνήσια αύξουσα**,
- όταν ισχύει $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **γνήσια φθίνουσα**.

Στην περίπτωση που οι παραπάνω ανισότητες γίνονται ισότητες για ένα τουλάχιστον n, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα), αντίστοιχα.

Προφανώς, οι παραπάνω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες διατυπώσεις του Ορισμού 2.3.1 (γιατί;).

iv) Για να εξετάσουμε τη μονοτονία μίας δοσμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, εργαζόμαστε με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

•*πρώτος τρόπος*: Σχηματίζουμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$. Αν $a_{n+1} - a_n > 0$ (<0), για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα), (βλέπε, Ορισμός 2.3.1 (ii) και (iv), αντίστοιχα).

Αν για ένα τουλάχιστον n στις παραπάνω ανισότητες έχουμε ισότητα, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα), αντίστοιχα.

• *δεύτερος τρόπος*: Αν οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διατηρούν πρόσημο, τότε συγκρίνοντας το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας με τη μονάδα βγάζουμε τα συμπεράσματα για τη μονοτονία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπως αυτά διατυπώθηκαν στο (iii).

• *τρίτος τρόπος*: Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δίνεται με μη-αναδρομικό τύπο και έχει σύνθετο τύπο, μετατρέπουμε την ακολουθία στην αντίστοιχη συνάρτηση και μελετούμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Η μονοτονία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αυτή της συνάρτησης.

• *τέταρτος τρόπος*: Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δίνεται με αναδρομικό τύπο, συνήθως η απόδειξη της μονοτονίας της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στηρίζεται στην επαγωγική μέθοδο.

• *πέμπτος τρόπος*: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας, τότε ξεκινάμε με την ανισότητα του Ορισμού 2.3.1 ή της (iii) που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο είδος μονοτονίας και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε μία αλγεβρική σχέση εξαρτώμενη από το n που ισχύει.

Παραδείγματα 2.3.3.

i) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2n-1$ είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας τον πρώτο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$a_{n+1} - a_n = \big(2(n+1)-1\big) - (2n-1) = 2 > 0$$

Επομένως, $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1 (ii)).

ii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{(n-1)!}{n^n}$ είναι γνήσια φθίνουσα για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Όπως αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 2.2.3 (iii), όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1-1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n-1)!}{n^n}} = \frac{n^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}\cdot (n-1)!} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1$$

Επομένως, συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την τελευταία ανίσωση προκύπτει $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1 (iv)).

iii) Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{4^n}{n^2}$ είναι αύξουσα για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{4^n}{n^2}} = \frac{4^{n+1}\cdot n^2}{4^n\cdot (n+1)^2} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} \geq 1 \tag{2.3.1}$$

Συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την τελευταία ανίσωση μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{4n^2}{(n+1)^2} \geq 1 \Rightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Επειδή η ανίσωση $3n^2 - 2n - 1 \geq 0$ αληθεύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2.3.1), από την οποία προκύπτει $a_{n+1} \geq a_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1 (i)).

Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι γνήσια αύξουσα, επειδή για τους δύο πρώτους όρους ισχύει $a_2 = a_1 = 4$.

iv) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με $a_1 = 2$, είναι γνήσια φθίνουσα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τέταρτο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Αρχικά έχουμε $a_1 = 2$, $a_2 = 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<a_1$, άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.1 (iv) ο ισχυρισμός επαληθεύεται για $n=1$. Η υπόθεση της επαγωγής είναι ότι για κάποιο $n=k$ ισχύει :

$$a_{k+1} < a_k \tag{2.3.2}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k+1$. Χρησιμοποιώντας τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας και τον αναδρομικό τύπο, μπορούμε να γράψουμε:

$$a_{k+1}-a_k = 2-\frac{1}{a_k}-a_k = \frac{2a_k-1-a_k^2}{a_k} = -\frac{a_k^2-2a_k+1}{a_k} = -\frac{(a_k-1)^2}{a_k} \tag{2.3.3}$$

Στο Παράδειγμα 2.2.3. (vii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και συγκεκριμένα από τη (2.2.4) έχουμε ότι $1<a_k<2$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$(a_k-1)^2 > 0 \tag{2.3.4}$$

και επιπλέον ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας μπορεί να είναι το μηδέν, άρα ισχύει:

$$a_k > 0 \tag{2.3.5}$$

Από (2.3.4) και (2.3.5) συμπεραίνουμε ότι η (2.3.3) γράφεται

$$a_{k+1}-a_k<0 \Rightarrow a_{k+1}<a_k,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει και για τον επόμενο όρο της ακολουθίας, τον $k+1$. Επομένως, η ανισότητα στη (2.3.2) ισχύει για κάθε $k\in\mathbb{N}$, το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 2.3.1 (iv), άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα. ◊◊

2.4. Η έννοια της υπακολουθίας

Ορισμός 2.4.1. Υπακολουθία (subsequence) της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται κάθε ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{k_n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, όπου $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.
Στη συνέχεια, μία υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζεται με $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, για την αντίστοιχη $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παραδείγματα 2.4.2.
i) Αν από μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επιλέξουμε τους όρους που έχουν περιττούς δείκτες $1,3,\ldots,2n-1,\ldots$, δηλαδή τους όρους $a_1,a_3,\ldots,a_{2n-1},\ldots$, δημιουργείται η υπακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2n-1}$, (βλέπε, Ορισμός 2.4.1). Η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, επειδή $b_n = a_{2n-1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και η $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $k_n = 2n-1$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία, (βλέπε, Παράδειγμα 2.3.3. (i)).
Ανάλογα, θεωρώντας $k_n = 2n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας που έχουν άρτιους δείκτες, δηλαδή την υπακολουθία $a_2,a_4,\ldots,a_{2n},\ldots$
Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δημιουργείται αν χρησιμοποιηθούν οι όροι των δύο υπακολουθιών $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***διαμερίζεται*** στις υπακολουθίες $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Θεωρώντας τη γνήσια αύξουσα ακολουθία με γενικό όρο $k_n = 3n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, (βλέπε, πρώτο τρόπο, Παρατήρηση 2.3.2 (iv)) μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{3n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που έχουν δείκτες $3,6,9,\ldots,3n,\ldots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_3,a_6,a_9,\ldots,a_{3n},\ldots$
Ανάλογα, θεωρώντας $k_n = 3n-1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία με γενικό όρο $b_n = a_{3n-1}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας με δείκτες $2,5,8,\ldots,3n-1,\ldots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_2,a_5,a_8,\ldots,a_{3n-1},\ldots$
Επίσης, θεωρώντας $k_n = 3n-2$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία με γενικό όρο $b_n = a_{3n-2}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας με δείκτες $1,4,7,\ldots,3n-2,\ldots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_1,a_4,a_7,\ldots,a_{3n-2},\ldots$
Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***διαμερίζεται*** στις τρεις υπακολουθίες $(a_{3n-2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{3n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, επειδή οι όροι όλων των υπακολουθιών σχηματίζουν όλους τους όρους της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
iii) Θεωρώντας τη γνήσια αύξουσα ακολουθία με γενικό όρο $k_n = 2^n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, (βλέπε, δεύτερο τρόπο, Παρατήρηση 2.3.2 (iv)) μπορούμε να δημιουργήσουμε την υπακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = a_{2^n}$, αρκεί να επιλέξουμε τους όρους της αρχικής ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που έχουν δείκτες $2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$, δηλαδή την υπακολουθία $a_2,a_4,a_8,\ldots,a_{2^n},\ldots$ ◊◊

Στην πρόταση που ακολουθεί, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.1), διατυπώνονται οι σχέσεις που συνδέουν την ακολουθία με κάποια υπακολουθία αυτής ως προς τα είδη της μονοτονίας και των φραγμάτων.

Πρόταση 2.4.3.

i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

ii) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη.

iii) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.

iv) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη.

v) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα), τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα).

2.5. Σύγκλιση ακολουθίας στον $\mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης έννοια στη Μαθηματική Ανάλυση. Το όριο της ακολουθίας πραγματικών αριθμών είναι ειδική περίπτωση της οριακής τιμής μίας πραγματικής συνάρτησης, ωστόσο η μελέτη του ορίου της ακολουθίας παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα, επειδή η διατύπωση της έννοιας του ορίου της είναι απλούστερη, η κατανόηση των ιδιοτήτων σύγκλισης είναι ευκολότερη και επιπλέον τα συμπεράσματα που θα προκύψουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των οριακών τιμών της συνάρτησης, (βλέπε, Κεφάλαιο 4).

