ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

…Δεν υπάρχει πρόβλημα που δεν μπορεί να επιλυθεί.

François Viète (1540 - 1603)

…Υπάρχει το πρόβλημα, αναζητήστε τη λύση του, η ορθότητα των προτάσεων είναι αδύνατον να μην μπορεί να ανακαλυφθεί, γιατί στα μαθηματικά δεν υπάρχει ignorabimus.

…Η κοινότητα των Μαθηματικών είναι σύμφυτη με τη φύση αυτής της επιστήμης, γιατί τα μαθηματικά είναι η βάση (το θεμέλιο) όλης της γνώσης των φυσικών φαινομένων. Δηλαδή, αυτό μπορεί να εκπληρώσει πλήρως αυτήν την υψηλή αποστολή, μπορεί ο νέος αιώνας να φέρει masters, πολύ ζήλο και ενθουσιασμό σε νέους μαθητές.

David Hilbert (1862 - 1943)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται όλοι οι ορισμοί, οι ιδιότητες και οι πράξεις που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες πραγματικών συναρτήσεων, όπως είναι οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές καθώς και οι αντίστροφες συναρτήσεις αυτών και αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητές τους.

1.1 Συναρτήσεις

Ο κόσμος ολόκληρος είναι γεμάτος από σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και η θεμελιώδης έννοια-εργαλείο για την κατανόηση αυτών των σχέσεων είναι εκείνη της *συνάρτησης*. Στη Μηχανική, λέμε ότι, η *ταχύτητα* $v(t)$, η *επιτάχυνση* $a(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου t, ή είναι συναρτήσεις της θέσης x και γράφουμε $v(x)$ και $a(x)$, αντίστοιχα. Στην επεξεργασία σήματος, το *πλάτος ενός πραγματικού σήματος* $x(t)$ είναι συνάρτηση του συνεχούς χρόνου t. Στα ηλεκτρικά κυκλώματα, λέμε ότι, η *τάση του ρεύματος* $V(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου, η *ένταση του ρεύματος* $I(R)$ είναι συνάρτηση της αντίστασης R. Στην Οικονομία, η *συνάρτηση της ζήτησης* $D(p)$ και *της προσφοράς* $S(p)$ είναι συναρτήσεις της τιμής p του προϊόντος, κλπ.

Ορισμός 1.1.1. Μία **συνάρτηση** (function) f από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B είναι ένας κανόνας f, που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο x του συνόλου A ακριβώς σε ένα και μόνο ένα στοιχείο y του συνόλου B, και συμβολίζεται $f: A \to B$.
Το στοιχείο x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** (independent variable) ή **πρότυπο** και το στοιχείο y, που αντιστοιχεί στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή **εικόνα του** x και συμβολίζεται ως $f(x)$.
Το σύνολο A όλων των x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** (domain of definition) της f και το σύνολο B όλων των εικόνων $f(x)$ **πεδίο τιμών** (domain of range) της f.
Το **σύνολο τιμών** (set of range) της συνάρτησης $f: A \to B$ είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ y \in B : \text{ υπάρχει } x \in A, \text{ ώστε } y = f(x) \} = \{ f(x) : x \in A \}. \tag{1.1.1}$$

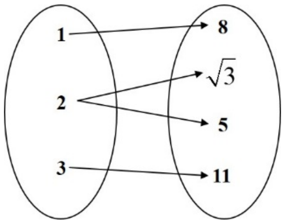
Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B διαβάζεται «συνάρτηση από το A στο B». Στη συνέχεια, τα σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και γι΄αυτό θα αναφερόμαστε στην **πραγματική συνάρτηση** f της **πραγματικής μεταβλητής** x.
Επιπλέον, αν δεν ενδιαφέρει ο ακριβής υπολογισμός του συνόλου τιμών της f γράφουμε ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μία συνάρτηση f είναι γνωστή, όταν ο τύπος (κανόνας) που δίνει την εικόνα $f(x)$ είναι γνωστός. Πολλές φορές για λόγους απλότητας ταυτίζουμε, στο προφορικό αλλά και στο γραπτό λόγο, την έννοια της συνάρτησης f με τον τύπο της $f(x)$, λέγοντας ότι «δίνεται η συνάρτηση $f(x)$» ενώ το ορθό είναι «δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)$».
Επίσης στη βιβλιογραφία, ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιείται και ως «απεικόνιση», στη συνέχεια χρησιμοποιείται μόνο ο όρος «συνάρτηση».

Παραδείγματα 1.1.2.

i) Έστω τα σύνολα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{\sqrt{3},5,8,11\}$. Η αντιστοιχία $1\to 5,\ 2\to\sqrt{3},\ 3\to 11$ μπορεί να αποτελεί μία συνάρτηση f από το A στο B, όπου $f(1)=5, f(2)=\sqrt{3}$ και $f(3)=11$ με πεδίο τιμών το σύνολο B και σύνολο τιμών το $f(A)=\{\sqrt{3},5,11\}$.

Ενώ, η αντιστοιχία



δεν αποτελεί συνάρτηση, αφού στην πραγματική τιμή 2 αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές $\sqrt{3}$ και 5, δηλαδή, $f(2)=\sqrt{3}$ και $f(2)=5$.

ii) Αν $A=\{-3,0,2,4\}$ και $B=\{-5,2,3,6,8\}$, η αντιστοιχία $f(-3)=3, f(0)=2$, $f(2)=3$ και $f(4)=6$, όπως και η αντιστοιχία $g(-3)=g(0)=g(2)=6$ και $g(4)=8$ αποτελούν συναρτήσεις από το σύνολο A στο σύνολο B. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=\{2,3,6\}$ και της g είναι το $g(A)=\{6,8\}$, ενώ το πεδίο τιμών τους είναι το B.

iii) Έστω $c\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **σταθερή συνάρτηση** (constant function) με σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{c\}$. Στην περίπτωση που $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η σταθερή συνάρτηση ονομάζεται **μηδενική**.

iv) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f:A\to A$ με $f(x)=x$, για κάθε $x\in A$, ονομάζεται **ταυτοτική συνάρτηση** (identity function) στο σύνολο A και συμβολίζεται με I_A. Έτσι, $I_A(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

v) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ έχει σύνολο τιμών τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή το $[0,+\infty)$.

Γενικότερα, μία συνάρτηση f, η οποία ορίζεται με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου, δηλαδή, ο τύπος είναι $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, όπου $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$, ονομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση *n* βαθμού** έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Ειδικότερα, η πρώτου ($n=1$) βαθμού συνάρτηση $f(x)=a_1x+a_0$, όπου $a_1,a_0\in\mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμική**.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=3x^2-5x+7$, $g(x)=x^3-3x+2$, $h(x)=3x-5$, και $z(x)=-\frac{2}{3}x^0=-\frac{2}{3}$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις δευτέρου ($n=2$), τρίτου ($n=3$), πρώτου ($n=1$) και μηδενικού ($n=0$) βαθμού, αντίστοιχα.

vi) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a\neq 0$. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{a}{x}$ έχει πεδίο ορισμού όλους τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς, ώστε η εικόνα $f(x)$ να ορίζεται, δηλαδή, να είναι πραγματικός αριθμός (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.14. (iv)).

Γενικότερα, μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ της οποίας ο τύπος δίνεται ως πηλίκο πολυωνύμων,

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ και $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$, με $a_i,b_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,m$, ονομάζεται **ρητή συνάρτηση** κι έχει πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός των ριζών του $Q(x)$, δηλαδή

$$A=\{x\in\mathbb{R}:Q(x)\neq 0\}. \tag{1.1.2}$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μία ρητή συνάρτηση, οπότε από (1.1.2) είναι φανερό ότι έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Επίσης, η ρητή συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$, επειδή οι ρίζες του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι 2 και 3. Εδώ να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού μπορεί να γραφεί κι ως ένωση διαστημάτων: $\mathbb{R}-\{2,3\}=(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

vii) Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού

$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 2\}=[2,+\infty),$$

επειδή η τετραγωνική ρίζα (και κάθε άρτιας τάξης ρίζα) έχει νόημα μόνο για μη αρνητικές ποσότητες.

Η συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sqrt[3]{x-2}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x, δηλαδή, $A=\mathbb{R}$.

viii) Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x+7}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ ορίζεται για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής και έχει νόημα το ριζικό, δηλαδή,

$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-5x+6>0\}=\{x\in\mathbb{R}:\ (x-2)(x-3)>0\}=(-\infty,2)\cup(3,+\infty).$$

Η συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{x^3-4}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, δηλαδή, $A=\mathbb{R}$, επειδή ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό (παρατηρήστε ότι το x^2-x+1 έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$ και η υπόρριζη ποσότητα x^2-x+1 είναι πάντοτε θετική, επειδή είναι ομόσημη του συντελεστή του x^2).

ix) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet**, όπου $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. ◊◊

Ορισμός 1.1.3. Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** ή **αμφιμονότιμη** (injective), όταν σε διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής $x\in A$ αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή, όταν για κάθε $x_1,x_2\in A$ ισχύει

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

Παρατήρηση 1.1.4. i) Από τον προτασιακό λογισμό γνωρίζουμε ότι για δύο λογικές προτάσεις p,q, η πρόταση « $p\Rightarrow q$ » είναι ισοδύναμη με την πρόταση « όχι $q\Rightarrow$ όχι p ».

Θεωρώντας ως πρόταση p : έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ και πρόταση q : $f(x_1)\neq f(x_2)$, η σχέση στον Ορισμό 1.1.3 είναι ισοδύναμη με

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \tag{1.1.3}$$

Επομένως, μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη όταν για τυχαία $x_1,x_2\in A$ επαληθεύεται η συνεπαγωγή στην (1.1.3).

ii) Γεωμετρικά καταλαβαίνουμε ότι μία συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, όταν οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον $x'0x$ τέμνει την καμπύλη της συνάρτησης σε ένα μόνο σημείο.

Παραδείγματα 1.1.5.

i) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x+3$ **είναι** αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

ii) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ **δεν** είναι αμφιμονοσήμαντη, επειδή υπάρχουν, τουλάχιστον δύο διαφορετικά $x_1=5$ και $x_2=-5$ με $f(5)=25=f(-5)$ κι επομένως δεν ισχύει ο Ορισμός 1.1.3.

iii) Η συνάρτηση

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν $x_1,x_2\geq 2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε $x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$, το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

Αν $x_1,x_2<2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε $2-x_1=2-x_2\Rightarrow x_1=x_2$, το οποίο επαληθεύει την (1.1.3).

Τέλος, αν $x_1\geq 2$ και $x_2<2$, (άρα, $x_1\neq x_2$) είναι φανερό ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$, το οποίο επαληθεύει τη σχέση στον Ορισμό 1.1.3.

Επομένως, σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, αποδεικνύεται ότι σε διαφορετικά x αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες $f(x)$. ◊◊

Ορισμός 1.1.6. Μία συνάρτηση $f:A\to B$ ονομάζεται **επί** (surjective) **του *B***, όταν το σύνολο τιμών της ταυτίζεται με το σύνολο *B*, δηλαδή, όταν ισχύει $f(A)=B$.
Ισοδύναμα, μία συνάρτηση $f:A\to B$ είναι **επί του *B***, όταν κάθε στοιχείο του συνόλου *B* είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου από το σύνολο *A*, δηλαδή, όταν για κάθε $y\in B$ υπάρχει $x\in A$, τέτοιο ώστε $f(x)=y$.

Παραδείγματα 1.1.7.

i) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ με $f(x)=x^2$ είναι **επί του** συνόλου $B=[0,+\infty)$, αφού κάθε θετικός αριθμός a είναι εικόνα μέσω της f του $\sqrt{a}$, δηλαδή, $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$.

Ενώ, αν ο ίδιος τύπος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ δίνονταν ως $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τότε αυτή **δεν** είναι **επί του** $\mathbb{R}$. Πράγματι, ένας οποιοσδήποτε αρνητικός αριθμός, για παράδειγμα ο $y=-2$ δεν αποτελεί εικόνα κανενός πραγματικού αριθμού μέσω της $f(x)=x^2$, επομένως στη περίπτωση αυτή $f(\mathbb{R})\neq\mathbb{R}$ και η f **δεν** είναι **επί**.

ii) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax+b$ είναι επί του $\mathbb{R}$.

Πράγματι, για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x=\dfrac{y-b}{a}\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x)=f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)=y$. Έτσι, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και η συνάρτηση είναι επί του $\mathbb{R}$. ◊◊

Ορισμός 1.1.8. Μία συνάρτηση $f:A\to B$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του *B* ονομάζεται **ένα προς ένα**.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ένα προς ένα γράφουμε ότι η f είναι **1-1** (one-to-one).

Παραδείγματα 1.1.9.

i) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x+3$ είναι 1-1 (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.5 (i) και Παράδειγμα 1.1.7 (ii)).

