ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές

… Η θεωρία του Einstein έχει επιπλέον τη θέλξη μίας γεωμετρικής θεωρίας εφ' όσον αποτελεί το αποκορύφωμα μίας πορείας, που άρχισε με τη Γεωμετρία του Ευκλείδη. Αυτά ήταν που με τράβηξαν προς τον Einstein και τη θεωρία του. Αργότερα προστέθηκε η πρόκληση των μεγάλων μαθηματικών προβλημάτων.

… Το πρόβλημα της μακρόχρονης συμπεριφοράς του στροβιλισμού περιέχει το σημαντικότερο πρόβλημα της Υδροδυναμικής, το πρόβλημα της τυρβώδους ροής (δηλαδή της ροής που μέσα της σχηματίζονται στρόβιλοι). Αυτό το πρόβλημα, το οποίο εμφανίζεται και στην απλουστευμένη περίπτωση που το ρευστό μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο, όπως το νερό στην καθημερινή μας εμπειρία, παραμένει απλησίαστο 260 χρόνια μετά τη διατύπωση των σχετικών εξισώσεων από τον Euler. Η εμπειρία δείχνει ότι έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα ο στροβιλισμός αποκτά χαώδη συμπεριφορά, με τον αέναο σχηματισμό μίας ατέρμονης ακολουθίας μικρότερων στροβίλων μέσα σε μεγαλύτερους. Αυτό το χάος αποκαλείται "τύρβη". Είναι κάτι, που αποτελεί καθημερινή μας εμπειρία και αξεπέραστη πρόκληση για το μαθηματικό φυσικό.

Δημήτρης Χριστοδούλου (1951 –)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό γενικεύεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε περιπτώσεις όπου το ολοκλήρωμα μελετάται για συνάρτηση ορισμένη σε μη φραγμένο διάστημα, καθώς επίσης για μη φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα ή ο συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων. Ως εφαρμογές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μελετώνται ο μετασχηματισμός Laplace και ο αντίστροφός του.

Προαπαιτούμενη γνώση
Ορισμένο ολοκλήρωμα, μέθοδοι υπολογισμού αόριστου ολοκληρώματος, όριο πραγματικών συναρτήσεων, σειρές πραγματικών αριθμών.

10.1 Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προϋποθέτει μία πραγματική συνάρτηση φραγμένη και ορισμένη σε ένα φραγμένο διάστημα. Στην παρούσα ενότητα, γίνεται η μελέτη ολοκληρωμάτων μίας συνάρτησης που δεν ικανοποιούν μία από τις δύο ή και τις δύο προαναφερθείσες προϋποθέσεις. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα** (*improper integrals*). Στη βιβλιογραφία μερικές φορές συναντάμε και τον όρο «*μη γνήσιο ολοκλήρωμα*» αντί του όρου «γενικευμένο» ολοκλήρωμα (Οικονομίδης & Καρυοφύλλης, 1985).

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα ανάλογα με τα άκρα ολοκλήρωσης της συνάρτησης διακρίνονται σε: α΄-είδους, β΄-είδους και όταν είναι ταυτόχρονα α΄ και β΄-είδους ονομάζονται γ΄-είδους.

Ορισμός 10.1.1. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,r]$, για κάθε $r \in (a,+\infty)$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx, \tag{10.1.1}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $[a,+\infty)$, και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.1) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,a] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[r,a]$, για κάθε $r \in (-\infty,a)$, με $a \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r\to-\infty}\int_r^a f(x)\,dx, \tag{10.1.2}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται, επίσης, **γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους**, και συμβολίζεται $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $(-\infty,a]$, και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.2) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Όταν τα όρια στις σχέσεις (10.1.1) και (10.1.2) δεν υπάρχουν ή δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα **αποκλίνουν** ή **δεν συγκλίνουν** ή **δεν υπάρχουν** στο $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα 10.1.2.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα α΄-είδους:

i) $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$ ii) $I_2=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(2-x)^2}dx$

i) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$, με μοναδικό σημείο «ανωμαλίας» του ολοκληρώματος το $+\infty$. Σύμφωνα με τη σχέση (10.1.1) έχουμε:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\lim_{r\to+\infty}\int_0^{r}\frac{1}{x^2+4}dx=\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^r=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{r}{2}\right)-\frac{1}{2}\tan^{-1}(0)\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1. το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\pi}{4}$.

ii) Σύμφωνα με τη (10.1.2) έχουμε:

$$I_2=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(2-x)^2}dx=\lim_{r\to-\infty}\int_r^{0}\frac{1}{(2-x)^2}dx=\lim_{r\to-\infty}\left[\frac{1}{2-x}\right]_r^0=\frac{1}{2}-\lim_{r\to-\infty}\frac{1}{2-r}=\frac{1}{2}$$

Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. ◊◊

Εφαρμογή 10.1.3. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

i) αν $p\le 1$, αποκλίνει.
ii) αν $p>1$συγκλίνει, και είναι

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{a^{1-p}}{p-1}\quad . \tag{10.1.3}$$

Στην ειδική περίπτωση $a=1$ και $p>1$, η συνάρτηση

$$J(p)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1} \tag{10.1.4}$$

ονομάζεται **συνάρτηση ζήτα**.

Απόδειξη: i) Έστω $p=1$. Τότε από τη σχέση (10.1.1)

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{r\to+\infty}\int_a^{r}\frac{1}{x}dx=\lim_{r\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_a^r=\lim_{r\to+\infty}\left[\ln x\right]_a^r=\lim_{r\to+\infty}\ln r-\ln a=+\infty .$$

Δηλαδή, για $p=1$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
Έστω $p<1$. Τότε

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{r\to+\infty}\int_a^{r}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^r=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}\right)=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r^{1-p}}{1-p}\right)-\frac{a^{1-p}}{1-p}=+\infty ,$$

επειδή $1-p>0$ και $\lim_{r\to+\infty}r^{1-p}=+\infty$.

ii) Έστω $p>1$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1. έχουμε:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{r\to+\infty}\int_a^{r}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^r=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}\right)=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r^{1-p}}{1-p}\right)-\frac{a^{1-p}}{1-p}=\frac{a^{1-p}}{p-1},$$

επειδή $1-p<0$ και $\lim_{r\to+\infty}r^{1-p}=0$. ◊◊

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος και των ορίων αποδεικνύονται οι συνθήκες ύπαρξης και ο τρόπος υπολογισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος με άκρα το $-\infty$ και $+\infty$, που περιγράφονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 10.1.4. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[r', r]$, για κάθε $r', r\in\mathbb{R}$, και υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \text{ για κάποιο } a\in\mathbb{R},$$

τότε υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{s}^{+\infty} f(x)\,dx, \text{ για κάθε } s\in\mathbb{R}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx+\int_{s}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{10.1.5}$$

δηλαδή, το άθροισμα (10.1.5) είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $s\in\mathbb{R}$.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.1.5) συμβολίζεται με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