2.5.1. Η έννοια της περιοχής

Περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0 ονομάζεται κάθε ανοικτό διάστημα (a,b) στο οποίο περιέχεται το x_0, δηλαδή $x_0 \in (a,b)$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν περιοχές του πραγματικού αριθμού x της μορφής $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, όπου ε είναι θετικός πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **ακτίνα** της περιοχής $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ και x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **κέντρο** της περιοχής.
Αν $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, τότε από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής στη (2.2.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0| < \varepsilon$$

Παρατήρηση 2.5.1. Αρκετές φορές στη συνέχεια της ενότητας, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση «*τελικά* όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του x_0» και θα εννοούμε ότι «όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του x_0 εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της».
Συνεπώς, αν *τελικά* όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στην περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιος δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ θα ισχύει:

$$x_0-\varepsilon < a_n < x_0+\varepsilon$$

2.5.2. Μηδενική ακολουθία

Ορισμός 2.5.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **μηδενική** (null sequence), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $|a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$.
Η μηδενική ακολουθία συμβολίζεται $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ή $a_n \to 0$ καθώς $n \to +\infty$.
Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n| < \varepsilon \qquad (2.5.1)$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας με την Παρατήρηση 2.5.1 μία άλλη διατύπωση του Ορισμού 2.5.2 είναι η ακόλουθη:
Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **μηδενική**, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ *τελικά* όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή του μηδενός $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Εφαρμογή 2.5.3. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.
Δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}<1$$

Επομένως, συνδυάζοντας τη θετικότητα των όρων της ακολουθίας με την παραπάνω ανίσωση προκύπτει $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\Rightarrow a_{n+1}<a_n$. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1 (iv)).

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται ορισμένοι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων. Παρατηρήστε ότι, οι πρώτοι τριάντα όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πλησιάζουν όλο και περισσότερο στον αριθμό μηδέν, οπότε υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.5.2 και την (2.5.1), για τυχαίο $\varepsilon>0$ αναζητούμε $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|a_n|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$, για κάθε $n\geq n_0(\varepsilon)$. Θεωρούμε $n_0\equiv n_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, όπου $[a]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού a, δηλαδή, ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος του a. Είναι φανερό ότι, για κάθε $n\geq n_0(\varepsilon)\Rightarrow\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0(\varepsilon)}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\varepsilon$, συνεπώς ισχύει $|a_n|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, το οποίο σημαίνει ότι επαληθεύεται η (2.5.1), άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Πίνακας 2.1: Όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n=\frac{1}{n}$

$a_1=1$		$a_{11}=0.090909$		$a_{21}=0.047619$	$\cdots$	$a_{50}=0.02$
$a_2=0.5$		$a_{12}=0.083333$		$a_{22}=0.045454$		$\vdots$
$a_3=0.333333$		$a_{13}=0.076923$		$a_{23}=0.043478$		$a_{100}=0.01$
$a_4=0.25$		$a_{14}=0.071428$		$a_{24}=0.041666$		$\vdots$
$a_5=0.2$		$a_{15}=0.066666$		$a_{25}=0.04$		$a_{500}=0.002$
$a_6=0.166666$		$a_{16}=0.0625$		$a_{26}=0.038461$		$\vdots$
$a_7=0.142857$		$a_{17}=0.058823$		$a_{27}=0.037037$		$a_{1000}=0.001$
$a_8=0.125$		$a_{18}=0.055555$		$a_{28}=0.035714$		$\vdots$
$a_9=0.111111$		$a_{19}=0.052631$		$a_{29}=0.034482$		$a_{2000}=0.0005$
$a_{10}=0.1$		$a_{20}=0.05$		$a_{30}=0.033333$		$\vdots$

. ◊◊

2.5.3. Σύγκλιση ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό

Ορισμός 2.5.4. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στον **πραγματικό αριθμό** a (είναι **συγκλίνουσα** στον $a\in\mathbb{R}$ ή **τείνει** στον $a\in\mathbb{R}$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0\equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $|a_n-a|<\varepsilon$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0(\varepsilon)$.

Ο αριθμός $a\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **όριο** (limit) της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή **οριακή τιμή** της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

και συμβολίζεται $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ ή $a_n \to a$ καθώς $n \to +\infty$.

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\text{, τέτοιος ώστε για κάθε } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon \qquad (2.5.2)$$

Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι **αποκλίνει** ή ότι είναι **αποκλίνουσα**, όταν **δεν** συγκλίνει, δηλαδή, όταν δεν ισχύει ο Ορισμός 2.5.4., το οποίο μπορεί να σημαίνει ότι:
(α) δεν υπάρχει το όριο, και τότε λέμε ότι η ακολουθία ταλαντεύεται, ή
(β) η ακολουθία απειρίζεται θετικά ή αρνητικά, (βλέπε, Ενότητα 2.7).

Παρατηρήσεις 2.5.5. i) Συνδυάζοντας τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας με την Παρατήρηση 2.5.1 μία άλλη διατύπωση του Ορισμού 2.5.4 είναι η ακόλουθη:
Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι **συγκλίνει** στον $a \in \mathbb{R}$ ή ότι είναι **συγκλίνουσα** στον $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ *τελικά* όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
ii) Συνδυάζοντας (2.5.2) με τη (2.5.1) είναι φανερό ότι

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (a_n - a) = 0. \qquad (2.5.3)$$

Επομένως, όταν χρειάζεται να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται ισοδύναμα η (2.5.3), δηλαδή, ότι η ακολουθία $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική.
iii) Η σταθερή ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = a$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι συγκλίνουσα στον $a \in \mathbb{R}$, επειδή επαληθεύεται η ισοδυναμία στη (2.5.3).

Παραδείγματα 2.5.6.
Να αποδειχθεί ότι:

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-3n+4}{n^2+1}=4$ iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}=1$

i) Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = 2+\dfrac{1}{n}$. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό 2, επειδή η ακολουθία $(a_n - 2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική.
Πράγματι, εφαρμόζοντας τη (2.5.3) στην Παρατήρηση 2.5.5(ii) και την Εφαρμογή 2.5.3 έχουμε :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}-2\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

ii) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-3n+4}{n^2+1}=4$.

Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \dfrac{4n^2-3n+4}{n^2+1}$. Επειδή

$$\left|\frac{4n^2-3n+4}{n^2+1}-4\right|=\left|\frac{4n^2-3n+4-4n^2-4}{n^2+1}\right|=\left|\frac{-3n}{n^2+1}\right|=\frac{3n}{n^2+1}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}<\varepsilon,$$

αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]+1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει

$$|a_n - 4| = \left|\frac{4n^2-3n+4}{n^2+1}-4\right| < \frac{3}{n} < \frac{3\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Επομένως, επαληθεύεται ο Ορισμός 2.5.4 και από την ισοδυναμία στην (2.5.2) έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-3n+4}{n^2+1}=4$.

iii) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}$. Επειδή

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}-1\right| = \left|\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+4}}\right| = \left|\frac{\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)}{\sqrt{n^2+4}\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)}\right| = \left|\frac{n^2-(n^2+4)}{\sqrt{n^2+4}\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)}\right|,$$

$$= \left|\frac{-4}{n\sqrt{n^2+4}+n^2+4}\right| = \frac{4}{n\sqrt{n^2+4}+n^2+4} < \frac{4}{n^2} < \varepsilon$$

αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - 1| = \left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}-1\right| < \dfrac{4}{n^2} < \dfrac{4\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Επομένως, επαληθεύεται ο Ορισμός 2.5.4 και από την ισοδυναμία στην (2.5.2) έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}} = 1$. ◊◊

2.5.4. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Η απόδειξη του ορίου μίας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.5.2 ή τον Ορισμό 2.5.4 ή την ισοδυναμία στις (2.5.1) ή (2.5.2) απαιτεί τη γνώση της οριακής τιμής και τον υπολογισμό ενός κατάλληλου όρου της ακολουθίας ώστε τελικά όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να εγκλωβίζονται στην περιοχή σύγκλισης με κέντρο την οριακή τιμή και ακτίνα οποιονδήποτε μικρό αριθμό, (βλέπε, Παρατήρηση 2.5.1, Ορισμός 2.5.2 και Ορισμός 2.5.4). Η παραπάνω διαδικασία τις περισσότερες φορές είναι επίπονη και δύσχρηστη, είναι όμως αναγκαία για την απόδειξη αρκετών από τις προτάσεις που ακολουθούν καθώς και των ιδιοτήτων των πράξεων των συγκλινουσών ακολουθιών, τα συμπεράσματα των οποίων είναι χρήσιμα εργαλεία στον υπολογισμό ορίων και στη μελέτη της συμπεριφοράς τόσο των όρων της ακολουθίας, όσο και των αντίστοιχων συναρτήσεων, όπως θα δούμε και σε επόμενα κεφάλαια. Στην υποενότητα αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητες των ακολουθιών, οι οποίες συνδέουν την έννοια μίας συγκλίνουσας ακολουθίας (ή της υπακολουθίας της) με τις έννοιες της μονότονης και φραγμένης ακολουθίας.