Γενικότερα, κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x)=ax+b$ είναι 1-1.

ii) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, όπου $\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**, $\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών αριθμών**, και για $m\in\mathbb{Z}$ η συνάρτηση ορίζεται

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{αν} \quad m=0\\ 2m, & \text{αν} \quad m>0\\ -2m+1, & \text{αν} \quad m<0\end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι **επί** του συνόλου $\mathbb{N}$, δηλαδή, $f(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$, επειδή για κάθε $x\in\mathbb{N}$ έχουμε:

- αν $x=2n$, υπάρχει $n\in\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f(n)=2n=x$,
- αν $x=2n+1$, υπάρχει $-n\in\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f(-n)=2n+1=x$.

Επειδή η f είναι γραμμική, σύμφωνα με το (i) η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, επομένως είναι μία 1-1 συνάρτηση.

iii) Αν μία συνάρτηση $f:A\to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η συνάρτηση

$$f:A\to f\left(A\right)$$

είναι μία 1-1 συνάρτηση.

Στο Παράδειγμα 1.1.2. (i) η αντιστοιχία $1\to 5,\ 2\to\sqrt{3},\ 3\to 11$, ορίζει μία συνάρτηση f, που είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με $f\left(A\right)=\left\{5,\sqrt{3},11\right\}$. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$f:\{1,2,3\}\to\left\{\sqrt{3},5,11\right\}$$

είναι 1-1. ◊◊

Οι συναρτήσεις μεταξύ δύο συνόλων *A* και *B*, όταν είναι είτε αμφιμονοσήμαντες είτε επί μας δίνουν τη δυνατότητα να «*μετρήσουμε*» ποιο από τα δύο σύνολα έχει περισσότερα στοιχεία. Το πλήθος στοιχείων ενός συνόλου *A* λέγεται **πληθικός αριθμός** του *A* και συμβολίζεται με $|A|$. Όταν μία συνάρτηση $f:A\to B$ είναι 1-1, τότε τα σύνολα *A* και *B* ονομάζονται **ισοπληθή** και σημειώνεται $|A|=|B|$.

Στο Παράδειγμα 1.1.9 (ii) τα σύνολα των ακέραιων και φυσικών αριθμών είναι ισοπληθή, δηλαδή $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$, εφόσον υπάρχει μία 1-1 συνάρτηση μεταξύ τους. Κάθε σύνολο *A* το οποίο είναι ισοπληθές με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών λέγεται **αριθμήσιμο**.

Από το Παράδειγμα 1.1.9 (iii), όταν $f:A\to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε $|A|=\left|f\left(A\right)\right|$, επομένως, $|A|=\left|f\left(A\right)\right|\le|B|$. Ενώ, όταν η συνάρτηση $f:A\to B$ είναι επί του *B*, τότε $|A|\ge|B|$, εφόσον κάθε στοιχείο του *B* είναι η εικόνα τουλάχιστον ενός στοιχείου από το σύνολο *A*.

Ορισμός 1.1.10. Για δύο στοιχεία *α*, *b* (για παράδειγμα $a,b\in\mathbb{R}$) ορίζουμε το σύνολο $\left\{a,\left\{a,b\right\}\right\}$ ως το **διατεταγμένο ζεύγος** $\left(a,b\right)$, δηλαδή,

$$\left(a,b\right)=\left\{a,\left\{a,b\right\}\right\}.$$

Δηλαδή, το διατεταγμένο ζεύγος $\left(a,b\right)$ είναι ένα ζεύγος στοιχείων *α*, *b*, όπου έχουμε καθορίσει (διατάξει) ποιο στοιχείο θα γραφεί πρώτο και ποιο θα γραφεί δεύτερο. Προφανώς, το διατεταγμένο ζεύγος $\left(a,b\right)$ είναι διαφορετικό από το $\left(b,a\right)$, επειδή τα σύνολα $\left\{a,\left\{a,b\right\}\right\}$ και $\left\{b,\left\{a,b\right\}\right\}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, (εκτός αν $a=b$).

Ορισμός 1.1.11. Έστω A και B είναι δύο μη κενά σύνολα. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a,b) με $a\in A$ και $b\in B$ ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο** των συνόλων A και B και συμβολίζεται με $A\times B$. Δηλαδή,

$$A\times B=\{(a,b):\ a\in A \ \text{ και } \ b\in B\}.$$

Παράδειγμα 1.1.12. Έστω $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$ είναι

$$A\times B=\{(a,1),\ (a,2),\ (b,1),\ (b,2),\ (c,1),\ (c,2)\}.$$

Ενώ, το καρτεσιανό γινόμενο $B\times A$ είναι

$$B\times A=\{(1,a),\ (1,b),\ (1,c),\ (2,a),\ (2,b),\ (2,c)\}.$$

Εδώ παρατηρήστε ότι, $B\times A\neq A\times B$, δηλαδή, **δεν** ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα** στο καρτεσιανό γινόμενο κι επομένως, στο καρτεσιανό γινόμενο παίζει καθοριστικό ρόλο ποιο σύνολο γράφεται πρώτο και ποιο δεύτερο.

Επίσης, μπορούμε να δημιουργήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A\times A$ για κάθε μη κενό σύνολο A. Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα ορίζονται τα ακόλουθα καρτεσιανά γινόμενα

$$A\times A=\{(a,a),\ (a,b),\ (b,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,b),\ (c,c)\},$$

$$B\times B=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}.$$

Επιπλέον, αν $|A|=m$ και $|B|=n$, τότε $|A\times B|=mn$, (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.12), εφόσον τόσοι είναι και οι τρόποι να συνδυαστούν τα m-στοιχεία του A με τα n-στοιχεία του B. ◊◊

Ορισμός 1.1.13. Έστω A και B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f:A\to B$. Το σύνολο

$$G_f=\{(x,f(x)):x\in A\}\subseteq A\times B$$

ονομάζεται **γράφημα** ή **γραφική παράσταση** της f.

Η γραφική παράσταση G_f της f είναι το σύνολο των σημείων $M(x,y)=(x,f(x))$ πάνω στο επίπεδο $x0y$, το οποίο ορίζεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, το γράφημα G_f της f είναι το σύνολο σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου $x0y$ που ικανοποιούν την εξίσωση $y=f(x)$ και συναποτελούν μία καμπύλη γραμμή επί του επιπέδου.

Παραδείγματα 1.1.14.

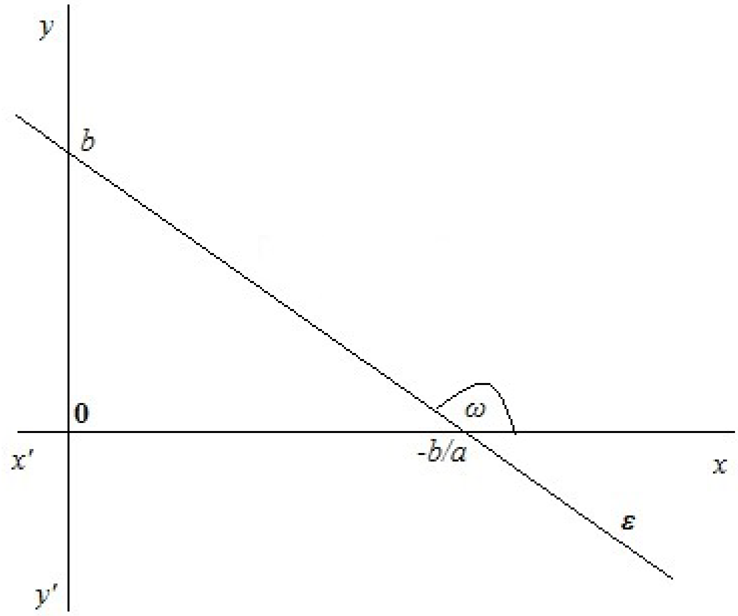
i) Η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που ικανοποιούν την εξίσωση $y=ax+b$, τα οποία συναποτελούν μία ευθεία γραμμή ε, (βλέπε, Σχήμα 1.1). Η ευθεία ε

- τέμνει τον άξονα $x'0x$ στο σημείο $A\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$
- τέμνει τον άξονα $y'0y$ στο σημείο $B(0,b)$
- Αν $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ δύο τυχαία σημεία επί της ε, τότε ισχύει

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a.$$

Ο αριθμός α λέγεται **κλίση** (slope) ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας ε και ταυτίζεται με τον τριγωνομετρικό αριθμό της εφαπτομένης $\tan(\omega)$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'0x$ κατά τη θετική φορά γραφής (δηλαδή, την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού).

Αν $a=0$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=b$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'0x$, με εξίσωση $y=b$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'0y$ στο σημείο $(0,b)$.



Σχήμα 1.1: Η ευθεία **ε** είναι η γραφική παράσταση της $f(x)=ax+b$.

ii) Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$, με $a\neq 0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι μία **παραβολή**, (βλέπε, Σχήμα 1.2 - 1.3).

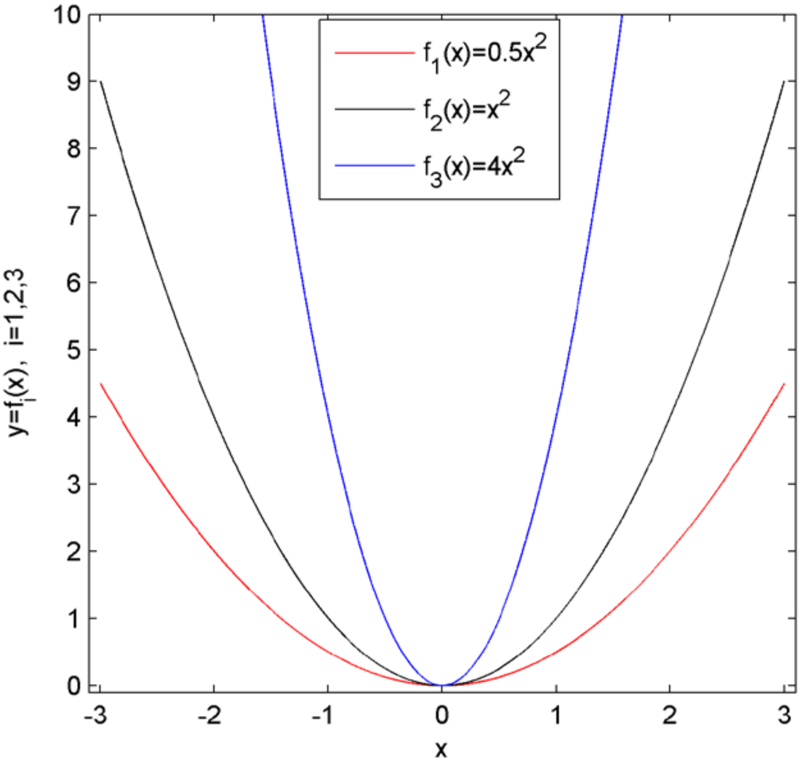
- Η παραβολή τέμνει τον άξονα $y'0y$ στο σημείο $A(0,c)$.

  Αν υπάρχουν κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα $x'0x$ εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta=b^2-4ac$.

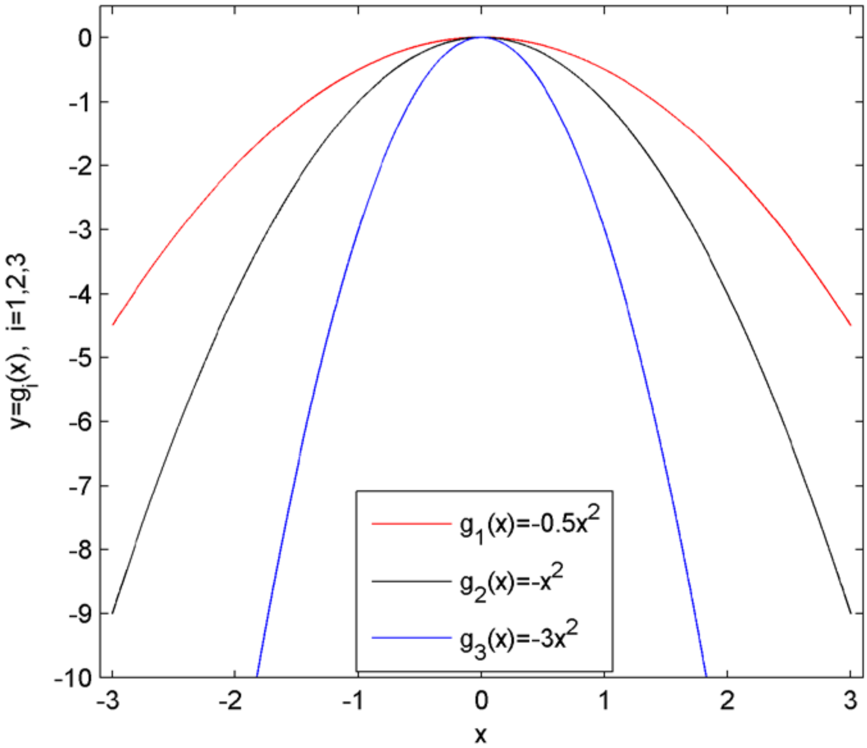
  - Αν $\Delta>0$, τότε η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'0x$ στα σημεία $X_1\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$ και $X_2\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$.
  - Αν $\Delta=0$, τότε η παραβολή εφάπτεται στον άξονα $x'0x$ στο σημείο $X\left(\frac{-b}{2a},0\right)$.
  - Αν $\Delta<0$, η παραβολή δεν τέμνει τον άξονα $x'0x$.