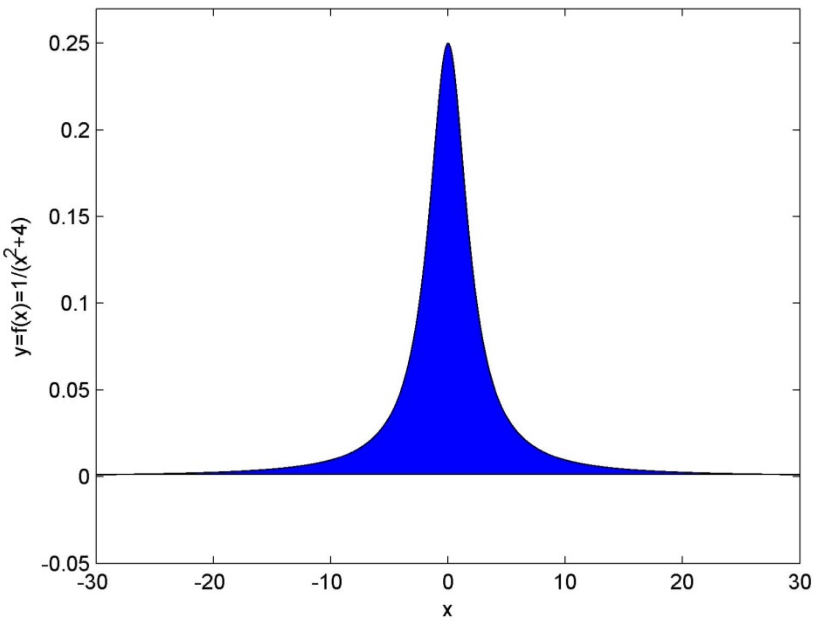
Θεωρώντας ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους μίας μη αρνητικής συνάρτησης f στις σχέσεις (10.1.1), (10.1.2) και (10.1.5) υπάρχει, μπορούμε να σκεφτούμε τη **γεωμετρική ερμηνεία** του. Συγκεκριμένα:

- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ για μία συνάρτηση $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,+\infty)$, όπου $a\in\mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.1) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'0x$ και της ευθείας $x=a$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ για μία συνάρτηση $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in(-\infty, a]$, όπου $a\in\mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.2) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'0x$ και της ευθείας $x=a$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ για μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.5) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'0x$, (βλέπε, Σχήμα 10.1).

Παράδειγμα 10.1.5.

Να υπολογισθεί το $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.4., αν επιλέξουμε ως $s=0$ το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι (βλέπε, Παράδειγμα 10.1.2 (i) και Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 10.4.1.)



Σχήμα 10.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x^2+4)^{-1}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ απεικονίζεται στο Σχήμα 10.1. Είναι φανερό ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση f είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια η γραμμοσκιασμένη περιοχή (με μπλε χρώμα) μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'0x$ έχει εμβαδόν που ισούται με $\pi/2$. ◊◊

Ορισμός 10.1.6. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ και $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,r]$, για κάθε $r\in(a,b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $[r,b)$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r\to b^-}\int_a^r f(x)\,dx, \tag{10.1.6}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^b f(x)\,dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $[a,b)$ και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.6) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Ανάλογα, υποθέτουμε ότι $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r,b]$, για κάθε $r\in(a,b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $(a,r]$. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{r\to a^+}\int_r^b f(x)\,dx, \tag{10.1.7}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους**, και συμβολίζεται $\int_a^b f(x)\,dx$.

Επιπλέον, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους της f **συγκλίνει** (ή υπάρχει) στο $(a,b]$ και ότι ο πραγματικός αριθμός στην (10.1.7) είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Τα a και b στις σχέσεις (10.1.6) και (10.1.7) αντίστοιχα ονομάζονται **ανώμαλα σημεία** για την f (ή **πόλοι**) και είναι τα μοναδικά ανώμαλα σημεία σε καθένα από τα γενικευμένα ολοκληρώματα (10.1.6) και (10.1.7).

Όταν τα όρια στις σχέσεις (10.1.6) και (10.1.7) δεν υπάρχουν ή δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε λέμε ότι τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα **αποκλίνουν** ή **δεν συγκλίνουν**.

Παραδείγματα 10.1.7.
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα β΄-είδους:

i) $I_1=\int_{-2}^{8}\frac{1}{\sqrt{8-x}}dx$ ii) $I_2=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ iii) $I_3=\int_{0}^{1}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$

i) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$ είναι $(-\infty,8)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=8$. Επομένως, το $x=8$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $[-2,8)$, άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.6 πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους και από τη (10.1.6) έχουμε:

$$I_1=\int_{-2}^{8}\frac{1}{\sqrt{8-x}}dx=\lim_{r\to 8^-}\int_{-2}^{r}\frac{1}{\sqrt{8-x}}dx=\lim_{r\to 8^-}\left[-2\sqrt{8-x}\right]_{-2}^{r}=-2\lim_{r\to 8^-}\left(\sqrt{8-r}-\sqrt{10}\right)=2\sqrt{10}$$

Επομένως, το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 υπάρχει και συγκλίνει στον αριθμό $2\sqrt{10}$.

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ είναι $(-1,1)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=-1$. Επομένως, το $x=-1$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $(-1,0]$, άρα πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους. Σύμφωνα με τη σχέση (10.1.7) έχουμε

$$I_2=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{r\to -1^+}\int_{r}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{r\to -1^+}\left[\sin^{-1}(x)\right]_{r}^{0}=\lim_{r\to -1^+}\left(\sin^{-1}(0)-\sin^{-1}(r)\right)=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2},$$

επειδή $\sin^{-1}(0)=0$ και $\sin^{-1}(-1)=-\sin^{-1}(1)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ είναι $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=0$. Επομένως, το $x=0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο για την f στο διάστημα $(0,1]$, άρα πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους.
Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $\cos(x)$, το οποίο είναι η συγκλίνουσα δυναμοσειρά, (βλέπε, τη σχέση (6) στον Πίνακα 9.1.),

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!},$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, για κάθε $x\neq 0$, μπορεί να γραφεί:

$$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1-\left(1-x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\right)}{x^2}=\frac{x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}}{x^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\frac{x^6}{8!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}+\cdots$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της f στο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 και κάνοντας ολοκλήρωση όρο-προς-όρο έχουμε

$$I_3=\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\frac{x^6}{8!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}+\cdots\right)dx=$$
$$=\left[\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\frac{x^7}{7\cdot 8!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}+\cdots\right]_0^1=$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 6!}-\frac{1}{7\cdot 8!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n)!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n)!},$$
από όπου συμπεραίνουμε ότι το I_3 είναι μία εναλλάσσουσα σειρά. Θεωρώντας την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με γενικό όρο $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n)!}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για ακολουθία θετικών όρων, για την οποία ισχύουν:

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n)!}}=\dfrac{(2n-1)\cdot(2n)!}{(2n+1)\cdot(2n+2)!}=\dfrac{(2n-1)}{(2n+1)^2\cdot(2n+2)}<1$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, και
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n)!}=0$, άρα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία.

Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz επαληθεύονται, άρα η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)(2n)!}$ συγκλίνει, (βλέπε, Πρόταση 3.3.2.).

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.6. το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 υπάρχει και συγκλίνει στον ίδιο αριθμό, στον οποίο συγκλίνει η εναλλάσσουσα σειρά
$$I_3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n)!}.$$
◊◊

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα β΄-είδους αποδεικνύεται ανάλογο αποτέλεσμα με το Θεώρημα 10.1.4, το οποίο διατυπώνεται στη συνέχεια.

Θεώρημα 10.1.8. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r',r]$, για κάθε $r',r\in(a,b)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στα $(a,r']$ και $[r,b)$, δηλαδή τα a και b είναι τα μοναδικά ανώμαλα σημεία για την f στο (a,b). Αν υπάρχει $c\in(a,b)$ τέτοιος ώστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα
$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_c^b f(x)dx$$
να υπάρχουν, τότε το άθροισμα
$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$
είναι ανεξάρτητο της επιλογής του c και δίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$. Δηλαδή,
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{10.1.8}$$

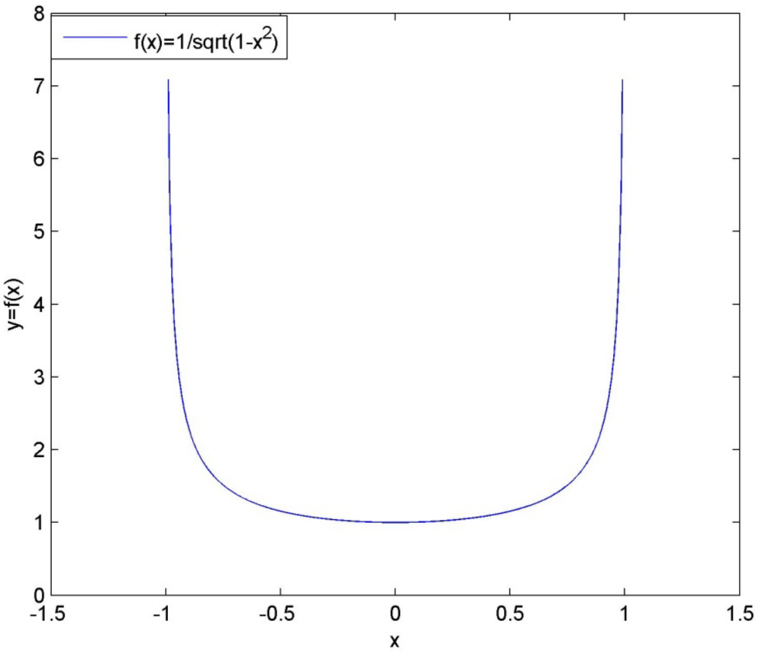
Θεωρώντας ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους μίας μη αρνητικής συνάρτησης f στις σχέσεις (10.1.6), (10.1.7) και (10.1.8) υπάρχει, μπορούμε να σκεφτούμε τη **γεωμετρική ερμηνεία** του. Συγκεκριμένα:

- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.6) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'0x$ και των ευθειών $x=a$, $x=b$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in(a,b]$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.7) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'0x$ και των ευθειών $x=a$, $x=b$.
- αν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ για μία συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η τιμή του ολοκληρώματος στην (10.1.8) ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'0x$, και των ευθειών $x=a$, $x=b$.

Παράδειγμα 10.1.9.

Να υπολογισθεί το $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ είναι $(-1,1)$, και η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο Σχήμα 10.2. Προφανώς η άρτια συνάρτηση f στο διάστημα $(-1,1)$ έχει δύο ανώμαλα σημεία τα $x=\pm 1$, στα οποία απειρίζεται, (σύγκρινε με το Παράδειγμα 10.1.7(ii)).



Σχήμα 10.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.8 και για $c=0$ η σχέση (10.1.8) γίνεται:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{r\to -1^+}\left[\sin^{-1}(x)\right]_r^0+\lim_{r\to 1^-}\left[\sin^{-1}(x)\right]_0^r=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Είναι φανερό ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση f είναι θετική για κάθε $x\in(-1,1)$, και σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια η περιοχή μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'0x$ έχει εμβαδόν που ισούται με π. ◊◊

Ορισμός 10.1.10. Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[r',r]$, για κάθε $r',r\in(a,+\infty)$, ενώ δεν είναι φραγμένη στο $(a,r']$, (δηλαδή, στο a η f απειρίζεται). Αν υπάρχουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα β΄-είδους και α΄-είδους,

$$\int_a^s f(x)\,dx \text{ και } \int_s^{+\infty} f(x)\,dx, \text{ για κάποιο } s\in(a,+\infty),$$

τότε υπάρχει το άθροισμα

$$\int_a^s f(x)\,dx+\int_s^{+\infty} f(x)\,dx$$

είναι ανεξάρτητο της επιλογής του s και ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄-είδους** στο $(a,+\infty)$ και συμβολίζεται $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Δηλαδή,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^s f(x)\,dx+\int_s^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (10.1.9)$$

Ανάλογα, αν $b\in\mathbb{R}$ και $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $[r',r]$, $r',r\in(-\infty,b)$ και στο $x=b$ η f δεν είναι φραγμένη και επιπλέον υπάρχουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα α΄-είδους και β΄-είδους,

$$\int_{-\infty}^s f(x)\,dx \text{ και } \int_s^b f(x)\,dx, \text{ για κάποιο } s\in(-\infty,b),$$

τότε υπάρχει το **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄-είδους** στο $(-\infty,b)$, συμβολίζεται $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ και δίνεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\int_{-\infty}^s f(x)\,dx+\int_s^b f(x)\,dx. \qquad (10.1.10)$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄-είδους στο $(-\infty,b)$ στην (10.1.10) είναι ανεξάρτητο της επιλογής του s.

Παρατήρηση. Στα ολοκληρώματα γ΄-είδους εκτός του $+\infty$ (ή $-\infty$) υπάρχει ένα ακόμη σημείο ανωμαλίας και ο υπολογισμός τους ανάγεται σε άθροισμα ενός ολοκληρώματος α΄-είδους και ενός β΄-είδους, σύμφωνα με τις σχέσεις (10.1.9) και (10.1.10).

Παράδειγμα 10.1.11.

Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ είναι $(1,+\infty)$, και η συνάρτηση f απειρίζεται για $x=1$ και ∞. Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.10 πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄-είδους στο $(1,+\infty)$ και σύμφωνα με τη (10.1.9) για $s=2$, έχουμε

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_1^{2}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=I_1+I_2, \qquad (10.1.11)$$

όπου $I_1=\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$, $I_2=\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $I=\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ θέτουμε $t=\sqrt{x-1}$ από όπου προκύπτουν :

$$x=t^2+1 \quad \text{και} \quad dx=2tdt$$

Αντικαθιστώντας στο αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{2t}{t(t^2+1)}dt=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\tan^{-1}(t)+c=2\tan^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right)+c \tag{10.1.12}$$

Εφαρμόζοντας την (10.1.12) στα I_1, I_2 της (10.1.11) και χρησιμοποιώντας $\lim\limits_{r\to 1^+}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{r-1}\right)\right)=0$ και $\lim\limits_{r\to +\infty}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{r-1}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$, τα γενικευμένα ολοκληρώματα γράφονται ως ακολούθως:

$$I_1=\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\lim_{r\to 1^+}\int_r^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\lim_{r\to 1^+}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right)\right]_r^2=\frac{\pi}{2}-2\lim_{r\to 1^+}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{r-1}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$$I_2=\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\lim_{r\to +\infty}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\lim_{r\to +\infty}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right)\right]_2^r=2\lim_{r\to +\infty}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{r-1}\right)\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων I_1 και I_2 στην (10.1.11) έχουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=I_1+I_2=\pi .$$

Επομένως, το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό π. ◊◊

Σε αρκετές περιπτώσεις ο υπολογισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι αρκετά σύνθετος, ενώ είναι ευκολότερος ο υπολογισμός ενός άλλου απλούστερου γενικευμένου ολοκληρώματος, που σχετίζεται με το αρχικό διατηρώντας τα ίδια «ανώμαλα σημεία». Στις περιπτώσεις αυτές, όπως και στη μελέτη των σειρών πραγματικών αριθμών, εργαλείο για την άντληση της πληροφορίας σύγκλισης/απόκλισης ενός γενικευμένου ολοκληρώματος είναι η εφαρμογή κατάλληλων κριτηρίων, τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια και είναι ανάλογα των σειρών.

Πρόταση 10.1.12. (*κριτήριο απόλυτης σύγκλισης*) Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα $[a,r]$, για κάθε $r\in(a,+\infty)$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ συγκλίνει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right|\le \int_a^{+\infty}|f(x)|dx. \tag{10.1.13}$$

Ανάλογα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α΄-είδους στο $(-\infty,a]$, $a\in\mathbb{R}$.

Στις επόμενες προτάσεις διατυπώνονται δύο κριτήρια σύγκλισης γενικευμένου ολοκληρώματος, τα οποία αφορούν θετικές συναρτήσεις. Το ένα βασίζεται στη μονοτονία του ολοκληρώματος, προκύπτει άμεσα από την ιδιότητα (viii) της Πρότασης 7.6.10. και το άλλο κριτήριο αναφέρεται στην οριακή τιμή του λόγου των δύο θετικών συναρτήσεων, όπου γνωρίζοντας τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος της μίας συνάρτησης προκύπτουν συμπεράσματα για τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος της άλλης συνάρτησης.

Πρόταση 10.1.13. (*πρώτο κριτήριο σύγκρισης*) Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο κλειστό διάστημα $[a,r]$, για κάθε $r\in(a,+\infty)$, (δηλαδή, έχουν μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$) και τέτοιες ώστε

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty).$$

i) Αν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{10.1.14}$$

ii) Αν αποκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, τότε αποκλίνει και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α΄-είδους στο $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Εδώ χρειάζεται να σχολιάσουμε ότι εφαρμόζοντας το πρώτο κριτήριο σύγκρισης στην περίπτωση σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, εφόσον υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού της τιμής του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, από τη (10.1.14) είναι φανερό ότι υπάρχει εκτίμηση ενός άνω φράγματος του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, δυνατότητα που δεν εξασφαλίζεται από την εφαρμογή του δεύτερου κριτηρίου σύγκρισης, όπως παρατηρούμε από τη διατύπωση της επόμενης πρότασης, (βλέπε, Παραδείγματα 10.1.15 (ii), (iii)).

Πρόταση 10.1.14. (δεύτερο *κριτήριο σύγκρισης* ή *οριακό κριτήριο σύγκρισης*) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο κλειστό διάστημα $[a, r]$, για κάθε $r \in (a, +\infty)$, (δηλαδή, έχουν μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$), τέτοιες ώστε $f(x) \ge 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

i) Αν $0 < k < +\infty$, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση, δηλαδή,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ συγκλίνει (αποκλίνει) } \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ συγκλίνει (αποκλίνει).}$$

ii) Αν $k = 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

iii) Αν $k = +\infty$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση γενικευμένων ολοκληρωμάτων α΄-είδους στο $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Κριτήρια σύγκλισης, ανάλογα αυτών που διατυπώνονται στο Θεώρημα 10.1.12 και αφορούν το γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους, μπορούν να διατυπωθούν και να αποδειχθούν για τα γενικευμένα ολοκληρώματα β΄-είδους και γ΄-είδους.

Παραδείγματα 10.1.15.
Να εξετάσετε τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση των ακόλουθων γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

i) $I_1 = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3}\,dx$ ii) $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$ iii) $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4 e^x}\,dx$

Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν να βρεθεί ένα άνω φράγμα σύγκλισης, όπου είναι δυνατόν.

i) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{0\}$, συνεπώς για κάθε $x\in[1/2,+\infty)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_1=\int_{1/2}^{+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x^3}dx$ είναι α΄-είδους (έχει μοναδικό σημείο ανωμαλίας το $+\infty$).
Επίσης, για κάθε $x\in[1/2,+\infty)$ μπορούμε να γράψουμε

$$0\le\left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right|\le\frac{1}{|x|^3}\le\frac{1}{x^3}.$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_4=\int_{1/2}^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$ είναι α΄-είδους στο $[1/2,+\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι της μορφής που μελετήθηκε στην Εφαρμογή 10.1.3 (ii) με $a=1/2$ και $p=3>1$, συμπεραίνουμε ότι το I_4 συγκλίνει και σύμφωνα με την (10.1.3) ισχύει

$$I_4=\int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{(1/2)^{1-3}}{3-1}=2. \tag{10.1.15}$$

Επειδή οι προϋποθέσεις της Πρότασης 10.1.13.(i) ικανοποιούνται, συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin(x)}{x^3}\right|dx$ συγκλίνει και συνδυάζοντας την (10.1.14) με την (10.1.15) προκύπτει ότι

$$\int_{1/2}^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right|dx\le\int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=2. \tag{10.1.16}$$

Επειδή $\int_{1/2}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin(x)}{x^3}\right|dx$ συγκλίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 1.10.12 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_1=\int_{1/2}^{+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x^3}dx$ συγκλίνει και συνδυάζοντας την (10.1.13) με την (10.1.16) μπορούμε να γράψουμε

$$\left|\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^3}dx\right|\le\int_{1/2}^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right|dx\le2\Rightarrow-2\le\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^3}dx\le2.$$

Επομένως, ένα άνω φράγμα σύγκλισης του I_1 είναι το 2.
ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[1,+\infty)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$0\le\frac{1}{\sqrt{x^3+2}}\le\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{3/2}}$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_5=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ είναι α΄-είδους στο $[1,+\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην Εφαρμογή 10.1.3 (ii) με $a=1$ και $p=\dfrac{3}{2}>1$. Συνεπώς, το I_5 συγκλίνει και από την (10.1.4) ισχύει

$$I_5=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}-1}=2. \tag{10.1.17}$$