Πρόταση 2.5.7. Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a\in\mathbb{R}$. Το όριο της ακολουθίας είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς, στον a και a', με $a \neq a'$. Από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \equiv n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_1(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a' \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_2 \equiv n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_2(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a'| < \varepsilon$

Επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, οπότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$ (2.5.4)

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a' \Leftrightarrow$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a'| < \varepsilon$ (2.5.5)

Συνδυάζοντας (2.5.4), (2.5.5) με την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|a' - a| = |a_n - a - a_n + a'| = |a_n - a - (a_n - a')| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

δηλαδή,

$$|a'-a|<2\varepsilon \tag{2.5.6}$$

Θέτουμε $\varepsilon=\dfrac{|a'-a|}{2}$, το οποίο είναι θετικός πραγματικός αριθμός, επειδή υποθέσαμε $a\neq a'$, και μετά από αντικατάσταση του ε στην (2.5.6) καταλήγουμε

$$|a'-a|<|a'-a|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό. ◊◊

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται μία ικανή συνθήκη, που σχετίζεται με τη σύγκλιση της ακολουθίας, ώστε το σύνολο τιμών της ακολουθίας να είναι ένα φραγμένο σύνολο.

Πρόταση 2.5.8. i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

ii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: i) Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a\in\mathbb{R}$, οπότε από τη (2.5.2) και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n\geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$|a_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \tag{2.5.7}$$

Επιλέγοντας τους πραγματικούς αριθμούς $M=\max\{a+\varepsilon,a_1,a_2,\ldots,a_{n_0-1}\}$ και $m=\min\{a-\varepsilon,a_1,a_2,\ldots,a_{n_0-1}\}$ είναι φανερό ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η ανισότητα στη (2.5.7) γράφεται

$$m\leq a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon\leq M\,, \tag{2.5.8}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, (βλέπε, Ορισμός 2.2.1 (iii)).

Για το αντίστροφο, θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=(-1)^n$, και αρχικούς όρους $-1,1,-1,\ldots,(-1)^n,(-1)^{n+1},\ldots$, (βλέπε, Παράδειγμα 2.1.2.(ii)). Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε $|a_n|=|(-1)^n|=1$. Από την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επειδή για τους όρους της ακολουθίας έχουμε:

$$a_n=\begin{cases}-1, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός}\\ 1, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός}\end{cases}$$

είναι φανερό ότι το όριο δεν είναι μοναδικός αριθμός, συνεπώς δεν υπάρχει, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

ii) Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.8(i) και τη (2.5.8) η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι αδύνατο να συμβεί από την υπόθεση. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον προτασιακό λογισμό[2]. ◊◊

Στην πρόταση που ακολουθεί προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση της ακολουθίας γνωρίζοντας εκ των προτέρων τη σύγκλιση των υπακολουθιών της.

[2] Θεωρούμε δύο λογικές προτάσεις p,q. Η πρόταση « $p\Rightarrow q$ » είναι ισοδύναμη με την πρόταση «όχι $q\Rightarrow$ όχι p ». Θεωρώντας ως p την πρόταση «η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα» και ως q την πρόταση «η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη», η απόδειξη είναι προφανής.

Πρόταση 2.5.9. i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $a\in\mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία συγκλίνει στον a.
ii) Αν δύο υπακολουθίες της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν διαφορετική οριακή τιμή, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.
iii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαμερίζεται σε ένα πλήθος υπακολουθιών, που όλες συγκλίνουν στον $a\in\mathbb{R}$, τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a.

Απόδειξη: i) Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Ορισμού 2.4.1 και της σχέσης (2.5.2) της συγκλίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.2(i) (Παντελίδης, 2008)).
ii) Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=(-1)^n$, και αρχικούς όρους $-1,1,-1,\dots,(-1)^n,(-1)^{n+1},\dots$, (βλέπε, Παράδειγμα 2.1.2.(ii)). Από την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επιλέγουμε τους όρους με περιττούς δείκτες και κατασκευάζουμε την υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, που είναι η σταθερή ακολουθία $a_{2n-1}=-1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και επιλέγουμε τους όρους της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με άρτιους δείκτες και κατασκευάζουμε την υπακολουθία $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, που είναι η σταθερή ακολουθία $a_{2n}=1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Προφανώς $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1}=-1$, και $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}=1$.
Θεωρούμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.9(i) πρέπει οι δύο υπακολουθίες που επιλέξαμε να έχουν την ίδια οριακή τιμή, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.
iii) Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Ορισμού 2.4.1, της έννοιας του διαμερισμού της ακολουθίας σε υπακολουθίες (βλέπε, Παραδείγματα 2.4.2 (i) και (ii)) και της σχέσης (2.5.2) της συγκλίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.2(ii)). ◊◊

Στις δύο επόμενες προτάσεις διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι ιδιότητες των πράξεων πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, οι οποίες είναι χρήσιμες στον υπολογισμό ορίων.

Πρόταση 2.5.10. Έστω οι συγκλίνουσες ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=a+b$. Η ιδιότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος όρων.
ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$. Η ιδιότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.
iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$, αν $a\neq 0$ και $a_n\neq 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη: Για τις δύο συγκλίνουσες ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon_1>0 \text{ υπάρχει } n_1\equiv n_1(\varepsilon_1)\in\mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n\geq n_1(\varepsilon_1) \text{ ισχύει } |a_n-a|<\varepsilon_1 \tag{2.5.9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=b \Leftrightarrow \text{για κάθε } \varepsilon_2>0 \text{ υπάρχει } n_2\equiv n_2(\varepsilon_2)\in\mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n\geq n_2(\varepsilon_2) \text{ ισχύει } |b_n-b|<\varepsilon_2 \tag{2.5.10}$$

i) Θέτουμε $\varepsilon_1=\varepsilon_2\equiv\dfrac{\varepsilon}{2}$ και επιλέγουμε $n_0\equiv n_0(\varepsilon)=\max\{n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\}$, οπότε οι (2.5.9) και (2.5.10) γράφονται:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$ (2.5.11)

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \Leftrightarrow$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_0(\varepsilon)$ ισχύει $|b_n - b| < \varepsilon$ (2.5.12)

Συνδυάζοντας τις (2.5.11), (2.5.12) με την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $n \ge n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ ισχύει:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επομένως, επαληθεύεται η (2.5.2), άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

ii) Επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα συμπεραίνεται ότι είναι φραγμένη, (βλέπε, Πρόταση 2.5.8(i)), και σύμφωνα με την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 είναι απόλυτα φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|a_n| \le M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \le M|b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Θέτουμε $\varepsilon_1 \equiv \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$, $\varepsilon_2 \equiv \dfrac{\varepsilon}{2M}$ και επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$, οπότε συνδυάζοντας τις (2.5.9) και (2.5.10) με τη (2.5.13), για κάθε $n \ge n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ ισχύει:

$$|a_n b_n - ab| \le M|b_n - b| + |b||a_n - a| < M\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 < M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

Επομένως, επαληθεύεται η (2.5.2), άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

iii) Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία όπως στην προηγούμενη απόδειξη στο (ii) προκύπτει η ζητούμενη σχέση, η οποία αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ιδιότητες των πράξεων συγκλινουσών ακολουθιών εύκολα μπορούν να αποδειχθούν και οι επόμενες ιδιότητες, οι οποίες αφήνονται ως άσκηση.

Πόρισμα 2.5.11. Έστω k ένα πεπερασμένο πλήθος συγκλινουσών ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, …, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, … και $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = \lambda a$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n + \cdots + x_n) = a + b + \cdots + x$

δηλαδή, η ιδιότητα (i) της Πρότασης 2.5.10 ισχύει για πεπερασμένο πλήθος όρων.

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n \pm \cdots \pm x_n) = a \pm b \pm \cdots \pm x$

iv) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n \cdot \cdots \cdot x_n) = a \cdot b \cdot \cdots \cdot x$

δηλαδή, η ιδιότητα (ii) της Πρότασης 2.5.10 ισχύει για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.

v) Αν $a_n = b_n = \cdots = x_n$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^k = a^k$.

vi) Αν $b \ne 0$ και $b_n \ne 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Είναι φανερό ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές των ιδιοτήτων, που αναφέρονται στην Πρόταση 2.5.10 και στο Πόρισμα 2.5.11, δεν ισχύουν. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $a_n = (-1)^n a$, $b_n = (-1)^{n+1} a$ με $a \neq 0$.