- Η κορυφή της καμπύλης βρίσκεται στο σημείο $C\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$.
- Η κυρτότητα της παραβολής εξαρτάται από το πρόσημο του a. Όταν $a>0$, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή), (βλέπε, Σχήμα 1.2), ενώ όταν $a<0$, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη), (βλέπε, Σχήμα 1.3).
- Η καμπυλότητα της παραβολής εξαρτάται από το πρόσημο και το μέτρο του a. Για $a>0$ και με το μέτρο του a να αυξάνει, οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών $f_1(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f_2(x)=x^2$ και $f_3(x)=4x^2$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.2, (για το σχεδιασμό βλέπε `function parabola`). Για

$a < 0$ και με το μέτρο του a να αυξάνει, οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών $g_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = -x^2$ και $g_3(x) = -3x^2$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.3.

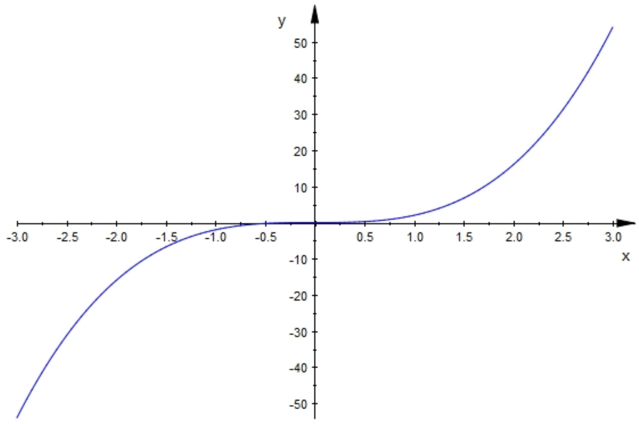


Σχήμα 1.2: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2(x) = x^2$ και $f_3(x) = 4x^2$

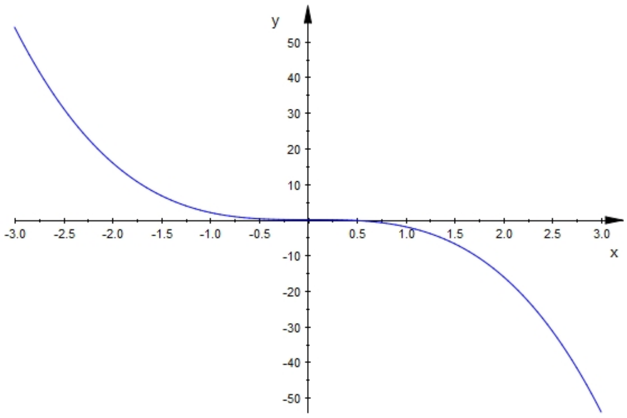


Σχήμα 1.3: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g_1(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = -x^2$ και $g_3(x) = -3x^2$.

iii) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 0$. Στο Σχήμα 1.4 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3$, για θετικές και αρνητικές τιμές του $a \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Στο Σχήμα 1.4(α) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3$, ($a > 0$), όταν $x \in [-3,3]$, και στο Σχήμα 1.4(b) η γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^3$, ($a < 0$).



(α) : για $a > 0$

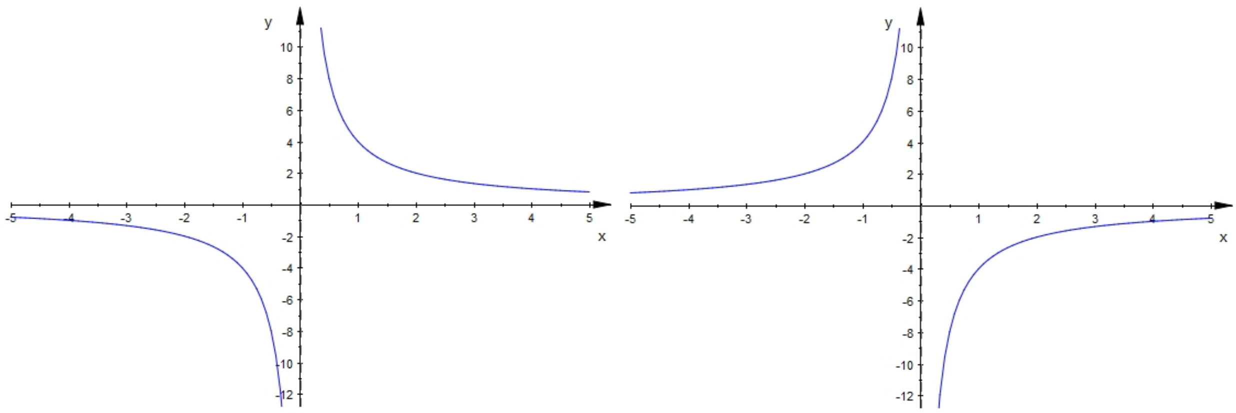


(b) για $a < 0$

Σχήμα 1.4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3$.

iv) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 0$. Στο Σχήμα 1.5 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$, για θετικές και αρνητικές τιμές του $a \neq 0$ και $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.2 (vi)).

Η γραφική παράσταση αποτελείται από τους δύο κλάδους **ισοσκελούς υπερβολής** και εξαρτάται από το a. Στο Σχήμα 1.5(α) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{4}{x}$, ($a > 0$), όταν $x \in [-5,5]$, ενώ στο Σχήμα 1.5(b) η γραφική παράσταση της $f(x) = -\frac{4}{x}$, ($a < 0$).



(α) : για $a > 0$ (b) για $a < 0$

Σχήμα 1.5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$.

◊◊

1.2. Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Σύνθετη και αντίστροφη συνάρτηση

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις πράξεις *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο*, *πηλίκο* και *σύνθεση* μεταξύ συναρτήσεων, με τη βοήθεια των οποίων είτε παράγουμε νέες συναρτήσεις, είτε «αναλύουμε» πολύπλοκες συναρτήσεις σε επιμέρους απλούστερες συναρτήσεις.

Αρχικά διατυπώνουμε τον ορισμό ισότητας ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις.

Ορισμός 1.2.1. Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι **ίσες** αν
i) $A = B$, και
ii) $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.
Συμβολίζουμε την ισότητα με $f = g$.

Ορισμός 1.2.2. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \to C$ και $g : B \to C$ με $B \subset A$. Η συνάρτηση f ονομάζεται **επέκταση** (extension) της g στο *A*, ή η συνάρτηση g ονομάζεται **περιορισμός** (restriction) της f στο *B*, αν ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in B$ και συμβολίζεται $f\big|_B = g$.

Ορισμός 1.2.3. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $A \cap B \neq \varnothing$.
i) Η συνάρτηση $h : A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in A \cap B$ ονομάζεται **άθροισμα των συναρτήσεων** *f* και *g* και συμβολίζεται με $f + g$.
ii) Η συνάρτηση $h : A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, για κάθε $x \in A \cap B$ ονομάζεται **γινόμενο των συναρτήσεων** f και *g* και συμβολίζεται με $f \cdot g$.
iii) Αν $c \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $h : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = c\, f(x)$, για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **γινόμενο του αριθμού** *c* **επί τη συνάρτηση** f και συμβολίζεται $c \cdot f$.
iv) Έστω $C = \{x \in B : \ g(x) \neq 0\}$ και $D = A \cap B \cap C$. Η συνάρτηση $h : D \to \mathbb{R}$, με τύπο $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, για κάθε $x \in D$ ονομάζεται **πηλίκο των συναρτήσεων** *f* και *g* και συμβολίζεται με $\dfrac{f}{g}$.

Παραδείγματα 1.2.4.

i) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε

$$\big(f + g\big)(x) = x^2 - 3 + \sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} - 3, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

ii) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\big(f \cdot g\big)(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \in [1, +\infty)$, και $g(x) = x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-5}, \text{ για κάθε } x \in \big[1, 5\big) \cup \big(5, +\infty\big).$$

iv) Έστω $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\big(2\,f\big)(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 8, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

◊◊

Παρατηρήσεις 1.2.5.

i) Οι πράξεις μεταξύ δύο συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ έχουν νόημα μόνο όταν $A\cap B\neq\varnothing$, ώστε να μπορούν να ορίζονται και οι δύο σε ένα κοινό σύνολο, το $A\cap B$ (ή σε ένα υποσύνολο της τομής).

ii) Όπως ορίζεται το άθροισμα και το γινόμενο μεταξύ δύο συναρτήσεων, με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το άθροισμα και το γινόμενο ανάμεσα σε *n*-συναρτήσεις.
Έστω $f_i:A_i\to\mathbb{R}$, $A_i\subseteq\mathbb{R}, i=1,2,\dots,n$ ως εξής: αν $A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$, τότε

$$\left(f_1+f_2+\cdots+f_n\right)(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x),\ \text{για κάθε } x\in A,$$

$$\left(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\right)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x),\ \text{για κάθε } x\in A.$$

iii) Μία ρητή συνάρτηση είναι πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων (βλέπε, Παραδείγματα 1.1.2 (v) και (vi)). ◊◊

Ορισμός 1.2.6. Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to B$ και $g:C\to D$, όπου $f(A)\subseteq C$.

Η συνάρτηση $h:A\to D$, για την οποία ισχύει

$$h:A\xrightarrow{f}f(A)\xrightarrow{g}D,$$

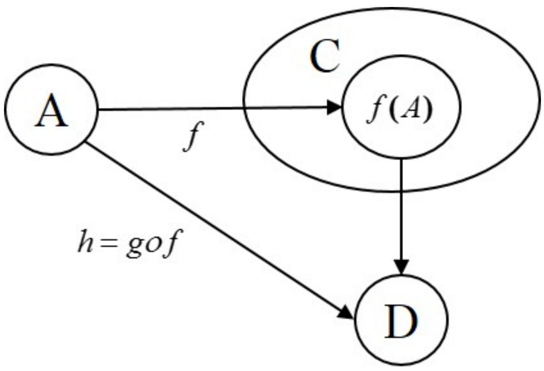
έτσι ώστε

$$x\xrightarrow{f}f(x)=y\xrightarrow{g}z=g(y)=g\left(f(x)\right)=h(x),$$

ονομάζεται **σύνθετη συνάρτηση** ή **σύνθεση** (composition) **των συναρτήσεων** f και g και συμβολίζεται με $g\circ f$, (βλέπε, Σχήμα 1.6).

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων αποτελεί μία πράξη μεταξύ τους. Η συνθήκη $f(A)\subseteq C$ δείχνει αναγκαία προκειμένου να γίνει το «πέρασμα» από το σύνολο $f(A)$ στο σύνολο D μέσω της συνάρτησης g, (βλέπε, Παραδείγματα 1.2.7 (i) και (ii)).

Όπως διαπιστώνουμε από το Παράδειγμα 1.2.7 (iii), όταν ισχύει η *γενικότερη συνθήκη* $f(A)\cap C\neq\varnothing$, μπορεί να οριστεί η σύνθεση $g\circ f$ των συναρτήσεων f και g, αρκεί από την απαίτηση $f(A)\subseteq C$ να καθοριστεί το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης, το οποίο είναι γενικά υποσύνολο του A (του πεδίου ορισμού της f).



Σχήμα 1.6: Η σύνθετη συνάρτηση $h=g\circ f$.

Τέλος, ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στη σειρά γραφής της σύνθεσης των συναρτήσεων, μία και έχει σημασία ποια συνάρτηση γράφουμε πρώτη και ποια δεύτερη, επειδή η πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων **δεν επαληθεύει** την **αντιμεταθετική ιδιότητα**, όπως επαληθεύεται στο Παράδειγμα 1.2.7 (iv).

Παραδείγματα 1.2.7.

i) Έστω τα σύνολα $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5\}$, $C=\{0,1,2,3,5,6\}$ και $D=\{1,2,3,4,5,10,26,37,40\}$ και οι συναρτήσεις

$$f:A\to B,\ \text{με } f(x)=x-1,\ x\in A,\ \text{και } g:C\to D,\ \text{με } g(x)=x^2+1,\ x\in C.$$

Επειδή
$$f(A)\cap C=\{0,1,2,3\}\cap\{0,1,2,3,5,6\}=\{0,1,2,3\}\subseteq C,$$
δημιουργούμε τη σύνθετη συνάρτηση $g\circ f:A\to D$ με τύπο
$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(x-1)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2,\quad x\in A.$$

ii) Έστω οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x^2+1$, και $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $g(x)=\sqrt{x}$. Επειδή $x^2\geq 0\Rightarrow f(x)=x^2+1\geq 1$, είναι φανερό ότι $f(\mathbb{R})=[1,+\infty)$, από όπου προκύπτει $f(\mathbb{R})\cap[0,+\infty)=[1,+\infty)$. Η σύνθεση $g\circ f$ των συναρτήσεων f και g ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ως ακολούθως
$$x\xrightarrow{f}f(x)=x^2+1\xrightarrow{g}g\big(f(x)\big)=g(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}.$$
Συνεπώς, η σύνθετη συνάρτηση $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει τύπο
$$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2+1}.$$

iii) Έστω οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x-1$, και $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $g(x)=\sqrt{x}$. Επειδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, είναι φανερό ότι η προϋπόθεση του εγκλεισμού του συνόλου τιμών της f στο πεδίο ορισμού της g, δεν επαληθεύεται. Επειδή $f(A)\cap[0,+\infty)\neq\varnothing$, για να οριστεί η σύνθεση $g\circ f$, πρέπει να υπολογιστεί κατάλληλο πεδίο ορισμού A της f, ώστε $f(A)\subseteq[0,+\infty)$. Από την τελευταία απαίτηση έχουμε $f(x)=x-1\geq 0$, ή ισοδύναμα $x\geq 1$.