Επειδή οι προϋποθέσεις της Πρότασης 10.1.13.(i) ικανοποιούνται, συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2 συγκλίνει. Συνδυάζοντας την (10.1.14) με την (10.1.17) προκύπτει ότι $I_2=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx\le I_5=2$, άρα ένα άνω φράγμα σύγκλισης του I_2 είναι το 2.

iii) Η θετική συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^4e^x}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}-\{0\}$, συνεπώς για κάθε $x\in[1,+\infty)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^4e^x}dx$ είναι α΄-είδους στο $[1,+\infty)$ (γιατί;). Θεωρούμε τη θετική συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{x^4}$ που ορίζεται $\mathbb{R}-\{0\}$ και υπολογίζουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_6=\int_1^{+\infty}g(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$ είναι α΄-είδους στο $[1,+\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην Εφαρμογή 10.1.3 (ii) με $a=1$ και $p=4$. Συνεπώς, το I_6 συγκλίνει και από την (10.1.4) ισχύει

$$I_6=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}.$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k=0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_6 συγκλίνει, μπορεί να εφαρμοστεί το δεύτερο κριτήριο σύγκρισης (βλέπε, Πρόταση 10.1.14.(ii)), από όπου συμπεραίνουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4e^x}dx$ συγκλίνει. ◊◊

Κλείνουμε την ενότητα διατυπώνοντας ένα κριτήριο σύγκλισης/απόκλισης ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μίας θετικής συνάρτησης, το οποίο βασίζεται στη σύγκλιση/απόκλιση μίας αντίστοιχης σειράς.

Θεώρημα 10.1.16. Έστω f μία ολοκληρώσιμη και φθίνουσα συνάρτηση στο $[1,+\infty)$ και $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I=\int_1^{+\infty}f(x)dx$ και η αντίστοιχη σειρά $S=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Ιδιαίτερα, αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε ισχύει:

$$I<S<I+f(1) \tag{10.1.18}$$

Παραδείγματα 10.1.17.

Να εξετάσετε τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Αν οι σειρές συγκλίνουν να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα σύγκλισης αυτών.

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ με πεδίο ορισμού $[1,+\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι θετική και φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της (γιατί;). Εξετάζουμε τη σύγκλιση/απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x-1}dx.$$

Έχουμε

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^{\infty}=\frac{1}{2}\lim_{r\to+\infty}\left(\ln|2r-1|\right)-0=+\infty.$$

Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 αποκλίνει. Επειδή I_1 αποκλίνει εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.1.16. η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει.

Παρατήρηση. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 7.7 τα γενικευμένα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν και σε προγραμματιστικό περιβάλλον χρησιμοποιώντας την εντολή `int.` Επειδή η συμβολική εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στα λογισμικά Matlab και Octave, όταν αυτά είναι εφοδιασμένα με τα Symbolic πακέτα, (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave ; Symbolic Math Toolbox), το παραπάνω αποτέλεσμα επαληθεύεται με Matlab/Octave, όπου χρησιμοποιώντας την εντολή syms για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, έχουμε :

```
syms x
f=1/(2*x-1);
int(f,x,1,Inf)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
Inf
```

ii) Η σειρά είναι γνωστή ως p-αρμονική με $p=2$ ή σειρά Dirichlet, (βλέπε, Ορισμός 3.1.8.). Επειδή $p>1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (βλέπε, Εφαρμογή 3.2.13) . Στην Εφαρμογή 3.1.9 έχει αποδειχθεί μία προσέγγιση του αθροίσματος της σειράς με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων, η οποία είναι:

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1.644=\frac{\pi^2}{6} \tag{10.1.19}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού $[1,+\infty)$. Προφανώς, η συνάρτηση είναι θετική και φθίνουσα (γιατί;).

Επιπλέον, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ είναι α΄-είδους στο $[1,+\infty)$ (γιατί;) και συγκεκριμένα είναι ζήτα συνάρτηση, μορφή που μελετήθηκε στην Εφαρμογή 10.1.3 (ii) με $a=1$ και $p=2$. Συνεπώς, το I_2 συγκλίνει και από την (10.1.4) ισχύει

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2-1}=1. \tag{10.1.20}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.16. η αντίστοιχη σειρά $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Συνδυάζοντας την (10.1.18) με την (10.1.20) μπορούμε να βρούμε άνω και κάτω φράγμα της προσέγγισης της σειράς γράφοντας

$$I_2<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<I_2+f(1)\Rightarrow 1<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2,$$

επαληθεύοντας την προσεγγιστική τιμή στη (10.1.19). ◊◊

10.2 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μία ειδική περίπτωση μίας γενικότερης κατηγορίας μετασχηματισμών, που είναι γνωστοί ως γενικευμένοι γραμμικοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι δρουν επί μίας συνάρτησης, η οποία ονομάζεται συνάρτηση *εισόδου*, και παράγουν μία άλλη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται συνάρτηση *εξόδου*. Ο μετασχηματισμός Laplace βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της επιστήμης του μηχανικού, όπως η ανάλυση σημάτων, η μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων, και περιγράφει φυσικά φαινόμενα τόσο μηχανικής όσο και ηλεκτρομαγνητισμού. Φαινόμενα, τα οποία παρουσιάζουν χρονική εξέλιξη που συνοδεύεται από απόσβεση, μπορούν να περιγραφούν από μία γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές ή από ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace προσφέρουν έναν από τους αποτελεσματικότερους τρόπους επίλυσης αυτών των εξισώσεων μετατρέποντας τις εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Ορισμός 10.2.1. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,+\infty)$. Ονομάζουμε **μετασχηματισμό Laplace** (Laplace transform) **της συνάρτησης** f, και συμβολίζουμε με $L\big(f(x)\big)$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$L\big(f(x)\big)=\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx\,, \tag{10.2.1}$$

για κάθε τιμή της πραγματικής μεταβλητής s, για την οποία το ολοκλήρωμα στη (10.2.1) συγκλίνει.

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.2.1) αποκλίνει για κάθε $s\in\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι **δεν υπάρχει** ο μετασχηματισμός Laplace της f.

Παρατηρήστε ότι όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα στη (10.2.1) συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα αποτελεί μία συνάρτηση της μεταβλητής s, που συμβολίζεται, πολλές φορές, με $L\big(f(x)\big)=F(s)$. Επίσης, η F ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f ή **συνάρτηση εξόδου της** f **κατά Laplace**.

Επιπλέον, όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους και, αν υπάρχει για την f ένα ανώμαλο σημείο στο $[0,+\infty)$ (εκτός του $+\infty$), τότε ο μετασχηματισμός είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα γ΄-είδους.

Εφαρμογή 10.2.2.