Επειδή για τους όρους των ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε:

$$a_n = \begin{cases} -a, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ a, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} a, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ -a, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

είναι φανερό ότι το όριο κάθε ακολουθίας δεν είναι μοναδικός αριθμός, συνεπώς δεν υπάρχει, άρα οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνουν στον $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, παρατηρήστε ότι οι ακολουθίες που δημιουργούνται με γενικούς όρους το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο των παραπάνω ακολουθιών ορίζονται και δίνουν ακολουθίες με σταθερούς όρους, ως ακολούθως:

$$a_n + b_n = (-1)^n a + (-1)^{n+1} a = 0, \qquad a_n \cdot b_n = (-1)^n a \cdot (-1)^{n+1} a = -a^2, \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n a}{(-1)^{n+1} a} = -1$$

Προφανώς, οι παραπάνω συγκλίνουν ως σταθερές ακολουθίες, (βλέπε, Παρατηρήση 2.5.5 (iii)).

Ένα σημαντικό κριτήριο, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορίου γινομένου ακολουθιών αρκεί να είναι φραγμένες, όχι απαραίτητα συγκλίνουσες, αρκεί μία να είναι από αυτές να είναι μηδενική, αποδεικνύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.5.12. Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική και η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Τότε ισχύει:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με την ισοδυναμία της Πρότασης 2.2.2 η φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απόλυτα φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $|b_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική για κάθε θετικό αριθμό $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της απόλυτης τιμής και τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να γράψουμε

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0,$$

το οποίο επαληθεύει τη (2.5.1). Άρα, $\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$. ◊◊

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.8(i) οι έννοιες της σύγκλισης και των φραγμάτων (άνω, κάτω ή απόλυτα φράγματα) μίας ακολουθίας δεν είναι ισοδύναμες. Όπως αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία (Αθανασιάδης, Γιαννακούλιας, & Γιωτόπουλος, 2009; Παντελίδης, 2008; Ρασσιάς, 2014) και διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση, η επιπρόσθετη συνθήκη, που απαιτείται να έχει μία φραγμένη ακολουθία για να συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό, εξαρτάται από τη μονοτονία της.

Πρόταση 2.5.13. Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο άνω πέρας $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

ii) Αν η $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε η $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο κάτω πέρας $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Παρατήρηση 2.5.14. Εδώ να σημειώσουμε ότι, από το συμπέρασμα της Πρότασης 2.5.13 υποδεικνύεται ένας τρόπος υπολογισμού των περάτων (άνω ή κάτω) μίας ακολουθίας, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτά δεν αποτελούν όρους της ακολουθίας. Συνήθως, αναπτύσσεται η μεθοδολογία για τον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας, ανεξάρτητα από τη γνώση των περάτων της, και συνδυάζοντας την Πρόταση 2.5.13 με τη γνώση της οριακής τιμής υπολογίζεται η τιμή του αντίστοιχου πέρατος.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\dfrac{1}{n}$ αποδείχθηκε ότι είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, (βλέπε αντίστοιχα, Εφαρμογή 2.5.3. και Παράδειγμα 2.2.3 (i)), συνεπώς, η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 2.5.13). Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.3), συνδυάζοντας την ιδιότητα της μοναδικότητας της οριακής τιμής και του $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ συμπεραίνουμε ότι $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n=0$.

Παραδείγματα 2.5.15.

i) Η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$, με $a_1=2$, συγκλίνει με

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=1.$$

ii) Η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\dfrac{(n-1)!}{n^n}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

i) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία με τον παραπάνω αναδρομικό τύπο είναι ακολουθία θετικών όρων, γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη, (βλέπε τις αποδείξεις στα αντίστοιχα παραδείγματα, Παράδειγμα 2.3.3 (iv) και Παράδειγμα 2.2.3 (viii)). Συνεπώς, η ακολουθία συγκλίνει στον $\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 2.5.13), έστω $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=x$. Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στον αναδρομικό τύπο (βλέπε, Πρόταση 2.5.10 (i), (iii)) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{a_n}\right)\Rightarrow x=2-\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Άρα, η ακολουθία συγκλίνει με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$.

Σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 2.5.13 το όριο της ακολουθίας είναι το κάτω πέρας της, δηλαδή,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n=1.$$

ii) Στο Παράδειγμα 2.2.3 (iii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και στο Παράδειγμα 2.3.3 (ii) αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα. Συνεπώς, η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\dfrac{(n-1)!}{n^n}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 2.5.13).

Εδώ να σχολιάσουμε ότι η οριακή τιμή της ακολουθίας δεν υπολογίζεται με αλγεβρικό τρόπο όπως στο (i), ο υπολογισμός γίνεται χρησιμοποιώντας το όριο λόγου του D' Alembert (βλέπε, Πρόταση 2.6.2) και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται η σχέση που συνδέει τη σύγκλιση της ακολουθίας με τη σύγκλιση της ακολουθίας των απολύτων τιμών της.

Πρόταση 2.5.16. Έστω η συγκλίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε,

i) η ακολουθία $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $|a|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{|a_n|} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|} = \sqrt[k]{|a|}$, $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: i) Από την ιδιότητα των απολύτων τιμών $||a|-|b|| \le |a-b|$ και τον ορισμό της σύγκλισης στον αριθμό $a \in \mathbb{R}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$||a_n|-|a|| \le |a_n - a| < \varepsilon ,$$

το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $|a|$, (βλέπε, Ορισμός 2.5.4).

Για το αντίστροφο, θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = (-1)^n$. Επειδή $|a_n| = |(-1)^n| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι φανερό ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, άρα η $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη μονάδα. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει, (βλέπε, απόδειξη στην Πρόταση 2.5.9 (ii)).

ii) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του (i) και της ταυτότητας

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

και αφήνεται ως άσκηση. ◊◊

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως «κριτήριο παρεμβολής» ή «κανόνας Sandwich», επειδή δίνει τη δυνατότητα του υπολογισμού του ορίου μίας ακολουθίας, όταν αυτή είναι «εγκλωβισμένη» από δύο άλλες ακολουθίες, οι οποίες έχουν την ίδια οριακή τιμή.

Πρόταση 2.5.17. (*Κριτήριο παρεμβολής*). Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \le a_n \le c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αν επιπλέον οι ακολουθίες $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Απόδειξη: Θεωρώντας ότι οι ακολουθίες $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον $a \in \mathbb{R}$ από τη (2.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \equiv n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_1(\varepsilon)$ ισχύει

$$|b_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

(2.5.14)

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_2 \equiv n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_2(\varepsilon)$ ισχύει

$$|c_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

(2.5.15)

Επιλέγουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, οπότε από τις (2.5.14) και (2.5.15) καθώς και από την υπόθεση μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_0(\varepsilon)$ ισχύει

$$a - \varepsilon < b_n \le a_n \le c_n < a + \varepsilon .$$

Η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, από την οποία προκύπτει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a, (βλέπε, Ορισμός 2.5.4). ◊◊

Εφαρμογή 2.5.18. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n^a}$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός ($a \in \mathbb{R}^+$), είναι μηδενική, δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^a} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^a = 0 .$$

Απόδειξη: Επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $a>0$ μπορούμε να γράψουμε

$$0 < \left(\frac{1}{n}\right)^a \le \frac{1}{n} ,$$

και $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.3), σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^a} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^a = 0 .$$

Σχόλια: Παρατηρήστε ότι, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα (v) του Πορίσματος 2.5.11, επειδή η ιδιότητα αναφέρεται σε k πεπερασμένο πλήθος παραγόντων και εδώ πρόκειται για μη πεπερασμένο, επειδή $a\in\mathbb{R}^+$. Επιπλέον, δείτε και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα της οριακής τιμής της αντίστοιχης συνάρτησης στο Παράδειγμα 4.3.5.(i). ◊◊

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας της απόλυτης τιμής και του συμπεράσματος της Πρότασης 2.5.17 είναι η επόμενη πρόταση, γνωστή και ως κριτήριο σύγκρισης, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση, (βλέπε, Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις 2.3).

Πόρισμα 2.5.19. (*Κριτήριο σύγκρισης*) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει

$$|a_n| \le |b_n|, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N} .$$

Αν η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, τότε και η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Παράδειγμα 2.5.20.