Επομένως, η σύνθετη συνάρτηση $g\circ f$ ορίζεται μόνο για $x\in[1,+\infty)$, και όχι στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ της f, οπότε έχουμε
$$[1,+\infty)\xrightarrow{f}[0,+\infty)\xrightarrow{g}\mathbb{R}.$$
Η σύνθεση $g\circ f$ των συναρτήσεων f και g ορίζεται για κάθε $x\in[1,+\infty)\subset\mathbb{R}$, ως ακολούθως
$$x\xrightarrow{f}f(x)=x-1\xrightarrow{g}g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1}.$$
Συνεπώς, η σύνθετη συνάρτηση $g\circ f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο
$$(g\circ f)(x)=\sqrt{x-1}.$$
Παρατηρήστε ότι, η απαίτηση ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $g\circ f$ καθόρισε το πεδίο ορισμού της να είναι το $[1,+\infty)\subset\mathbb{R}$.

iv) Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)=2x-1$, και $g(x)=x^2+3x-1$. Θα ορίσουμε (αν αυτό είναι δυνατό) τις σύνθετες συναρτήσεις $g\circ f$, $f\circ g$ και $f\circ f$.

Επειδή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, (ως πολυωνυμικές) για τη σύνθετη συνάρτηση $g\circ f$ έχουμε
$$x\xrightarrow{f}f(x)=2x-1\xrightarrow{g}g(f(x))=g(2x-1)=(2x-1)^2+3(2x-1)-1=4x^2+2x-3.$$
Δηλαδή, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $(g\circ f)(x)=4x^2+2x-3$.

Για τη σύνθετη συνάρτηση $f\circ g$ έχουμε
$$x\xrightarrow{g}g(x)=x^2+3x-1\xrightarrow{f}f(g(x))=f(x^2+3x-1)=2\big(x^2+3x-1\big)-1=2x^2+6x-3.$$
Δηλαδή, $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $(f\circ g)(x)=2x^2+6x-3$.

Από τους παραπάνω τύπους των σύνθετων συναρτήσεων $g\circ f$, $f\circ g$ είναι φανερό ότι ο Ορισμός 1.2.1 δεν επαληθεύεται, συνεπώς $g\circ f\neq f\circ g$, από όπου συμπεραίνεται ότι **δεν ισχύει** η **αντιμεταθετική ιδιότητα** στη σύνθεση συναρτήσεων.

Για τη σύνθεση συνάρτηση $f\circ f$, όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έχουμε
$$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\big(2x-1\big)=2\big(2x-1\big)-1=4x-3,\quad x\in\mathbb{R}.$$

v) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x)=2x+1$ και $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 3\\ 3x-2, & x>3\end{cases}$, επειδή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, μπορεί να οριστεί η σύνθεση $g\circ f$, για την οποία έχουμε:

$$\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)=\begin{cases}f^2(x)-1, & f(x)\le 3\\ 3f(x)-2, & f(x)>3\end{cases}=\begin{cases}\left(2x+1\right)^2-1, & f(x)\le 3\\ 3\left(2x+1\right)-2, & f(x)>3\end{cases}$$

Έτσι για τη σύνθετη συνάρτηση $g\circ f$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(g\circ f\right)(x)=\begin{cases}4x^2+4x, & 2x+1\le 3\\ 6x+1, & 2x+1>3\end{cases}=\begin{cases}4x^2+4x, & x\le 1\\ 6x+1, & x>1\end{cases}.$$

◊◊

Ορισμός 1.2.8. Έστω $f:A\to B$ μία 1-1 συνάρτηση. Η συνάρτηση $g:B\to A$, για την οποία ισχύει

$$g(y)=x\text{, για κάθε } y\in B\Leftrightarrow f(x)=y\text{,} \tag{1.2.1}$$

ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** (inverse function) της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Παρατηρήσεις 1.2.9.

i) Θεωρώντας τις συναρτήσεις *f*, *g* του Ορισμού 1.2.8 έχουμε να σημειώσουμε ότι η $g:B\to A$ είναι πράγματι συνάρτηση, γιατί, αν $g(y)=x_1$ και $g(y)=x_2$, τότε λόγω του ορισμού της $f(x_1)=y=f(x_2)$ και εφόσον η f είναι αμφιμονοσήμαντη (ως 1-1) προκύπτει $x_1=x_2$. Η συνθήκη της «επί» συνάρτησης για την *f* είναι αναγκαία, προκειμένου η «νέα» συνάρτηση *g* (η αντίστροφη της f) να ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο B κι όχι σε ένα υποσύνολο του. Είναι, λοιπόν, αναγκαία και ικανή η συνθήκη «η $f:A\to B$ είναι μία 1-1 συνάρτηση» για την αντιστροφή της *f*.

ii) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f:A\to B$ και $g:B\to A$ του Ορισμού 1.2.8. ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g\circ f:A\to A$ και $f\circ g:B\to B$. Πράγματι,

$$\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)=g(y)=x=I_A(x)\text{, για κάθε } x\in A\text{,}$$
$$\left(f\circ g\right)(y)=f\left(g(y)\right)=f(x)=y=I_B(y)\text{, για κάθε } y\in B\text{,}$$

όπου I_A, I_B οι ταυτοτικές συναρτήσεις στα σύνολα *A* και *B*, αντίστοιχα. Έτσι,

$$g\circ f=I_A \text{ και } f\circ g=I_B\text{,}$$

απ' όπου η *g* αποκτά το όνομά της και το συμβολισμό της (η f^{-1} είναι το ανάλογο του αντίστροφου ενός μη μηδενικού πραγματικού αριθμού).

iii) Έστω οι 1-1 συναρτήσεις $f:A\to B$ και $g:B\to C$. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$(f^{-1})^{-1}=f \qquad \text{και} \qquad (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

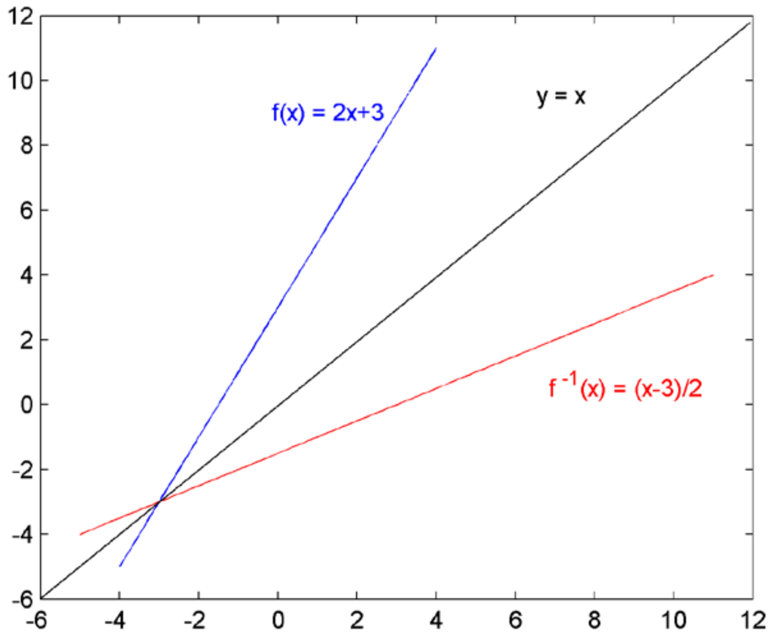
Παραδείγματα 1.2.10.

i) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x+3$ είναι 1-1, (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.9 (i)). Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. υπάρχει η αντίστροφη της f. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία υπολογισμού του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης (βλέπε, Παρατήρηση 1.2.9. (v)) έχουμε

$$y=f(x)=2x+3\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{2}.$$

Αλλάζοντας στον παραπάνω τύπο τα *x* με *y* συμπεραίνουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2}$.

Στο Σχήμα 1.7 αναπαριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f (μπλε χρώμα) της f^{-1} (κόκκινο) και η διχοτόμος-ευθεία $y=x$ (μαύρο).



Σχήμα 1.7: Γραφικές παραστάσεις γραμμικής συνάρτησης, αντιστρόφου της και της διχοτόμου της πρώτης γωνίας του επιπέδου.

ii) Έστω $A=\{-1,2,3\}, B=\{\sqrt{3},5,11\}$ και η συνάρτηση $f: A \to B$, όπου

$$f(-1)=5,\ f(2)=\sqrt{3} \text{ και } f(3)=11.$$

Από τον ορισμό της η f είναι μία 1-1 συνάρτηση και η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}:\{\sqrt{3},5,11\} \to \{-1,2,3\},$$

όπου $f^{-1}(\sqrt{3})=2,\ f^{-1}(5)=-1$ και $f^{-1}(11)=3$.

iii) Η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ με $f(x)=x^2$ είναι 1-1 συνάρτηση (γιατί;). Η αντίστροφή της ορίζεται με τύπο $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x \in [0,+\infty)$.

iv) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to [0,+\infty)$, με $f(x)=x^2$ **δεν** είναι αντιστρέψιμη, επειδή δεν είναι 1-1. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι επί (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.7 (i)) ωστόσο δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, επειδή για δύο διαφορετικά $x_1=1$ και $x_2=-1$ είναι $f(1)=1=f(-1)$, επομένως δεν ισχύει ο Ορισμός 1.1.3. ◊◊

Παρατήρηση 1.2.11.

i) Αν (x,y) είναι οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της γραφικής παράστασης μίας 1-1 συνάρτησης f, τότε είναι φανερό ότι

$$(x,y)=(x,f(x))=\left(f^{-1}(y),y\right),$$

δηλαδή, οι γραφικές παραστάσεις της f και f^{-1} ταυτίζονται, όταν για την f^{-1} θεωρούμε ανεξάρτητη μεταβλητή επί του άξονα $y'0y$. Ενώ, αν ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} δίνεται θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή επί του άξονα $x'0x$, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του επιπέδου $x0y$, (βλέπε, Σχήμα 1.7).

ii) Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθούμε κατά τον υπολογισμό της αντίστροφης f^{-1} συνάρτησης,

➢ όταν δίνεται μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$:

- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη, (βλέπε, Ορισμός 1.1.3.).
- Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της f, το οποίο πρέπει να είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.
- Υπολογίζουμε τον τύπο της f^{-1}, ο οποίος προκύπτει από την επίλυση ως προς x της $y=f(x)$ και αλλάζοντας στον τύπο που παράγεται τα x με y.

➢ όταν η συνάρτηση δίνεται με κλάδους

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x\in A_1 \\ f_2(x), & \text{αν } x\in A_2 \end{cases}$$

- Εξετάζουμε αν οι συναρτήσεις $f_1:A_1\to\mathbb{R}$ και $f_2:A_2\to\mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντες, αν τουλάχιστον μία δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, συνεπώς η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται, επειδή μία από τις προϋποθέσεις του Ορισμός 1.1.3. δεν ισχύει.
- Βρίσκουμε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων των κλάδων, $f_1(A_1)$ και $f_2(A_2)$.
  - Αν για τα σύνολα $f_1(A_1), f_2(A_2)$ ισχύει $f_1(A_1)\cap f_2(A_2)\neq\varnothing$, τότε η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται, επειδή δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.
  - Αν $f_1(A_1)\cap f_2(A_2)=\varnothing$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει και ο τύπος της δίνεται

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} f_1^{-1}(x), & \text{αν } x\in f_1(A_1) \\ f_2^{-1}(x), & \text{αν } x\in f_2(A_2) \end{cases}$$

  όπου οι τύποι των συναρτήσεων f_1^{-1}, f_2^{-1} υπολογίζονται, όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, στην περίπτωση της μίας συνάρτησης.

Ορισμός 1.2.12. Έστω μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$. Η συνάρτηση ονομάζεται

i) **άνω φραγμένη** (upper bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $M\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $f(x)\le M$. Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** (upper bound) της f.
Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα της συνάρτησης ονομάζεται **άνω πέρας** (supremum) και συμβολίζεται $\sup\limits_{x\in A} f$.

ii) **κάτω φραγμένη** (lower bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $m\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $f(x)\ge m$. Ο αριθμός m ονομάζεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της f.
Το μέγιστο από τα κάτω φράγματα της συνάρτησης ονομάζεται **κάτω πέρας** (infimum) και συμβολίζεται $\inf\limits_{x\in A} f$.

iii) **φραγμένη** (bounded), όταν η συνάρτηση f είναι άνω και κάτω φραγμένη.

iv) **απόλυτα φραγμένη** (absolute bounded), όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός $a\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $|f(x)|\le a$. Ο αριθμός a ονομάζεται **απόλυτο φράγμα** της f.