Για την πραγματική μεταβλητή s και για κάθε $a\in\mathbb{R}$, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

i) $f(x)=e^{ax}$ υπάρχει, όταν $s>a$, και ισούται με : $L\left(e^{ax}\right)=\dfrac{1}{s-a}$

ii) $f(x)=\sin(ax)$ υπάρχει, όταν $s>0$, και ισούται με : $L\big(\sin(ax)\big)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

Απόδειξη: i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 10.2.1. ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)=e^{ax}$ απαιτεί τον υπολογισμό και τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{ax}dx$.

Επειδή, για $s>a$ ισχύει $\lim\limits_{r\to+\infty} e^{(a-s)r}=0$, στο ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$L\left(e^{ax}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{ax}dx=\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x}dx=\frac{1}{a-s}\lim_{r\to+\infty}\int_0^{r}\left(e^{(a-s)x}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{a-s}\lim_{r\to+\infty}\left(e^{(a-s)r}-1\right)=\frac{1}{s-a}.$$

Σημειώνεται ότι $\lim\limits_{r\to+\infty} e^{(a-s)r}=+\infty$, όταν $s<a$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει. Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)=e^{ax}$ είναι

$$L\left(e^{ax}\right)=\frac{1}{s-a},\ \text{όταν}\ s>a.$$

ii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 10.2.1. ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)=\sin(ax)$ απαιτεί τον υπολογισμό του ακόλουθου γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$F(s)=L\left(\sin(ax)\right)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin(ax)\,dx=\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-sx}\sin(ax)\,dx.$$

Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος (βλέπε, Παράδειγμα 7.3.3.(iii)) έχουμε

$$I=\int e^{-sx}\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{s}\int\left(e^{-sx}\right)'\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{s}\left[e^{-sx}\sin(ax)-a\int e^{-sx}\cos(ax)\,dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{s}\left[e^{-sx}\sin(ax)+\frac{a}{s}\left(e^{-sx}\cos(ax)+a\int e^{-sx}\sin(ax)\,dx\right)\right]=-\frac{1}{s}e^{-sx}\sin(ax)-\frac{a}{s^2}e^{-sx}\cos(ax)-\frac{a^2}{s^2}I,$$

από όπου προκύπτει

$$I=-\frac{s}{s^2+a^2}\left(e^{-sx}\sin(ax)+\frac{a}{s}e^{-sx}\cos(ax)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$L\left(\sin(ax)\right)=-\frac{s}{s^2+a^2}\lim_{r\to+\infty}\left[e^{-sr}\sin(ar)+\frac{a}{s}e^{-sr}\cos(ar)+c\right]+\frac{s}{s^2+a^2}e^0\sin(0)+\frac{a}{s^2+a^2}e^0\cos(0)-c=$$

$$=-\frac{s}{s^2+a^2}\lim_{r\to+\infty}\left(e^{-sr}\sin(ar)\right)-\frac{a}{s^2+a^2}\lim_{r\to+\infty}\left(e^{-sr}\cos(ar)\right)+\frac{a}{s^2+a^2}. \tag{10.2.2}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\lim_{r\to+\infty}\left(e^{-sr}\sin(ar)\right)=0\ \text{και}\ \lim_{r\to+\infty}\left(e^{-sr}\cos(ar)\right)=0,\quad \text{για κάθε}\ s>0, \tag{10.2.3}$$

επειδή είναι όρια γινομένου μηδενικής συνάρτησης, όπως είναι e^{-sr}, επί φραγμένης συνάρτησης, όπως είναι $\sin(ar)$, $\cos(ar)$.

Στην περίπτωση όπου $s<0$, τα όρια στη (10.2.3) απειρίζονται $(\pm\infty)$ και επομένως ο μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει.

Τελικά, αντικαθιστώντας από τη (10.2.3) στη (10.2.2) συμπεραίνουμε ότι

$$L\left(\sin(ax)\right)=\frac{a}{s^2+a^2},\quad \text{όταν}\ \ s>0.$$ ◊◊

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 10.2.1. αποδεικνύονται οι επόμενες σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίες είναι συνέπεια της ιδιότητας της γραμμικότητας και του ορισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος στη (10.2.1). Έναν πλήρη κατάλογο των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού με τις αποδείξεις τους ο αναγνώστης μπορεί να βρει στη βιβλιογραφία (Ασημάκης & Αδάμ, 2015; Μυλωνάς & Σχοινάς, 2015).

Πρόταση 10.2.3. i) Αν για τις συναρτήσεις f_1 και f_2 υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace $L\left(f_1(x)\right)$ και $L\left(f_2(x)\right)$, τότε για κάθε $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$L\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\right)=c_1L\left(f_1(x)\right)+c_2L\left(f_2(x)\right) \tag{10.2.4}$$

δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία γραμμική συνάρτηση.

ii) Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f, $L\left(f(x)\right)=F(s)$, τότε

$$L\left(f'(x)\right)=sL\left(f(x)\right)-f(0)=sF(s)-f(0) \tag{10.2.5}$$

$$L\left(f''(x)\right)=s^2L\left(f(x)\right)-sf(0)-f'(0)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \tag{10.2.6}$$

Γενικότερα,

$$L\left(f^{(n)}(x)\right)=s^nL\left(f(x)\right)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{10.2.7}$$

Με την εφαρμογή των ιδιοτήτων της Πρότασης 10.2.3 αναδεικνύεται η σημαντικότητα του μετασχηματισμού Laplace κυρίως στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, (βλέπε, Παραδείγματα 10.2.2.), επειδή μετασχηματίζουν τις συναρτήσεις-εισόδου f του μετασχηματισμού σε συναρτήσεις-εξόδου F και μετασχηματίζουν την παραγώγιση σε πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Έτσι, η επίλυση των σύνθετων αρχικών προβλημάτων ανάγεται σε επίλυση με αλγεβρικό τρόπο, με τον περιορισμό να μπορεί να οριστεί και η αντίστροφη πορεία εύρεσης της αρχικής συνάρτησης-εισόδου f. Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 10.2.4. Ονομάζουμε **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης-εξόδου F της πραγματικής μεταβλητής s, συμβολίζουμε $L^{-1}(F(s))$, εκείνη τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$L(f(x)) = F(s), \tag{10.2.8}$$

θεωρώντας τη x ως ανεξάρτητη μεταβλητή της f.

Επειδή το πρόβλημα ύπαρξης αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης-εξόδου F είναι αρκετά σύνθετο, στη συνέχεια θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση-εξόδου F, που δίνεται, υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση f, η οποία επαληθεύει τη (10.2.8).