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\cos(\sqrt{n})}{n}$

Επειδή $\left|\cos(\sqrt{n})\right| \le 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες απολύτων τιμών μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|\frac{2-\cos(\sqrt{n})}{n}\right| = \frac{\left|2-\cos(\sqrt{n})\right|}{n} \le \frac{2+\left|\cos(\sqrt{n})\right|}{n} \le \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n} \tag{2.5.16}$$

Επειδή η ακολουθία $\left(\dfrac{3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.3, Πόρισμα 2.5.11 (i)), συνδυάζοντας τη (2.5.16) με το Πόρισμα 2.5.19, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\cos(\sqrt{n})}{n} = 0 .$$ ◊◊

Ορισμός 2.5.21. Μία ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **ακολουθία Cauchy** ή **βασική ακολουθία**, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n,m>n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\left|a_n-a_m\right|<\varepsilon .$$

Ισοδύναμα, μία ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν
για κάθε $\varepsilon>0$ και $n,p\in\mathbb{N}$ υπάρχει $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε $n\geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon . \tag{2.5.17}$$

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 2.5.21 με την Παρατήρηση 2.5.1 καταλαβαίνουμε ότι μία ακολουθία είναι Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ *τελικά* όλοι οι όροι a_n της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή ενός άλλου όρου, δηλαδή ανήκουν $(a_m-\varepsilon,a_m+\varepsilon)$.

Η ιδιότητα που περιγράφεται στον παραπάνω ορισμό είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα της σύγκλισης στον $\mathbb{R}$, και αυτό διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 2.5.22. (*Κριτήριο Cauchy*) Κάθε ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στον $\mathbb{R}$ είναι ακολουθία Cauchy, και αντίστροφα.

Παρατηρήστε ότι, στο Θεώρημα 2.5.22 διατυπώνεται ένα κριτήριο, δίνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μία ακολουθία να συγκλίνει. Το κριτήριο εφαρμόζεται όταν ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε τη σύγκλιση μίας ακολουθίας, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριό της. Στην Ενότητα 3.2, όπου μεταξύ άλλων μελετώνται οι αρμονικές σειρές p-τάξης, το Θεώρημα 2.5.22 είναι απαραίτητο.

Εφαρμογή 2.5.23. Η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο

$$a_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2},\ n\in\mathbb{N},$$

είναι Cauchy ακολουθία.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα τυχαίο $\varepsilon>0$ και $n,p\in\mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και την ανάλυση σε απλά κλάσματα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\left|a_{n+p}-a_n\right|&=\left|\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right|=\\
&=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|=\\
&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\frac{1}{n}. \tag{2.5.18}$$

Για τυχαίο $\varepsilon > 0$, αν επιλέξουμε $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, εύκολα προκύπτει ότι, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \varepsilon$, επομένως η (2.5.18) γράφεται:

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

δηλαδή, επαληθεύεται η (2.5.17). Επομένως, η δοθείσα ακολουθία είναι Cauchy. Άρα, από την ισοδυναμία του Θεωρήματος 2.5.22 συμπεραίνουμε ότι η αρχική ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Σχόλια: Η παραπάνω ακολουθία ονομάζεται αρμονική δεύτερης τάξης ($p = 2$), την οποία μελετάμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3. ◊◊

2.6. Χαρακτηριστικά όρια

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται τα όρια των σημαντικότερων ακολουθιών, τα οποία μαζί με τα κριτήρια σύγκλισης και τις ιδιότητες των πράξεων, αποτελούν απαραίτητα εργαλεία στον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας. Σε αρκετές από τις αποδείξεις των χαρακτηριστικών ορίων απαιτείται η ακόλουθη ανισότητα.

Ανισότητα Bernoulli

Αν $x \in \mathbb{R}$ με $x > -1$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Επιπλέον, αν $x > -1$ με $x \neq 0$, και

- $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, τότε $(1+x)^a > 1+ax$.
- $a \in (0,1)$, τότε $(1+x)^a < 1+ax$.

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που αναφέρεται στην επόμενη πρόταση, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως γεωμετρική[3].

Πρόταση 2.6.1. (*Όριο γεωμετρικής ακολουθίας*)

Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = r^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $r \in \mathbb{R}$ και $|r| < 1$. Τότε, η γεωμετρική ακολουθία είναι μηδενική, δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = 0.$$

Απόδειξη:

Αν $r = 0$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

Αν $r \neq 0$ και $|r| < 1$ προκύπτει $\dfrac{1}{|r|} > 1$, επομένως υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, έστω x, ο οποίος επιτρέπει να γράψουμε

$$\frac{1}{|r|} = 1 + x \Leftrightarrow |r| = \frac{1}{1+x}. \tag{2.6.1}$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|a_n| = |r^n| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+x}\right)^n = \frac{1}{(1+x)^n} \tag{2.6.2}$$

Επειδή $x > 0$, από την ανισότητα Bernoulli έχουμε :

$$(1+x)^n \geq 1+nx > nx \tag{2.6.3}$$

Συνδυάζοντας (2.6.2) με (2.6.3) μπορούμε να γράψουμε:

$$|a_n| = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{nx} \tag{2.6.4}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $b_n = \dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{n}$. Από την (2.6.1) είναι φανερό ότι ο x είναι σταθερός θετικός αριθμός, εξαρτάται από τον r, επομένως η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, (βλέπε

[3] Γεωμετρική ακολουθία ή γεωμετρική πρόοδος είναι μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = r \cdot a_n$, για κάποιον σταθερό πραγματικό αριθμό r, που ονομάζεται λόγος της ακολουθίας, επειδή από τον αναδρομικό τύπο ισούται με το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της. Αποδεικνύεται ότι , ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = a_1 r^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

αντίστοιχα, Εφαρμογή 2.5.3. και Πόρισμα 2.5.11 (i)). Συνδυάζοντας τη (2.6.4) με το Πόρισμα 2.5.19 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, άρα $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$. ◊◊

Πρόταση 2.6.2. (*Όριο λόγου του D' Alembert*)

Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών όρων και $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Αν $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda < 1$, τότε η ακολουθία είναι μηδενική, δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

ii) Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda > 1$, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει, συγκεκριμένα, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη: i) Από την υπόθεση, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισώσεις:

$$0 < \frac{a_2}{a_1} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_3}{a_2} < \lambda, \quad \ldots, \quad 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \lambda, \quad 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισώσεις κατά μέλη προκύπτει $0 < \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda^n$, και μετά από απλοποιήσεις

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_1} < \lambda^n \Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_1\lambda^n \tag{2.6.5}$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε $0 < \lambda < 1$, από την Πρόταση 2.6.1 συμπεραίνουμε $\lim_{n\to+\infty}\left(a_1\lambda^n\right) = 0$.
Συνδυάζοντας τη (2.6.5) με το κριτήριο παρεμβολής (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) το συμπέρασμα είναι άμεσο, δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
ii) Από την υπόθεση, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισώσεις:

$$\frac{a_2}{a_1} > \lambda, \quad \frac{a_3}{a_2} > \lambda, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > \lambda, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda$$

Με ανάλογα βήματα, όπως στο (i), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$a_{n+1} > a_1\lambda^n, \text{ με } \lambda > 1. \tag{2.6.6}$$

Παρατηρήστε ότι, η ακολουθία $\left(\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπώς, $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$, (βλέπε, Πρόταση 2.5.8 (ii)). Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετικοί, από τη (2.6.6) και $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$ είναι φανερό ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. ◊◊

Παραδείγματα 2.6.3.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} + 2\cdot 10^{2n-1}}$ ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \cdot n^2 + 3^n - 1}{4^n + 5^n}$ iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$

i) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} + 2\cdot 10^{2n-1}}$. Επειδή ο γενικός όρος περιέχει τη γεωμετρική ακολουθία με $r = 10$, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 10^{2n}, και έχουμε:

$$a_n = \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} + 2\cdot 10^{2n-1}} = \frac{4\cdot 10^{-n} - 3}{3\cdot 10^{-n-1} + 2\cdot 10^{-1}} = \frac{4\left(\frac{1}{10}\right)^n - 3}{\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{2}{10}}$$

Επειδή $0<\frac{1}{10}<1$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.1 ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=0$. Συνδυάζοντας την παραπάνω έκφραση του γενικού όρου της ακολουθίας με το προαναφερθέν όριο και τις ιδιότητες των πράξεων των ορίων (βλέπε, Πόρισμα 2.5.11) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4\cdot 10^n-3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{2n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\left(\frac{1}{10}\right)^n-3}{\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n+\frac{2}{10}}=\frac{4\cdot 0-3}{3\cdot 0+\frac{2}{10}}=-15\,.$$

ii) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n=\frac{2^n\cdot n^2+3^n-1}{4^n+5^n}$. Επειδή ο γενικός όρος περιέχει γεωμετρικές ακολουθίες με ποικίλες τιμές των r επιλέγουμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη γεωμετρική που έχει τη μεγαλύτερη βάση, δηλαδή, την 5^n και έχουμε:

$$a_n=\frac{2^n\cdot n^2+3^n-1}{4^n+5^n}=\frac{\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}$$

Επειδή $0<\frac{3}{5}<1$, $0<\frac{1}{5}<1$ και $0<\frac{4}{5}<1$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.1 έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0 \tag{2.6.7}$$

Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $b_n=\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.2 υπολογίζουμε το όριο του λόγου δύο διαδοχικών όρων της, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^2}{5n^2}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{5n^2}=\frac{2}{5}. \tag{2.6.8}$$

Επειδή στη (2.6.3) είναι $\lambda=\frac{2}{5}<1$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.2 (i) ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}=0\,. \tag{2.6.9}$$

Άρα, κάνοντας αντικατάσταση στο όριο με τις (2.6.7), (2.6.9) έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot n^2+3^n-1}{4^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=\frac{0+0-0}{0+1}=0\,.$$

iii) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n=\frac{a^n}{n!}$, με $a\in\mathbb{R}^+$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων. Επειδή συμπεριλαμβάνεται στην ακολουθία παραγοντικό, $n!$, χρησιμοποιώντας το λόγο δύο διαδοχικών όρων της αυτό απλοποιείται, υπολογίζουμε το όριο του λόγου των διαδοχικών όρων της, οπότε έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}\cdot n!}{a^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a\cdot 1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n+1}=a\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\,. \tag{2.6.10}$$

Επειδή στην (2.6.10) είναι $\lambda=0<1$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.2 (i) ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 .$$ ◊◊

Πρόταση 2.6.4. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \sqrt[n]{a}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, όπου $a\in\mathbb{R}^+$. Τότε,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 .$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις τιμές του a.

i) Αν $a=1$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

ii) Αν $a>1$, τότε $\sqrt[n]{a}>1$, επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_n>0$, τέτοιοι ώστε

$$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n , \tag{2.6.11}$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$a = (1+x_n)^n . \tag{2.6.12}$$

Επειδή $x_n>0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli στην (2.6.12) έχουμε:

$$a = (1+x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n > 0$$

Άρα, ισχύει

$$0 < nx_n < a$$

από όπου προκύπτει

$$0 < x_n < \frac{a}{n} \tag{2.6.13}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$, εφαρμόζοντας στην (2.6.13) το κριτήριο παρεμβολής, (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 . \tag{2.6.14}$$

Εφαρμόζοντας όρια στην (2.6.11), στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της Πρότασης 2.5.10, το όριο σταθερής συνάρτησης και τη (2.6.14), συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

iii) Αν $0<a<1$, τότε $\frac{1}{a}>1$, συνεπώς εφαρμόζεται η παραπάνω περίπτωση (ii), από όπου συμπεραίνουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Συνδυάζοντας το (ii) της Πρότασης 2.5.16 με την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 2.5.10 μπορούμε να γράψουμε:

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$ ◊◊

Πρόταση 2.6.5. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \sqrt[n]{n}$, για κάθε $n\geq 2$. Τότε,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Απόδειξη: Επειδή $n\geq 2$, τότε $\sqrt[2n]{n}>1$, επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_n>0$, τέτοιοι ώστε

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + x_n , \tag{2.6.15}$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{n} = (1+x_n)^n . \tag{2.6.16}$$

Επειδή $x_n > 0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli στην (2.6.16) έχουμε:

$$\sqrt{n} = (1+x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n > 0$$

Άρα, ισχύει

$$0 < nx_n < \sqrt{n} \Rightarrow 0 < x_n < \frac{\sqrt{n}}{n}$$

από όπου προκύπτει

$$0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (2.6.17)$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, εφαρμόζοντας στην (2.6.17) το κριτήριο παρεμβολής, (βλέπε, Πρόταση 2.5.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0. \qquad (2.6.18)$$

Επιπλέον η (2.6.15) μπορεί να γραφεί

$$\sqrt[n]{n} = (1+x_n)^2 = 1 + 2x_n + x_n^2. \qquad (2.6.19)$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας όρια στην (2.6.19), και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες πεπερασμένων ορίων (βλέπε, Πόρισμα 2.5.11 (ii), (iv)), το όριο σταθερής συνάρτησης και τη (2.6.18), συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

◊◊

Πρόταση 2.6.6. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνήσια αύξουσα, φραγμένη και συγκλίνει[4] στον πραγματικό αριθμό $e = 2,718281828459045...$, δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (2.6.20)$$

Ο αριθμός e αποτελεί τη βάση των νεπέρειων λογαρίθμων.

---

[4] Το e αναφέρεται ως η σταθερά του Euler προς τιμήν του Ελβετού μαθηματικού και φυσικού Leonhard Euler (1707-1783). Ο e έχει θεμελιώδη σημασία στα μαθηματικά και στη φυσική και μαζί με τους αριθμούς 0, 1, π και το φανταστικό i, αποτελούν τους πιο σημαντικούς αριθμούς. Η σχέση που συδέει τους τέσσερις αριθμούς είναι ο τύπος του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Ο e και ο i είναι έργο της νέας εποχής των μαθηματικών που συμβαδίζει με τις νέες θεωρίες για τη μηχανική του κόσμου. Η ανακάλυψη της σταθεράς e ως το όριο που μελετήσαμε έγινε απο τον Ελβετό μαθηματικό και φυσικό Jacob Bernoulli (1654-1705). Ο Bernoulli υπολόγισε αυτό το όριο, επειδή ήθελε να μελετήσει την αξία μίας χρηματικής κατάθεσης, η οποία τοκίζεται με συνεχή τρόπο και όρισε το αριθμό e ως την αξία μίας μονάδας χρήματος μετά την πάροδο ενός χρόνου, όταν αυτή ανατοκίζεται συνεχώς με ετήσιο τόκο 100%. Διότι αν ο ανατοκισμός υπολογίζονταν ημερησίως, τότε κάθε μέρα η αξία θα μεγάλωνε καθημερινά κατα 1 + 1/365, και στο τέλος του χρόνου το αρχικό ποσό θα γινόταν (1+1/365)365 φορές μεγαλύτερο. Στο όριο που ανατοκιζόταν συνεχώς η αξία μετά απο ένα χρόνο θα ήταν e. Συνεπώς, αν ο ετήσιος τόκος ήταν 5% η κατάθεση ανατοκιζόμενη συνεχώς θα είχε αξία e 0.05 = 1.0527. Η πρώτη γνωστή χρήση της σταθεράς, η οποία και συμβολίζονταν με το γράμμα b, βρίσκεται σε επιστολή του Gottfried Leibniz στον Christiaan Huygens κατά τα έτη 1690 και 1691. Ο Euler άρχισε να χρησιμοποιεί το γράμμα e για τη σταθερά το 1727 και 1728, σε μία αδημοσίευτη εργασία για τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την έκρηξη κανονιών. Η πρώτη φορά που ορίζεται και δημοσιεύεται ο συμβολισμός για το e είναι το 1736 από τον ίδιο τον Euler στην εργασία του "Mechanica, sive motus scientia analytice exposita : instar supplementi ad commentar", Acad. Scient. Petrop.
Ο Charles Hermite (1822-1901), το 1873 απέδειξε ότι ο αριθμός e είναι **υπερβατικός**, δηλαδή, δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, (Αρώνη Π., 2008).
Ο Euler απέδειξε ότι ο e είναι **άρρητος**, δηλαδή, η συνέχιση της επέκτασης του κλάσματος είναι άπειρη. Επίσης, αποδεικνύεται ότι είναι **ασύμμετρος**, δηλαδή, δεν μπορεί να γραφεί ως ρητός με αριθμητή και παρονομαστή πρώτους αριθμούς.

Απόδειξη: Προφανώς όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα η ακολουθία διατηρεί πρόσημο. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \tag{2.6.21}$$

Επειδή $\frac{1}{(n+1)^2} < 1$ είναι φανερό ότι εφαρμόζεται η ανισότητα Bernoulli στην (2.6.21), που μπορεί να γραφεί:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \ge \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Συνεπώς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, από όπου προκύπτει $a_{n+1} > a_n$. Άρα, η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Ορισμός 2.3.1).

Προφανώς, ο πρώτος όρος της ακολουθίας είναι $a_1 = 2$ και επειδή αποδείχθηκε ότι η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα, ισχύει $a_n \ge 2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα, η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, με ένα κάτω φράγμα το 2. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα[5] μπορούμε να γράψουμε:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n^n} <$$

$$< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!} \tag{2.6.22}$$

Θέτουμε

$$b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \tag{2.6.23}$$

συνεπώς, η (2.6.22) γράφεται:

$$2 \le a_n \le b_n \tag{2.6.24}$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που ορίστηκε στη (2.6.23) είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.8.1) και από τη (2.6.24) προκύπτει ότι είναι κάτω φραγμένη.