Παρατήρηση 1.2.13.
Εφαρμόζοντας τη γνωστή ιδιότητα της απόλυτης τιμής, από την οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\theta>0$,

$$|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta,$$

μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία απόλυτα φραγμένη συνάρτηση είναι και φραγμένη, επειδή το απόλυτο φράγμα είναι ένα άνω φράγμα και ο αντίθετος πραγματικός αριθμός του απολύτου φράγματος αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τη συνάρτηση.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ είναι απόλυτα φραγμένη από το 1, το οποίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η f έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το -1, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2. (iii)).
Συνεπώς, όταν χρειάζεται να «εντοπίσουμε» κάποιο φράγμα (άνω ή κάτω) μίας συνάρτησης, αρχικά μπορούμε να αναζητήσουμε την ύπαρξη ενός απόλυτου φράγματος αυτής.

Αν δεν υπάρχει απόλυτο φράγμα, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν είναι άνω και κάτω φραγμένη από τον ίδιο (κατά απόλυτη τιμή) πραγματικό αριθμό, το οποίο δεν είναι ισοδύναμο με το ότι η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ή να μην είναι φραγμένη.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι **κάτω φραγμένη** από το μηδέν ή οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό, (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.7. (i)) ωστόσο **δεν** είναι άνω φραγμένη, επομένως δεν μπορεί να είναι απόλυτα φραγμένη.
Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ **δεν** είναι φραγμένη (ούτε απόλυτα, ούτε απλά), συνεπώς **δεν υπάρχει** κάποιο άνω ή κάτω φράγμα της (βλέπε, Παράδειγμα 1.1.14. (iii)).

Πρόταση 1.2.14.
Έστω οι πραγματικοί αριθμοί k_1, k_2 και οι απόλυτα φραγμένες συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$.
Η συνάρτηση $k_1 f + k_2 g: A \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα φραγμένη.

Απόδειξη: Αρχικά, το άθροισμα των συναρτήσεων ορίζεται στο A, επειδή οι f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού, (βλέπε, Ορισμός 1.2.3. (i)).
Επειδή οι συναρτήσεις είναι απόλυτα φραγμένες, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.12 (iv), υπάρχουν $a_1, a_2 > 0$ τέτοιοι ώστε $|f(x)| \le a_1$ και $|g(x)| \le a_2$, για κάθε $x \in A$.

Επομένως, για κάθε $x \in A$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |(k_1 f + k_2 g)(x)| &= |k_1 f(x) + k_2 g(x)| \le |k_1 f(x)| + |k_2 g(x)| \\ &= |k_1||f(x)| + |k_2||g(x)| \le |k_1| a_1 + |k_2| a_1 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Προφανώς $|k_1| a_1 + |k_2| a_1$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, επομένως η (1.2.2) επαληθεύει τον Ορισμό 1.2.12. (iv).
◊◊

Ορισμός 1.2.15. Έστω μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση ονομάζεται
i) **άρτια** (even function), όταν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή **0** των αξόνων, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $-x \in A$, και ισχύει

$$f(-x) = f(x). \tag{1.2.3}$$

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'0y$.
ii) **περιττή** (odd function), όταν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή **0** των αξόνων, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $-x \in A$, και ισχύει

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.2.4}$$

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων.

Παραδείγματα 1.2.16.
i) Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2$ και $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, όπου $g(x) = |x|$, είναι άρτιες, επειδή τα πεδία ορισμού τους είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και επιπλέον ισχύει η (1.2.3).
Επιπλέον, ο $y'0y$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεών τους, (βλέπε, τη G_f στο Σχήμα 1.2). Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι μία άρτια συνάρτηση **δεν** είναι αμφιμονοσήμαντη, (γιατί;).

ii) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$, οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = ax^3$ και $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, όπου $g(x) = \dfrac{a}{x}$, είναι περιττές, επειδή τα πεδία ορισμού τους είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και επιπλέον ισχύει η (1.2.4).
Επιπλέον, η αρχή των αξόνων αποτελεί κέντρο συμμετρίας των γραφικών παραστάσεών τους, (βλέπε, Σχήμα 1.4 και Σχήμα 1.5, αντίστοιχα). ◊◊

Ορισμός 1.2.17. Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει ένας μη μηδενικός αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $x + T \in A$, και ισχύει

$$f\left(x + T\right) = f(x), \tag{1.2.5}$$

ονομάζεται **περιοδική συνάρτηση** (periodic function) και ο μικρότερος θετικός αριθμός T, για τον οποίο επαληθεύεται η ισότητα στην (1.2.5), λέγεται **περίοδος** της f.

Γεωμετρικά, η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά T.

Παράδειγμα 1.2.18.
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin(x)$, $\cos(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, και οι συναρτήσεις $\tan(x)$, $\cot(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \pi$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (ii), Παρατήρηση 1.5.6 (ii), Παρατήρηση 1.5.10 (ii), Παρατήρηση 1.5.12 (ii), αντίστοιχα). ◊◊

1.3. Μονοτονία συνάρτησης. Ακρότατα συνάρτησης

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε την έννοια της μονοτονίας μίας συνάρτησης, έννοια που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές, επειδή οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτές είναι μονότονες σε όλο το πεδίο ορισμού τους ή «κατά τμήματα» μονότονες. Η δε έννοια της μονοτονίας μπορεί να δώσει πληροφορίες για τις «ακριανές τιμές» της συνάρτησης, για το σύνολο τιμών της, κ.α.

Ορισμός 1.3.1. Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Η συνάρτηση ονομάζεται

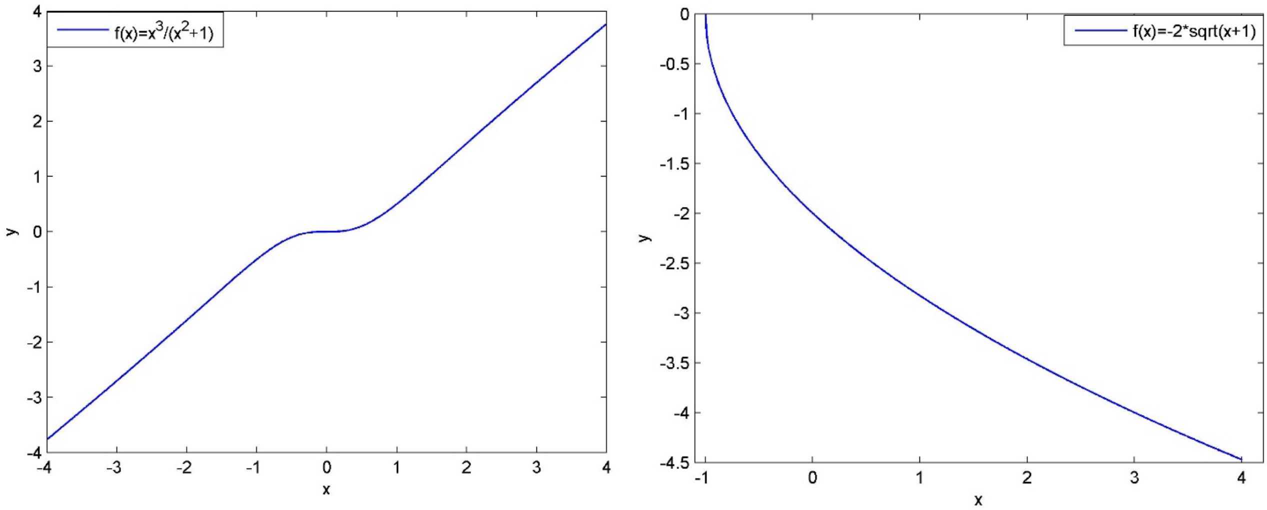
i) **αύξουσα** (increasing) στο B, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Συμβολικά : $f \uparrow$. Σχήμα 1.8 (α)

ii) **γνήσια αύξουσα** (strictly increasing) στο B, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

iii) **φθίνουσα** (decreasing) στο B, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. Συμβολικά : $f \downarrow$

iv) **γνήσια φθίνουσα** (strictly decreasing) στο B, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Σχήμα 1.8 (b)

v) **(γνήσια) μονότονη** στο B, όταν η συνάρτηση είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα στο B.



Σχήμα 1.8: Μονοτονία συναρτήσεων (α) : Η συνάρτηση είναι αύξουσα (b) Η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.

Παρατηρήσεις 1.3.2.

i) Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Αν η συνάρτηση είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα στο B, τότε αυτή είναι μία σταθερή συνάρτηση στο B.

ii) Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Πολλές φορές, προκειμένου να προσδιοριστεί το είδος της μονοτονίας της f αντί για την εφαρμογή του Ορισμού 1.3.1., χρησιμοποιείται ο **λόγος μεταβολής** της f στα $x_1, x_2 \in A$, ο οποίος ορίζεται να είναι

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ ή ισοδύναμα } \lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \qquad (1.3.1)$$

Επειδή στην (1.3.1.) θεωρήσαμε $x_1 \neq x_2$ και σε όλες τις περιπτώσεις του Ορισμού 1.3.1. υποθέτουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, η αντιστοιχία του λόγου μεταβολής με τον Ορισμό 1.3.1. είναι :

- Αν $\lambda \geq 0$, η f είναι αύξουσα

- Αν $\lambda > 0$, η f είναι γνήσια αύξουσα
- Αν $\lambda \leq 0$, η f είναι φθίνουσα
- Αν $\lambda < 0$, η f είναι γνήσια φθίνουσα
- Αν $\lambda = 0$, η f είναι σταθερή

iii) Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.3.1. είναι άμεσο να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ γνήσια μονότονη στο κλειστό διάστημα $A = [a,b]$ είναι φραγμένη.

iv) Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, που είναι γνήσια αύξουσα σε δύο υποσύνολα A_1, A_2 του πεδίου ορισμού A. Δεν είναι αναγκαίο η συνάρτηση f να είναι γνήσια αύξουσα στο $A_1 \cup A_2$. Ο ίδιος ισχυρισμός αληθεύει αντικαθιστώντας την έννοια γνήσια αύξουσα με γνήσια φθίνουσα, ή με αύξουσα, ή με φθίνουσα.

Παραδείγματα 1.3.3.

i) Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$. Αν $a > 0$ η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και αν $a < 0$ η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.
Πράγματι, θεωρώντας $a > 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ο Ορισμός 1.3.1. (ii) επαληθεύεται, επειδή $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$, συνεπώς η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.
Θεωρώντας $a < 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ο Ορισμός 1.3.1. (iv) επαληθεύεται, επειδή $f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$, συνεπώς η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα.
Επίσης, επειδή η κλίση της ευθείας (βλέπε, Παραδείγματα 1.1.14. (i)) ταυτίζεται με τον λόγο στην Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το πρόσημο του λόγου στην (1.3.1).

ii) Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.
Θεωρώντας $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, αρχικά υπολογίζεται ο λόγος μεταβολής της f από την (1.3.1), που είναι ίσος με

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - 4x_2 + 4 - (x_1^2 - 4x_1 + 4)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2 - 4x_2 + 4x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4.\end{aligned}$$

- Αν $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, τότε $\lambda = x_1 + x_2 - 4 > 0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$, τότε $\lambda = x_1 + x_2 - 4 < 0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Κεφαλαίου 6. ◊◊

Πρόταση 1.3.4.
Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ γνήσια μονότονη στο $B \subseteq A$. Τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο B, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1. (ii) για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ (δηλαδή, $x_1 \neq x_2$) ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα, τα δύο τυχαία $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 \neq x_2$, επαληθεύουν τη συνεπαγωγή στον Ορισμός 1.1.3., συνεπώς η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη.
Αν η συνάρτηση θεωρηθεί γνήσια φθίνουσα η απόδειξη είναι ανάλογη. ◊◊

Εφαρμογή 1.3.5.
Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax^3$, και $a\neq 0$.

i) Αν $a>0$, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα.
Αν $a<0$, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα.

ii) Η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη:
i) Θεωρώντας $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$, αρχικά υπολογίζεται ο λόγος μεταβολής της f από την (1.3.1), που είναι ίσος με

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{ax_2^3-ax_1^3}{x_2-x_1}=a\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}\\&=a\frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{x_2-x_1}=a(x_2^2+x_1x_2+x_1^2).\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Επειδή για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_2^2+x_1x_2+x_1^2$ είναι αρνητική, $x_2^2+x_1x_2+x_1^2>0$, συνεπώς στην (1.3.2) το πρόσημο του λ είναι αυτό του a .

- Αν $a>0$, τότε $\lambda>0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, (βλέπε, τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.4(α)).
- Αν $a<0$, τότε $\lambda<0$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.2 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, (βλέπε, τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.4(b)).

ii) Όπως προκύπτει από το (i), η συνάρτηση $f(x)=ax^3$ είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$, συνεπώς το συμπέρασμα είναι άμεσο αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.4. ◊◊

Η αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη συνάρτηση, ιδιότητα που διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.6.
Έστω μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα). Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f είναι γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα).