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 10.2.4. και την Πρόταση 10.2.3.(i) αποδεικνύεται η ιδιότητα της γραμμικότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες για τις εφαρμογές, η οποία διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 10.2.5. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, δηλαδή, αν $F_1(s)$ και $F_2(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των αντίστοιχων συναρτήσεων f_1, f_2 και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$L^{-1}(c_1F_1(s) + c_2F_2(s)) = c_1L^{-1}(F_1(s)) + c_2L^{-1}(F_2(s)) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \tag{10.2.9}$$

Με τη βοήθεια του Ορισμού 10.2.1 και εργαζόμενοι όπως στην Εφαρμογή 10.2.2, αποκτούμε τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων μετασχηματισμού Laplace και του αντιστρόφου του, θεωρώντας δεδομένο ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης-εξόδου ορίζεται κατάλληλα για να υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

10.2.6. Πίνακας μετασχηματισμών Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων

	$f(x) = L^{-1}(F(s))$ $x \geq 0$	$L(f(x)) = F(s)$	Πεδίο ορισμού s
1.	c	$\frac{c}{s}$	$s > 0$
2.	x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	$\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$	$s > 0$
4.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$

5.	e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s>a$
6.	$\sin(ax)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
7.	$\cos(ax)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
8.	$\sinh(ax)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
10.	$\cosh(ax)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
11.	$x\sin(ax)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
12.	$x\cos(ax)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
13.	$e^{ax}\sin(bx)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
14.	$e^{ax}\cos(bx)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
15.	$x^n e^{ax}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
16.	$\sin(ax)-ax\cos(ax)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
17.	$u(x-a),\ a\in\mathbb{R}$ συνάρτηση βήματος	$\dfrac{1}{s}e^{-as}$	$s>0$

Τεκμηριώνοντας τον ισχυρισμό που διατυπώθηκε στην εισαγωγή της παρούσας ενότητας, κλείνουμε την ενότητα δίνοντας μία εφαρμογή, όπου αναπτύσσεται η μεθοδολογία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό της λύσης μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές. Η ιδιότητα της παραγώγου του μετασχηματισμού Laplace (βλέπε, Πρόταση 10.2.3(ii)), οι ιδιότητες της γραμμικότητας των μετασχηματισμών Laplace, (βλέπε, σχέσεις (10.2.4) και (10.2.9)) και οι τύποι των μετασχηματισμών Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων, (βλέπε, Πίνακα 10.2.6) είναι τα μοναδικά «εργαλεία» που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρική.

Εφαρμογή 10.2.7.

Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, να λυθούν οι ακόλουθες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

i) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=4e^{5x}$, όταν $y(0)=0$ και $y'(0)=2$.

ii) $y'''(x)+y'(x)=e^{x}$, όταν $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

Απόδειξη: i) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, θέτοντας $L\big(y(x)\big)=Y(s)$, και χρησιμοποιώντας από τη (10.2.4) την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace καθώς και τις ιδιότητες της παραγώγου από τις (10.2.5), (10.2.6), έχουμε:

$$L\left(y''(x)-3y'(x)+2y(x)\right)=L\left(4e^{5x}\right)\Rightarrow L\left(y''(x)\right)-3L\left(y'(x)\right)+2L\left(y(x)\right)=4L\left(e^{5x}\right)\Rightarrow$$
$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s)=4\frac{1}{s-5}$$
Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα και τις αρχικές συνθήκες, $y(0)=0$ και $y'(0)=2$, αποκτούμε:
$$s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=\frac{4}{s-5}+2\Rightarrow Y(s)\left(s^2-3s+2\right)=\frac{2s-6}{s-5}\Rightarrow Y(s)=\frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)},$$
από όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 10.2.4 έχουμε:
$$y(x)=L^{-1}\left(\frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)}\right) \tag{10.2.10}$$
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $Y(s)$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ανάλυση σε μερικά κλάσματα ως ακολούθως:
$$\frac{2s-6}{(s-5)(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-5}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$
Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει η ισότητα των πολυωνύμων
$$2s-6=\left(A+B+C\right)s^2+\left(-3A-7B-6C\right)s+2A+10B+5C,$$
και το σύστημα:
$$\left.\begin{array}{l}A+B+C=0\\ -3A-7B-6C=2\\ 2A+10B+5C=-6\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-1,\ C=\frac{2}{3} \tag{10.2.11}$$

Συνδυάζοντας τις (10.2.10), (10.2.11) με τη γραμμικότητα του L^{-1} στη (10.2.9) προκύπτει η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται από τη σχέση
$$y(x)=L^{-1}\left(\frac{1/3}{s-5}+\frac{-1}{s-1}+\frac{2/3}{s-2}\right)=\frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right),$$
όπου χρησιμοποιώντας την (5) του Πίνακα 10.2.6 για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, συμπεραίνουμε ότι η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:
$$y(x)=\frac{1}{3}e^{5x}-e^{x}+\frac{2}{3}e^{2x} \tag{10.2.12}$$

Παρατήρηση. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 8.3 οι διαφορικές εξισώσεις επιλύονται και σε προγραμματιστικό περιβάλλον χρησιμοποιώντας την εντολή `dsolve`. Επειδή η συμβολική εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στα λογισμικά Matlab και Octave, όταν αυτά είναι εφοδιασμένα με τα Symbolic πακέτα, η μερική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης υπολογίζεται με Matlab/Octave, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή `syms`, με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή `x` και η άγνωστη συνάρτηση `y`, καθώς και η εντολή `dsolve` με την οποία δηλώνεται η διαφορική εξίσωση με τις αρχικές συνθήκες, ως ακολούθως :

```
syms x y
[y]=dsolve('D2y-3*Dy+2*y=4*exp(5*x)','y(0)=0','Dy(0)=2','x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει:

```
y = exp(5*x)/3 - exp(x) + (2*exp(2*x))/3
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση που υπολογίστηκε στην (10.2.12).

ii) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace, τις ιδιότητες της παραγώγου από τις (10.2.5), (10.2.6), (10.2.7) και τις αρχικές συνθήκες $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, έχουμε:

$$L\big(y'''(x)\big)+L\big(y'(x)\big)=L(e^x)\Rightarrow$$
$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)\right]+\left[sY(s)-y(0)\right]=\frac{1}{s-1}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $Y(s)$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ανάλυση σε μερικά κλάσματα ως ακολούθως:

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}. \tag{10.2.13}$$

Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε

$$A=-1,\ B=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2},\ D=-\frac{1}{2}.$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω συντελεστές στη (10.2.13) και εφαρμόζοντας τη γραμμικότητα του L^{-1} στη (10.2.9) προκύπτει η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης, που δίνεται από τη σχέση:

$$y(x)=L^{-1}\big(Y(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{-1}{s}+\frac{1/2}{s-1}+\frac{(1/2)(s-1)}{s^2+1}\right)=-L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους στις (1), (5), (6) και (7) του Πίνακα 10.2.6 για τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace, συμπεραίνουμε ότι η (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x)=-1+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x) \tag{10.2.14}$$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave, τη συμβολική εντολή `syms` με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή `x` και η άγνωστη συνάρτηση `y`, καθώς και την εντολή `dsolve` με την οποία δηλώνεται η δοθείσα διαφορική εξίσωση με τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

```
syms x y
[y]=dsolve('D3y+Dy =exp(x)','y(0)=0','Dy(0)=0','D2y(0)=0','x')
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει

```
y = cos(x)/2 - sin(x)/2 -1 + (exp(x))/2
```

το οποίο επιβεβαιώνει τη λύση, που υπολογίστηκε στην (10.2.14). ◊◊

10.3. Μετασχηματισμός Laplace σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Οι δύο μετασχηματισμοί Laplace, που ορίστηκαν στους Ορισμούς 10.2.1. και 10.2.4., υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εντολές `laplace` για το μετασχηματισμό Laplace και `ilaplace` για τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave, Οδηγός Χρήσης Matlab).

Συγκεκριμένα, για το μετασχηματισμό Laplace μίας συνάρτησης f της ανεξάρτητης μεταβλητής x, χρησιμοποιείται η συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθούν η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και η πραγματική μεταβλητή της εξόδου s.

Για τον υπολογισμό του *μετασχηματισμού Laplace* μίας συνάρτησης f, η εντολή `laplace` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση `f`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.
- την πραγματική μεταβλητή της εξόδου `s`.

Σύνταξη εντολής: `laplace(f,x,s)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}\sin(2x)$ γράφουμε:

```
syms x s
f= exp(-x)*sin(2*x);
[F]= laplace(f,x,s)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
F = 2/((s + 1)^2 + 4)
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(F)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Για τον υπολογισμό του *αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace* μίας συνάρτησης F, η εντολή `ilaplace` δέχεται ως εισόδους:

- τη συνάρτηση εξόδου `F`.
- την πραγματική μεταβλητή της εξόδου `s`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.

Σύνταξη εντολής: `ilaplace(F,s,x)`

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ γράφουμε:

```
syms s x
F= s/(s^2 + 1)^2;
[f]= ilaplace(F,s,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
f = (x*sin(x))/2
```

Εκτελώντας την εντολή

```
pretty(f)
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού σε ρητή μορφή ως ακολούθως:

$$\frac{x\sin(x)}{2}$$

◊◊

10.4. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

10.4.1 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4}dx$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον Ορισμό 10.1.1. και το Παράδειγμα 10.1.2. (i).

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{4}$.

10.4.2 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_2=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{e^x+1}dx$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄-είδους, αντικαταστήστε $e^x=t$.
Μπορείτε να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2 συγκλίνει στο $\ln 2$.

10.4.3 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε $e^x=t$ και εφαρμόστε το Θεώρημα 10.1.4 και τη (10.1.5) για $s=0$.
Μπορείτε να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}$.

10.4.4 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_4=\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_4 συγκλίνει στο $3\sqrt[3]{3}$.

10.4.5 Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_5=\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄-είδους. Υπολογίστε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα ακολουθώντας τη μεθοδολογία της Εφαρμογής 7.2.3.

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_5 συγκλίνει στο $\frac{\pi}{2}$.

10.4.6 Να εξετάσετε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I_6=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^4}dx$ υπάρχει.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το δεύτερο κριτήριο σύγκρισης για τη συνάρτηση $g(x)=x^{-1}$, (βλέπε, Πρόταση 10.1.14).

Απάντηση: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_6 αποκλίνει.

10.4.7 Να εξετάσετε τη συμπεριφορά της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ ως προς τη σύγκλιση.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 10.1.16.

Απάντηση: Η σειρά συγκλίνει.

10.4.8 Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x)=\cos(ax)$, με $a\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον Ορισμό 10.2.1 και υπολογίστε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα ακολουθώντας τη μεθοδολογία της Εφαρμογής 10.2.2 (ii).

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός είναι: $L\left(\cos(ax)\right)=\frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$.

10.4.9 Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x)+y(x)=\sin(x)$, όταν $y(0)=1$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων του Πίνακα 10.2.6, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην Εφαρμογή 10.2.7.

Απάντηση: Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι : $y(x)=\frac{3}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ασημάκης, Ν. (2008). Σήματα, Συστήματα και Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Αθήνα: Gutenberg.

Ασημάκης, Ν., & Αδάμ, Μ. (2015). Σήματα και Συστήματα

Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (1999). Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών. Αθήνα: Παν. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μηχανικούς* (6 ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2005). Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Μυλωνάς, Ν., & Σχοινάς, Χ. (2015). Διαφορικές εξισώσεις, μετασχηματισμοί και μιγαδικές συναρτήσεις. Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1985). Ολοκληρωτικός λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση βελτ. τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Σαρρής, Ι., & Καρακασίδης, Θ. (2014). Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς (2η έκδοση ed.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.

Σιαφαρίκας, Π. Δ. (2014). Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (τεύχος 1ο). Πάτρα: Gotsis Εκδόσεις.

Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Τραχανάς, Σ. Λ. (2013). Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: ΠΕΚ (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from http://www.gnu.org/software/octave

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

10.1. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα, αν υπάρχουν. Σε περίπτωση σύγκλισης να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα της σύγκλισης αυτών, όπου είναι δυνατόν:

i) $\int_{-\infty}^{-4} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} dx$ ii) $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

iii) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

v) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin(x) dx$ vi) $\int_{-2}^{5} \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-4}} dx$

vii) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{-x-2}} dx$ viii) $\int_{0}^{2} \frac{1}{1-x^2} dx$

ix) $\int_{0}^{1} \frac{x-\sin(x)}{x^2} dx$ x) $\int_{0}^{1} \frac{\cos(2x)-1}{x^2} dx$

xi) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx$ xii) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.2. Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες συγκλίνουν (υπάρχουν) τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

i) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ ii) $\int_{a}^{b} \frac{1}{(b-x)^p} dx$ iii) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^p} dx$

10.3. Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν. Σε περίπτωση σύγκλισης να βρεθούν άνω και κάτω φράγματα της σύγκλισης αυτών:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+6}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4 e^n}$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Matlab/Octave στη μελέτη σας.

10.4. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 e^{2x} + 3(1-x)^2$ ii) $f(x) = xe^{3x} - 2x\cos(x) - 5x^2\sin(2x)$

iii) $f(x) = \cos(2x-4) + \frac{1}{e^x}\cos(2x)$ iv) $f(x) = 5e^{2x} - 3x + 4\sin(x-7)$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.5. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$ ii) $F(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+4}$

iii) $F(s) = \frac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)}$ iv) $F(s) = \frac{1}{s^2(s+9)}$

iv) $F(s) = \frac{2s-1}{s^2+6s+1}$ v) $F(s) = \frac{s^2+1}{s^3+s^2-s}$

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

10.6. Αν με $y(x)$ σημειώνεται η άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, να επιλυθούν οι ακόλουθες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και στη συνέχεια να επαληθευτούν με Matlab/Octave:

i) $y''(x) + 4y(x) = 0$, με $y(0) = y'(0) = 2$

ii) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x$, με $y(0) = y'(0) = 0$

iii) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{5x}$, με $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

iv) $y''(x) - y(x) = 2\cos(x)$, με $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

v) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3xe^{-x}$, με $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$

vi) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{-x}$, με $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$