[5] Διωνυμικό ανάπτυγμα είναι η ακόλουθη ταυτότητα:
$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}\cdot x+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot x^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot x^k+\cdots+x^n$$

Πίνακας 2.2: Όροι των ακολουθιών με γενικό όρο $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και $b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

n	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$
1	2	2
2	2.25	2.5
3	2.37037037	2.6666666
4	2.44140625	2.70833333333333
5	2.48832	2.71666666666667
6	2.521626372	2.71805555555556
7	2.546499697	2.71825396825397
8	2.565784514	2.71827876984127
9	2.581174792	2.71828152557319
10	2.59374246	2.71828180114638
11	2.604199012	2.71828182619849
12	2.61303529	2.71828182828617
13	2.620600888	2.71828182844676
14	2.627151556	2.71828182845823
15	2.632878718	2.71828182845899
16	2.637928497	2.71828182845904
17	2.642414375	**2.718281828459045**
18	2.646425821	2.718281828459045
19	2.650034327	2.718281828459045
20	2.653297705	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
30	2.674318776	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
50	2.69158802907360	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
100	2.70481382942153	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
200	2.71151712292929	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
1000	2.71692393223552	2.718281828459045
⋮	⋮	⋮
2000	2.71760256932299	2.718281828459045

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας[6] την $n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής ακολουθίας[7], μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned} \tag{2.6.25}$$

Συνεπώς, η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από το 3.

Συνδυάζοντας τη (2.6.24) με την (2.6.25) έχουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$2 \leq a_n \leq b_n < 3 \tag{2.6.26}$$

Επειδή οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια μονότονες και επιπλέον φραγμένες, όπως αποδεικνύει η (2.6.26), οι ακολουθίες είναι συγκλίνουσες σε θετικό αριθμό, (βλέπε, Πρόταση 2.5.13). Για τον υπολογισμό της οριακής τιμής της ακολουθίας $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ γνωρίζουμε ότι δεν μπορούμε να επιλύσουμε κάποια αλγεβρική εξίσωση, όπως εφαρμόσαμε στο Παράδειγμα 2.5.15 (i), επειδή ο αριθμός που αναζητούμε είναι **υπερβατικός**[8].

Όσο για την οριακή τιμή της $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποδεικνύεται στην Ενότητα 9.2 ότι είναι

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = e, \tag{2.6.27}$$

και επιπλέον στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζεται η προσέγγιση της τιμής 2.718281828459045, με ακρίβεια 14 δεκαδικών ψηφίων από τον 14$^{\text{ο}}$ όρο της ακολουθίας $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Συνεπώς, συνδυάζοντας τη (2.6.27) με την παραπάνω τιμή προκύπτει ότι μία προσέγγιση του e δίνεται

$$e = 2,718281828459045...$$

Το ερώτημα που παραμένει είναι: ποια είναι η οριακή τιμή της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, επειδή γνωρίζουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει σε θετικό αριθμό. Σημειώστε ότι, δεν εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής, επειδή τα πλευρικά όρια της (2.6.26) είναι διαφορετικά.

Παρατηρώντας τις τιμές στον Πίνακα 2.2 διαπιστώνουμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ προς την τιμή του e είναι «πολύ αργή» συγκρινόμενη με τη $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, για παράδειγμα, παρατηρήστε ότι $b_{2000} - a_{2000} > 0.0001$. Ωστόσο η ιδιότητα της μοναδικότητας της οριακής τιμής και (2.6.27) οδηγούν στην εικασία ότι $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει την απόδειξη της ταύτισης των οριακών τιμών των δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Ρασσιάς, 2014).

Σχόλια: Υπενθυμίζεται ότι μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, προκειμένου να μελετήσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ μπορούμε να αναζητήσουμε το

---

[6] Η ανίσωση $n! \geq 2^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

[7] Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής ακολουθίας με λόγο r δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{1 - r}$. Εδώ έχουμε γεωμετρική ακολουθία με $r = 1/2$ και $a_1 = 1$ και πλήθος προσθετέων $n-1$.

[8] Υπερβατικός ονομάζεται ο αριθμός που δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές.

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στο Κεφάλαιο 6, στην Ενότητα απροσδιόριστες μορφές, έναν τρόπο υπολογισμού του ορίου της αντίστοιχης συνάρτησης χρησιμοποιώντας το όριο του αντίστοιχου νεπέριου λογάριθμου, όπου θα διαπιστώσει ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Συνεπώς, η οριακή τιμή της αντίστοιχης ακολουθίας ταυτίζεται με αυτήν στην (2.6.20). ◊◊

Εφαρμογή 2.6.7. Έστω μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, όπου $a\in\mathbb{R}-\{0\}$. Τότε,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a .$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε περιπτώσεις για το μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a.

i) Αν $a>0$, θέτουμε $\mu=\frac{n}{a}$. Κάνοντας αντικατάσταση στο όριο και χρησιμοποιώντας την (2.6.20) έχουμε :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{a}{a\mu}\right)^{a\mu} = \lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{a\mu} = \left(\lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right)^a = e^a$$

ii) Αν $a<0$, θέτουμε $\mu=-\frac{n}{a}$ και με ανάλογα βήματα, όπως στο (i), αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα. ◊◊

Παραδείγματα 2.6.8

Να πολογισθούν τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n$ ii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n$

Η ιδέα για τους υπολογισμούς, είναι να μετατρέψουμε τους γενικούς όρους των ακολουθιών των ορίων με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε μορφή, που να αντιστοιχεί στα όρια της Πρότασης 2.6.6 ή/και της Εφαρμογής 2.6.7.

i) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των ορίων (βλέπε, Πρόταση 2.5.10 (iii)), και χρησιμοποιώντας το όριο από την Εφαρμογή 2.6.7., έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

ii) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3-1+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n-1)+4}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^n$

Θέτουμε $\mu=n-1$, κάνοντας αντικατάσταση στο παραπάνω όριο, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων (βλέπε, Πρόταση 2.5.10 (ii), Πόρισμα 2.5.11 (i)) και χρησιμοποιώντας το όριο από την Εφαρμογή 2.6.7. , έχουμε :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{4}{\mu}\right)^{\mu+1} = \lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{4}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\lim_{\mu\to+\infty}\left(1+\frac{4}{\mu}\right) = e^4\left(1+4\cdot\lim_{\mu\to+\infty}\frac{1}{\mu}\right) = e^4(1+4\cdot 0) = e^4\end{aligned}$$

◊◊

Πίνακας 2.3: Τα σημαντικότερα όρια των ακολουθιών

1.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$	$a \in \mathbb{R}^+$
2.	$\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$	$\lvert r\rvert < 1, \quad r \in \mathbb{R}$
3.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{r^n} = 0$	$r > 1 , \quad r \in \mathbb{R}$
4.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$a \in \mathbb{R}^+$
5.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	
6.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	
7.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$	$a \in \mathbb{R} - \{0\}$
8.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$	
9.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$a \in \mathbb{R}$
10.	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$	

2.7. Αποκλίνουσες ακολουθίες

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με ακολουθίες που έχουν όριο έναν πραγματικό αριθμό, σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η ακολουθία δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αλλά αποκλίνει στο «άπειρο». Υπενθυμίζουμε ότι οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς, οπότε στα Κεφάλαια 4 και 6 θα δοθεί η ευκαιρία μέσω των συναρτήσεων να μελετηθούν τα όρια των ακολουθιών στο «άπειρο», και εκεί να προταθεί μεθοδολογία για τον υπολογισμό τους, παρόλα αυτά για την πληρότητα του κεφαλαίου χρειάζεται να διατυπώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς και να ορίσουμε τις «πράξεις» με τα «άπειρα».

Ορισμός 2.7.1. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **έχει όριο** το $+\infty$ ή **συγκλίνει** στο $+\infty$ (απειρίζεται **θετικά** ή **τείνει** στο $+\infty$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $a_n > \varepsilon$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n \ge n_0(\varepsilon)$,
και συμβολίζεται $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$.
Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \ge n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } a_n > \varepsilon \qquad (2.7.1)$$

Ανάλογα, ορίζεται:

Ορισμός 2.7.2. Μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **έχει όριο** το $-\infty$ ή **συγκλίνει** στο $-\infty$ (απειρίζεται **αρνητικά** ή **τείνει** στο $-\infty$), αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, που εξαρτάται από τον ε (σημειώνεται $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε $a_n < -\varepsilon$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n \ge n_0(\varepsilon)$,
και συμβολίζεται $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to +\infty$.
Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \text{ τέτοιος ώστε για κάθε } n \ge n_0(\varepsilon) \text{ ισχύει } a_n < -\varepsilon \qquad (2.7.2)$$

Είναι φανερό από τους παραπάνω ορισμούς ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-a_n) = -\infty \qquad (2.7.3)$$

Θεωρώντας ότι ο αναγνώστης γνωρίζει από το Λύκειο ότι τα σύμβολα $+\infty$ ή $-\infty$ δηλώνουν ποσότητες που αυξάνονται ή μειώνονται απεριόριστα, και δεν ορίζονται πράξεις με αυτά, εδώ αναφέρουμε τις κυριότερες ιδιότητες των ακολουθιών που απειρίζονται θετικά ή αρνητικά, και διατυπώνουμε τις «πράξεις» που μπορούν να οριστούν.