Απόδειξη: Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, δηλαδή, για κάθε $x_1,x_2\in A$, με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, (βλέπε, Ορισμός 1.3.1). Αν η f^{-1} δεν είναι γνήσια αύξουσα, τότε υπάρχουν $y_1,y_2\in f(A)$, με $y_1<y_2$, για τις εικόνες των οποίων ισχύει

$$f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2).\tag{1.3.3}$$

Επειδή $f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2)\in A$ και η f είναι γνήσια αύξουσα, από την (1.3.3) έχουμε

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right)>f\left(f^{-1}(y_2)\right)\Rightarrow y_1>y_2,$$

το οποίο είναι αδύνατο, επειδή υποθέσαμε $y_1<y_2$. Άρα, η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα. Ανάλογα αποδεικνύεται και η περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνήσια φθίνουσα. ◊◊

Ορισμός 1.3.7. Έστω μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$.

i) Αν υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** (global maximum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **ολικού μεγίστου** και $f(x_0)$ **μέγιστη τιμή** της f.

ii) Αν υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** (global minimum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **ολικού**

ελαχίστου και $f(x_0)$ **ελάχιστη τιμή** της f .

iii) Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** (global extrema) της f .

iv) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό μέγιστο** (local maximum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **τοπικού μεγίστου** και $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .

v) Αν υπάρχει $x_0 \in A$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό ελάχιστο** (local minimum). Το x_0 ονομάζεται **σημείο** (ή **θέση**) **τοπικού ελαχίστου** και $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

Παράδειγμα 1.3.8.
Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$, έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$. Το ολικό ελάχιστο είναι $f(2) = 0$.
Πράγματι, όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 1.3.3 (ii), η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \in [2, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq f(2)$, (βλέπε, Ορισμό 1.3.1 (ii)). Επειδή $f(2) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [2, +\infty)$.
Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$, οπότε για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ ισχύει $f(x) \geq f(2) = 0$, (βλέπε, Ορισμό 1.3.1 (iv)). Συνεπώς, $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 2]$.
Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \geq 0$, το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 1.3.7 (ii).
Εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σημείο ολικού ελαχίστου της συνάρτησης f ταυτίζεται με την κορυφή της παραβολής, που αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 1.1.14 (ii) ως το σημείο $C\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2,0)$. ◊◊

1.4. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.4.1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, με $f(x)=a^x$, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a, ονομάζεται **εκθετική** (exponential) συνάρτηση με **βάση** τον αριθμό a και συμβολίζεται a^x.

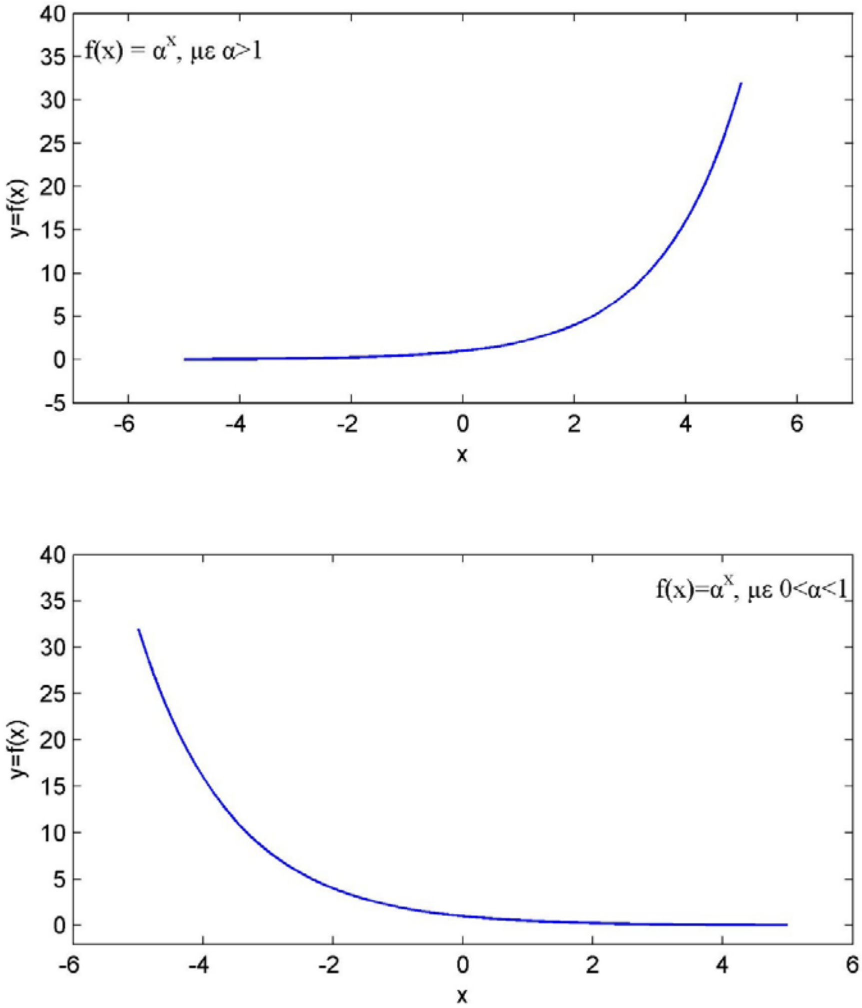
Όταν $a=1$ η εκθετική συνάρτηση 1^x γίνεται σταθερή ίση με 1.

Μία σημαντική εκθετική συνάρτηση είναι η e^x (ή συμβολικά, $\exp(x)$) με βάση το νεπέρειο αριθμό $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \simeq 2{,}718\ldots$ (βλέπε, Ενότητα 2.6).

Παρατηρήσεις 1.4.2.

i) Επειδή $a>0$, είναι φανερό ότι, $a^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η εκθετική συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν (βλέπε, Ορισμός 1.2.12.(ii)), το δε σύνολο τιμών της a^x είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $(0,+\infty)$.

ii) Αποδεικνύεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν $a>1$, η εκθετική συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, Ορισμός 1.3.1), ενώ όταν $0<a<1$, η συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.9).

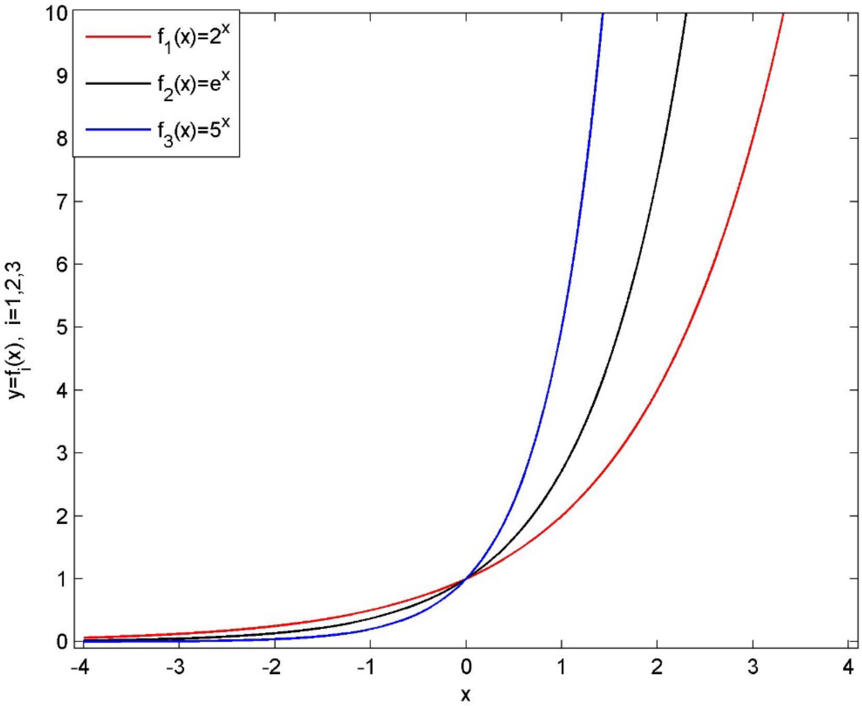


Σχήμα 1.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a^x$, με $a>0$.

iii) Για κάθε $a>0$ και $x\in\mathbb{R}$, συνδυάζοντας την Πρόταση 1.3.4. με τη γνήσια μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.2 (ii)), αποδεικνύεται ότι $f(x)=a^x$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

iv) Στο Σχήμα 1.9 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=a^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στην πάνω εικόνα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της $f(x)=a^x$, με $a>1$, ενώ στην κάτω εικόνα η γραφική παράσταση με $0<a<1$.

v) Στο Σχήμα 1.10 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων εκθετικών συναρτήσεων $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=e^x$, και $f_3(x)=5^x$.



Σχήμα 1.10: Οι γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων $f(x)=a^x$, με $a>1$.

Ορισμός 1.4.3. Έστω ο θετικός πραγματικός αριθμός *a*. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό *x* ορίζουμε τον αριθμό

$$\log_a(x)=y\Leftrightarrow x=a^y. \tag{1.4.1}$$

Ο αριθμός $\log_a(x)$ ονομάζεται **λογάριθμος** (logarithm) του *x* με **βάση** τον αριθμό *a*.
Αν $a=10$, ο λογάριθμος $\log_{10}(x)$ λέγεται **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται $\log(x)$, ενώ αν $a=e$ ο λογάριθμος $\log_e(x)$ λέγεται **νεπέρειος** ή **φυσικός λογάριθμος** και συμβολίζεται $\ln x$.
Η συνάρτηση

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\text{, όπου } f(x)=\log_a(x)\text{, για κάθε } x\in(0,+\infty), \tag{1.4.2}$$

ονομάζεται **λογαριθμική** συνάρτηση με **βάση** τον *a*.

Παρατηρήσεις 1.4.4.

i) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $a>0$, η εκθετική συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $(0,+\infty)$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.2 (iii)), ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση

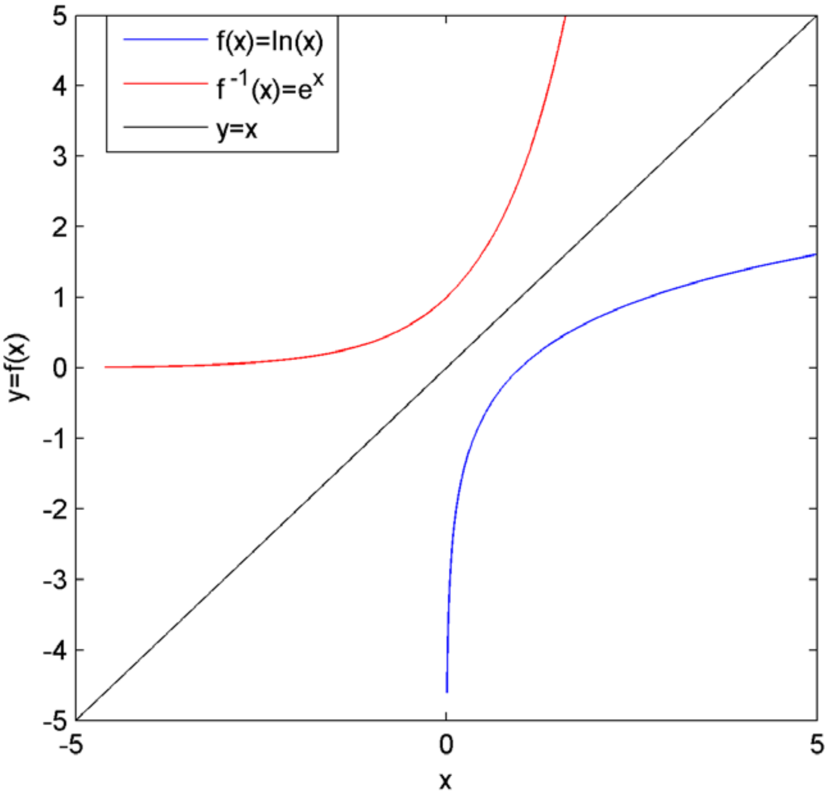
$f(x) = a^x$ να είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$, (βλέπε, Ορισμός 1.1.8.). Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\ (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = a^y = x$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την (1.4.1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση είναι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον $a > 0$, δηλαδή, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης a^x είναι η λογαριθμική $\log_a(x)$. Άρα, η σχέση που συνδέει την εκθετική συνάρτηση με τη λογαριθμική συνάρτηση δίνεται από την (1.4.1),δηλαδή,

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y \tag{1.4.3}$$

Στο Σχήμα 1.11 αναπαριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ και της αντίστροφής της $f^{-1}(x) = e^x$. Παρατηρήστε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του επιπέδου $x0y$.

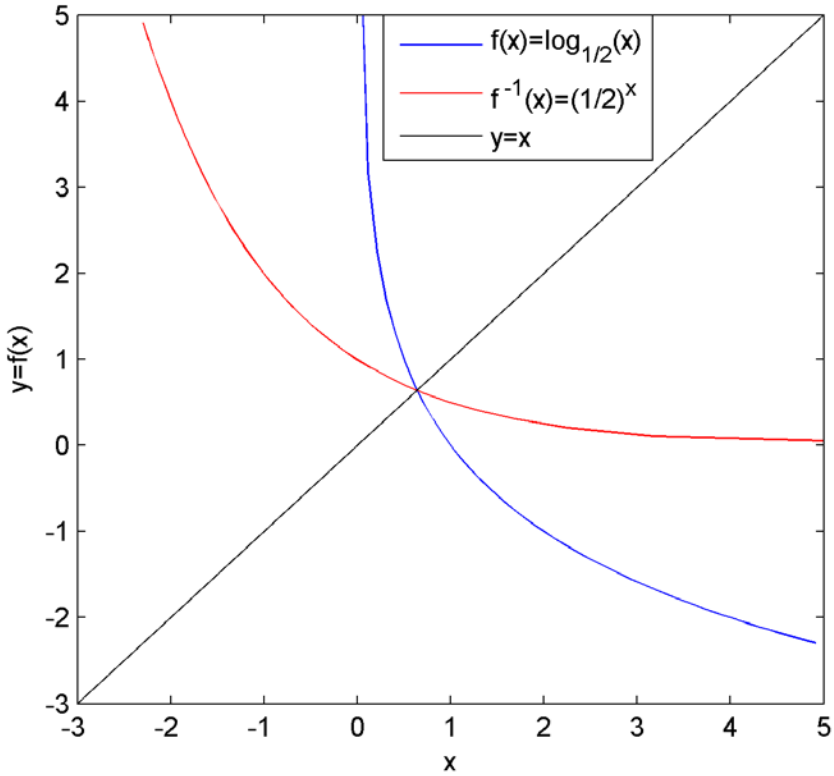


Σχήμα 1.11: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ και $f^{-1}(x) = e^x$.

ii) Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής, όπως αποδείχθηκε στο (i), έχει την ίδια μονοτονία με την εκθετική, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.). Άρα, για κάθε $x \in (0,+\infty)$,

- αν $a > 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.11).
- αν $0 < a < 1$, η συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$, στο Σχήμα 1.12 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_{1/2}(x)$, και της αντίστοιχης αντίστροφής της εκθετικής συνάρτησης $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

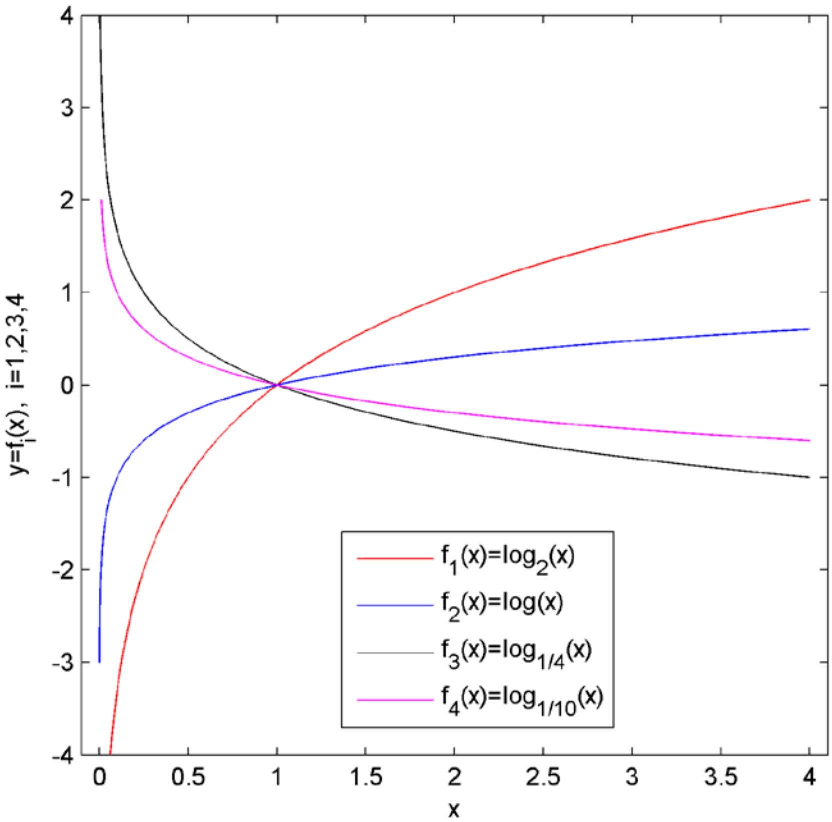


Σχήμα 1.12: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\log_{1/2}(x)$ και $f^{-1}(x)=\left(1/2\right)^{x}$.

iii) Συνδυάζοντας τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης από το (ii)-παραπάνω με την Πρόταση 1.3.4., συμπεραίνουμε ότι για κάθε $a>0$ και $x\in(0,+\infty)$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_{a}(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

iv) Στο Σχήμα 1.13 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων λογαριθμικών συναρτήσεων :

$$f_1(x)=\log_2(x),\quad f_2(x)=\log(x),\quad f_3(x)=\log_{1/4}(x),\text{ και }\quad f_4(x)=\log_{1/10}(x)$$



Σχήμα 1.13: Οι γραφικές παραστάσεις λογαριθμικών συναρτήσεων $f(x) = \log_a(x)$ με $a > 0$.

v) Έστω $a > 0$. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των λογαρίθμων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.4.1.

Πίνακας 1.4.1: Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης με βάση $a > 0$

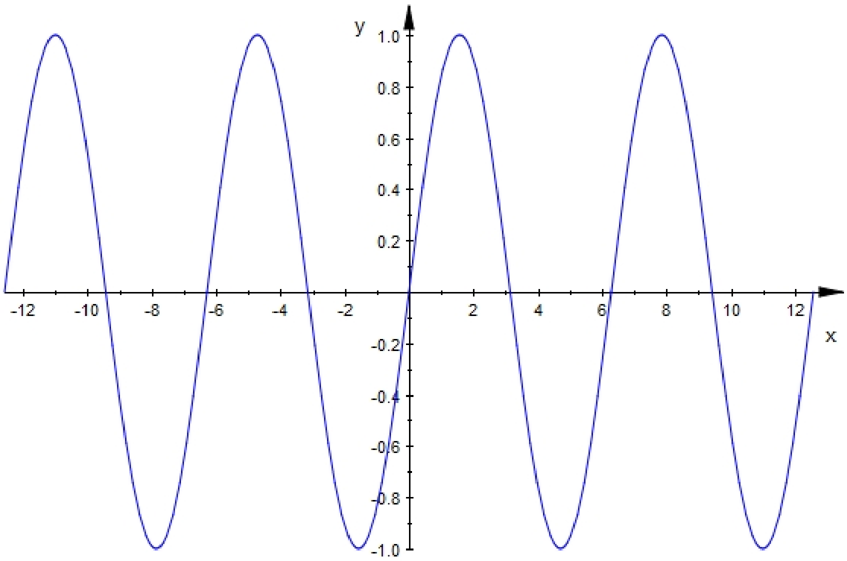
	Πεδίο ορισμού
$\log_a(a^x) = x$ και $a^{\log_a x} = x$,	$x > 0$
$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$	$x, y > 0$
$\log_a(x^k) = k\log_a(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	$x > 0$
$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(\frac{x}{y})$	$x, y > 0$
$\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$	$x, b > 0$

1.5. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θεωρώντας γνωστούς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη μίας γωνίας x από τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, να εξετάσουμε την ύπαρξη των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού τους, ή σε κατάλληλο υποσύνολό του. Στη συνέχεια, x εκφράζει την τιμή μίας γωνίας σε ακτίνια.

Ορισμός 1.5.1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, με $f(x)=\sin(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **ημιτόνου** (sine) της γωνίας $x\in\mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.14.



Σχήμα 1.14: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου, $f(x)=\sin(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.2.

i) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.14 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου $f(x)=\sin(x)$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή, δηλαδή, ισχύει $\sin(-x)=-\sin(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα 13, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).

ii) Από το Σχήμα 1.14 είναι φανερό ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο $f(x)=\sin(x)$ αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T=2\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο $T=2\pi$.

iii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.5.1. το σύνολο τιμών της συνάρτησης ημιτόνου είναι $[-1,1]$, δηλαδή, ένα κάτω φράγμα της είναι η τιμή -1 και ένα άνω φράγμα η τιμή 1, συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ είναι φραγμένη, και μάλιστα απόλυτα φραγμένη από την τιμή 1, επειδή $-1\leq\sin(x)\leq 1\Leftrightarrow|\sin(x)|\leq 1$, (βλέπε, Ορισμός 1.2.12. (iii), (iv) και Παρατήρηση 1.2.13).

iv) Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k=\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα. Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.14, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in A_k$, με k άρτιο αριθμό, η συνάρτηση ημιτόνου $f(x)=\sin(x)$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, Ορισμός 1.3.1), ενώ όταν $x\in A_k$, με k περιττό αριθμό, η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

v) Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ είναι γνήσια μονότονη στο εσωτερικό κάθε διαστήματος $A_k=\left[k\pi-\frac{\pi}{2},\, k\pi+\frac{\pi}{2}\right],\ k\in\mathbb{Z}$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (iv)), συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\sin(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\, k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

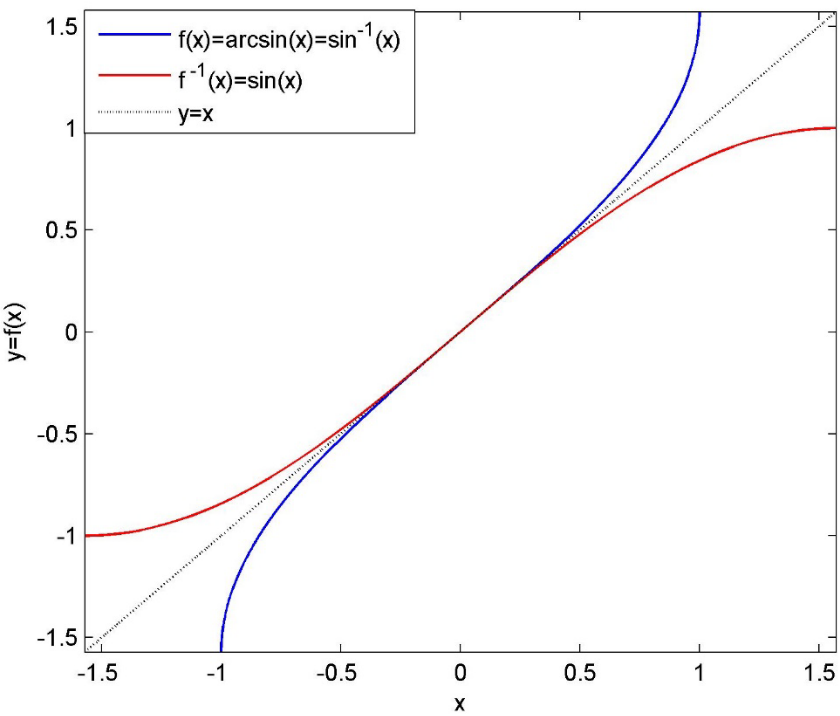
vi) Θεωρώντας $k=0$, η συνάρτηση ημιτόνου $f(x)=\sin(x)$, για κάθε $x\in A_0=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[-1,1]$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (v) και Ορισμός 1.5.1), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ να είναι 1-1 στο A_0. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\ [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y)=x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \text{για κάθε}\ y\in[-1,1]\Leftrightarrow f(x)=\sin(x)=y \qquad (1.5.1)$$

Ορισμός 1.5.3. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, όπου $f(x)=\sin(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, η οποία ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με $arc\sin$ ή $\sin^{-1}$. Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.1), δηλαδή,

$$\sin^{-1}(y)=x\Leftrightarrow\sin(x)=y\,.$$

Για παράδειγμα, $arc\sin(1)=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$, $arc\sin(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}$.



Σχήμα 1.15: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο ημιτόνου $f(x)=arc\sin(x)=\sin^{-1}(x)$ και ημιτόνου $f^{-1}(x)=\sin(x)$.