Πρόταση 2.7.3. i) Έστω μία αύξουσα ακολουθία και **μη** φραγμένη. Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
ii) Έστω μία φθίνουσα ακολουθία και **μη** φραγμένη. Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

iii) Μία ακολουθία, που δεν είναι άνω φραγμένη, περιέχει μία υπακολουθία που συγκλίνει στο $+\infty$.
iv) Μία ακολουθία, που δεν είναι κάτω φραγμένη, περιέχει μία υπακολουθία που συγκλίνει στο $-\infty$.

v) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $a_n \le b_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

vi) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $a_n \le b_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$. Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
vii) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \le a_n \le c_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$. Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
viii) Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $b_n \le a_n \le c_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$. Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Στον Πίνακα 2.4 παρουσιάζονται οι «επιτρεπτές» και «μη επιτρεπτές» πράξεις των ορίων των ακολουθιών στο άπειρο.

Πίνακας 2.4: Ιδιότητες πράξεων ακολουθιών που έχουν όριο στο άπειρο $\pm\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n+b_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n\cdot b_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (c\cdot a_n)$ $c\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$, $c>0$ $-\infty$, $c<0$	απροσδιόριστη
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστη	$-\infty$	0	όμοια	απροσδιόριστη
$-\infty$	$+\infty$	απροσδιόριστη	$-\infty$	0	$-\infty$, $c>0$ $+\infty$, $c<0$	απροσδιόριστη
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	όμοια	απροσδιόριστη
$\ell\in\mathbb{R}-\{0\}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, αν $\ell>0$ $-\infty$, αν $\ell<0$	$\frac{1}{\ell}$	$c\cdot\ell$	0
$\ell\in\mathbb{R}-\{0\}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$, αν $\ell>0$ $+\infty$, αν $\ell<0$	$\frac{1}{\ell}$	$c\cdot\ell$	0

Παραδείγματα 2.7.1
Να πολογισθούν τα ακόλουθα όρια:
i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}\cdot n^2+n-2}{2n^2-n+1}$ ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\right)$
Η ιδέα για τους ζητούμενους υπολογισμούς είναι να μην υπάρχουν απροσδιόριστες πράξεις. Κάνοντας κατάλληλες απλοποιήσεις στους γενικούς όρους των ακολουθιών να μετατρέπονται σε μορφή τέτοια ώστε, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.4, να ορίζεται η πράξη και να δίνει αποτέλεσμα.

i) Στον παρονομαστή του ζητούμενου ορίου υπάρχει η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Κάνοντας παραγοντοποίηση στον αριθμητή και στον παρονομαστή με τους μεγιστοβάθμιους όρους[9], εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων Πόρισμα 2.5.11 (vi), (ii), (i) και χρησιμοποιώντας $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, (βλέπε, Εφαρμογή 2.5.18), έχουμε:

[9] Αν μετατραπεί ο γενικός όρος της ακολουθίας, που ζητείται το όριο, στην αντίστοιχη συνάρτηση, παρατηρούμε ότι, πρόκειται για ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα 2ου, επειδή είναι: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot x^2+x-2}{2x^2-x+1}$. Συνεπώς, οι μεγιστοβάθμιοι όροι είναι x^2.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot n^2+n-2}{2n^2-n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}}{2-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}+0-0}{2-0+0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε με τη συζυγή παράσταση της απροσδιόριστης μορφής, ώστε να απλοποιηθεί η απροσδιοριστία, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$, έτσι έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}\,\frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}\,\frac{\left(\sqrt{n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=3\frac{\sqrt{2+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

◊◊

Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει στα Κεφάλαια 4 και 6, πολλές περισσότερες περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών και να εξοικειωθεί με την ανάπτυξη της μεθοδολογίας που ακολουθούμε για την άρση της απροσδιοριστίας.

2.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

2.8.1. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ είναι γνήσια αύξουσα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον πρώτο τρόπο, που αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.3.2 (iv). Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.3.3 (i).

2.8.2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$, και $a_1 = 2$ συγκλίνει με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης που υποδεικνύεται στην Πρόταση 2.5.13 (i) αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη.
Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.5.15 (i).

2.8.3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1}=\frac{2a_n+1}{3}$, και $a_1 = 2$ συγκλίνει με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκλισης που υποδεικνύεται στην Πρόταση 2.5.13 (ii) αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη.
Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.5.15 (i).

2.8.4. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+4^n\cdot n^2-1}{2\cdot 7^n+5^n\cdot n}=0$

Υπόδειξη: Διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με 7^n και εφαρμόστε το όριο της γεωμετρικής ακολουθίας και το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.6.3 (ii).

2.8.5. Αν $|a|<1$, να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\cdot a^n\right)=0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.6.3 (iii).

2.8.6. Αν $a>1$, να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.6.3 (iii).

2.8.7. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!}{n^n}=0$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το όριο λόγου του D' Alembert. Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.6.3 (iii).

2.8.8. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{4n}=e^{12}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.6.8 (ii).

2.8.9. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^4+2n^3+n+5}{8n^4-n}=-\frac{1}{4}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.7.1 (i).

2.8.10. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+3}\right)=\frac{1}{2}$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 2.7.1 (ii).

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Αρώνη Π., (2008), Η ιστορία του π, Διπλωματική εργασία, στο Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Αθήνα.

Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.
Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ., τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.
Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.
Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.
Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

2.1. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

ii) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη.

iii) Αν τουλάχιστον μία υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.

iv) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα), τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα).

2.2. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

i) Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον $a\in\mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία συγκλίνει στον a.

ii) Αν μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαμερίζεται σε ένα πλήθος υπακολουθιών, που όλες συγκλίνουν στον $a\in\mathbb{R}$, τότε και η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον a.

2.3. Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $|a_n|\le|b_n|$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

2.4. Να εξετασθεί η μονοτονία των ακολουθιών, που δίνονται από τους επόμενους γενικούς όρους:

i) $a_n=-4n+14$ ii) $a_n=n^2+(n+3)^2$

iii) $a_n=\dfrac{2^n}{n!}$ iv) $a_n=\dfrac{6^n}{(n+1)!}$, για κάθε $n\ge 5$

v) $a_n=\dfrac{n}{e^n}$ vi) $a_n=\sqrt[n]{n}$

vii) $a_n=\dfrac{n+3}{\ln(n+3)}$ viii) $a_n=\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$

2.5. Να εξετασθεί η σύγκλιση των ακολουθιών, που δίνονται από τους επόμενους αναδρομικούς τύπους:

i) $a_{n+1}=2a_n+8$, με $a_1=1$ ii) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+9}{3}$, με $a_1=0$

iii) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$, με $a_1=1$ iv) $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}a_n$, με $a_1=1$

v) $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, με $a_1=\sqrt{2}$ vi) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+8}$, με $a_1=1$

vii) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$, με $a_1=2$ viii) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+c}$, με $a_1=a>0$, και $c>1$

ix) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{a_n+3}$, με $a_1=1$ x) $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+2}{a_n+4}$, με $a_1=\dfrac{1}{2}$

xi) $a_{n+1}=\dfrac{3a_n^2+5}{a_n+2}$, με $a_1=1$ xii) $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2-a_n+1}{a_n}$, με $a_1=2$

Υπόδειξη: Να μελετηθούν οι προϋποθέσεις σύγκλισης των ακολουθιών που διατυπώνονται στην Πρόταση 2.5.13.

2.6. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+\sin(5n)}{3n+2n^2}$ ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+(-1)^n \sin(n-4)}{8n+4}$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin(2n)+4n}$ iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\cos(4n)}{\sin(4n)+2n}$

v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{2^n-1}$ vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n\cdot\sqrt{n}+2^n\cdot\sin(n)}{3^n+4^n\cdot n}$

vii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cdot 5^n-3\cdot 4^n}{3^n+5\cdot 6^n}$ viii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

ix) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+2}\right)^{-n+1}$ x) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{2n}$

2.7. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}}$ ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^6-n^2+1}}{n^3+1}$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-2}-n^3}{2n^2-4n+5}$ iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-\sqrt{n^4+1}}{n^2-\sqrt{n^4-2}}$

v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-n+1}-n$ vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{3n^2+1}\right)$

vii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ viii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n+1}-\sqrt[3]{n^2}\right)$

ix) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln n-\ln(n+1)\right)$ x) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(4+n^2+2n)}{2+\ln n}$

xi) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n+4n}{5n^2-2n-1}$ xii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n^2\ln(n)+\sin(3n)}{3n+2n^2\ln(n)}$