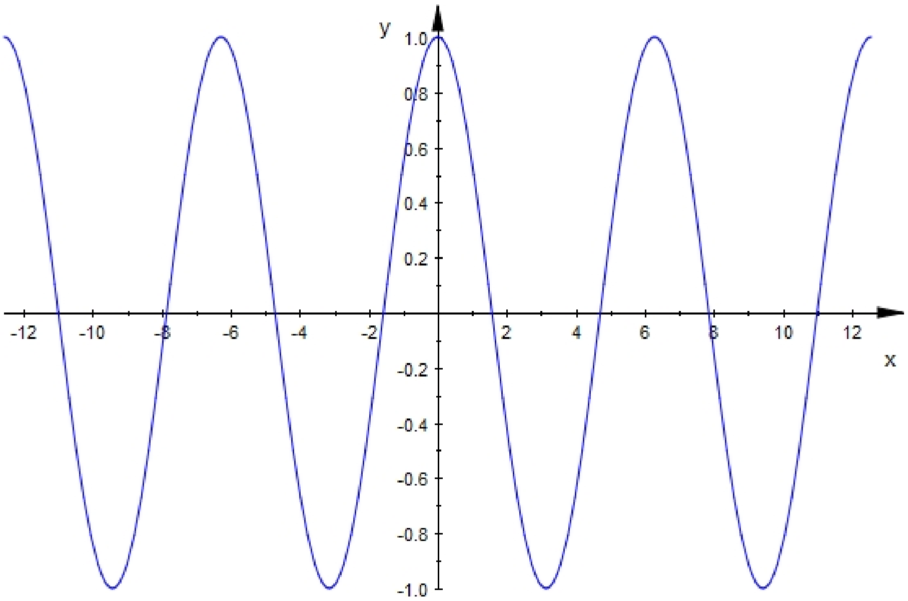
Παρατηρήσεις 1.5.4.

i) Στο Σχήμα 1.15 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο ημιτόνου $f(x)=arc\sin(x)=\sin^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα η αντίστροφή της, $f^{-1}(x)=\sin(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

ii) Επειδή, για κάθε $x\in[-1,1]$ η συνάρτηση τόξο ημιτόνου $f(x)=arc\sin(x)=\sin^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου ορισμένο στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση του ημιτόνου, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.). Άρα, για κάθε $x\in[-1,1]$, η συνάρτηση $f(x)=arc\sin(x)=\sin^{-1}(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.15).

Ορισμός 1.5.5. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, με $f(x)=\cos(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συνημίτονου** (cosine) της γωνίας $x\in\mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.16.



Σχήμα 1.16: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου, $f(x)=\cos(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.6.

i) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.16 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου $f(x)=\cos(x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'0y$, συνεπώς, η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή, ισχύει $\cos(-x)=\cos(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα 13, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).

ii) Από το Σχήμα 1.16 είναι φανερό ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημίτονο $f(x)=\cos(x)$ αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T=2\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)=\cos(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο $T=2\pi$.

iii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.5.5. το σύνολο τιμών της συνάρτησης συνημιτόνου είναι $[-1,1]$, δηλαδή, ένα κάτω φράγμα της είναι η τιμή -1 και ένα άνω φράγμα η τιμή 1, συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=\cos(x)$ είναι φραγμένη, (βλέπε, Ορισμός 1.2.12. (iii)).

iv) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.16 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in A_k = [k\pi,\, k\pi + \pi\,]$, k περιττός αριθμός, η συνάρτηση συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια αύξουσα (βλέπε, Ορισμός 1.3.1), ενώ όταν $x \in A_k = [k\pi,\, k\pi + \pi\,]$, k άρτιος αριθμός, η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

v) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι γνήσια μονότονη στο εσωτερικό κάθε διαστήματος $A_k = [k\pi,\, k\pi + \pi\,]$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.2 (iv)), συμπεραίνουμε ότι $f(x) = \cos(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $(k\pi,\, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

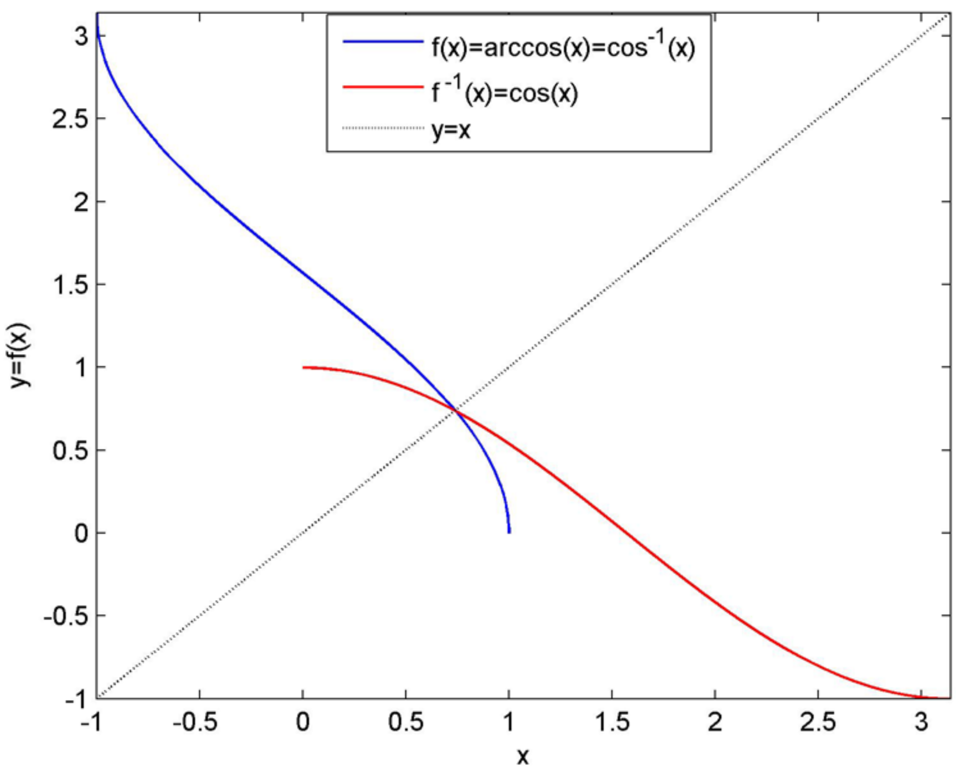
vi) Θεωρώντας $k = 0$, η συνάρτηση συνημιτόνου $f(x) = \cos(x)$, για κάθε $x \in A_0 = [0,\, \pi\,]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[-1,1]$, (βλέπε, Παρατήρηση 1.5.6 (v) και Ορισμός 1.5.5), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ να είναι 1-1 στο A_0. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\, [-1,1] \to [0,\, \pi\,]$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y) = x \in [0,\pi],\ \text{για κάθε}\ y \in [-1,1] \Leftrightarrow f(x) = \cos(x) = y \tag{1.5.2}$$

Ορισμός 1.5.7. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f:[0,\pi] \to [-1,1]$, όπου $f(x) = \cos(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}:[-1,1] \to [0,\pi]$, η οποία ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με $arc\cos$ ή $\cos^{-1}$. Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.2), δηλαδή,

$$\cos^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y\,.$$

Για παράδειγμα, $arc\cos(1) = \cos^{-1}(1) = 0$, $arc\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$.



Σχήμα 1.17: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο συνημιτόνου $f(x) = arc\cos(x) = \cos^{-1}(x)$ και συνημιτόνου $f^{-1}(x) = \cos(x)$.

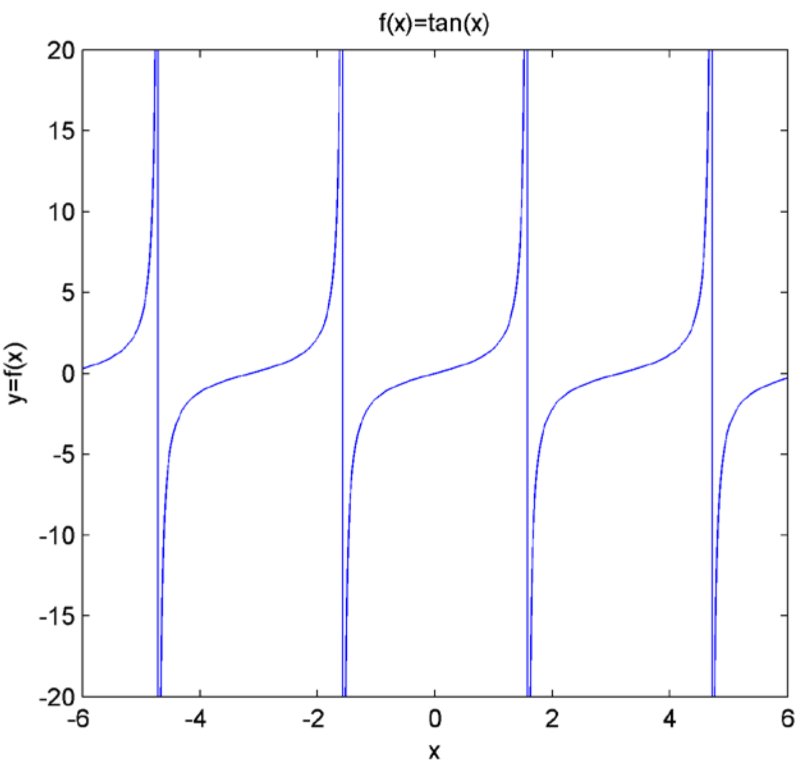
Παρατηρήσεις 1.5.8.

i) Στο Σχήμα 1.17 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο συνημιτόνου $f(x)=arc\cos(x)=\cos^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα η αντίστροφή της, $f^{-1}(x)=\cos(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

ii) Επειδή, για κάθε $x\in[-1,1]$, η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου $f(x)=arc\cos(x)=\cos^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση του συνημιτόνου ορισμένο στο $[0,\pi]$, έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση του συνημιτόνου, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.). Άρα, για κάθε $x\in[-1,1]$, η συνάρτηση $f(x)=arc\cos(x)=\cos^{-1}(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.17).

Ορισμός 1.5.9. Έστω $A=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **εφαπτομένης** (tangent) της γωνίας $x\in A$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.18. Παρατηρήστε ότι στο σχήμα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» της γραφικής παράστασης της $f(x)=\tan(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x, ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.18: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης $f(x)=\tan(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.10.

i) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.18 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης $f(x)=\tan(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή, δηλαδή, ισχύει $\tan(-x)=-\tan(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα 13, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).

ii) Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα.

Από το Σχήμα 1.18 είναι φανερό ότι, για κάθε $x\in A_k$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένης $f(x)=\tan(x)$, αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T=\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)=\tan(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$.

iii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.18 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in A_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, με $k\in\mathbb{Z}$, η συνάρτηση εφαπτομένης $f(x)=\tan(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Επειδή η $f(x)=\tan(x)$, για κάθε $x\in A_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, είναι γνήσια αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\tan(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη σε κάθε A_k, $k\in\mathbb{Z}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

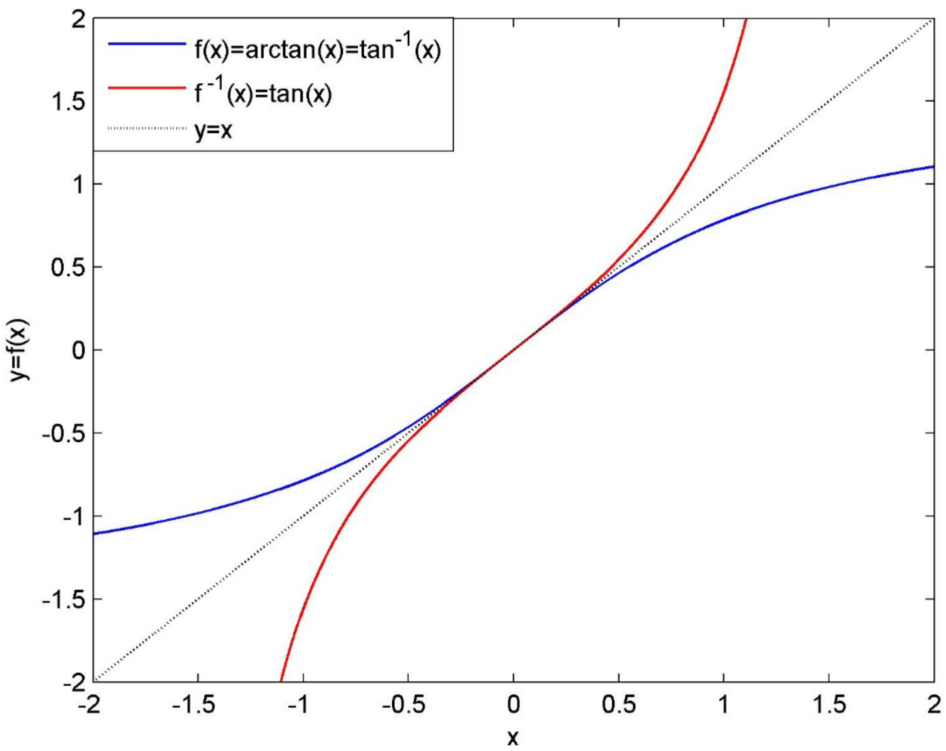
Θεωρώντας $k=0$, η συνάρτηση εφαπτομένης $f(x)=\tan(x)$, για κάθε $x\in A_0=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{R}$, (βλέπε, Ορισμός 1.5.9), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x)=\tan(x)$ να είναι 1-1 στο A_0. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\ \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y)=x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \text{για κάθε}\ y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=\tan(x)=y \tag{1.5.3}$$

Ορισμός 1.5.11. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, όπου $f(x)=\tan(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}:\ \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, η οποία ονομάζεται **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζεται με $arc\tan$ ή $\tan^{-1}$. Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.3), δηλαδή,

$$\tan^{-1}(y)=x\Leftrightarrow\tan(x)=y.$$

Για παράδειγμα, $arc\tan(1)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$, $arc\tan(-1)=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.



Σχήμα 1.19: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο εφαπτομένης $f(x) = arc\tan(x) = \tan^{-1}(x)$ και εφαπτομένης $f^{-1}(x) = \tan(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.12.

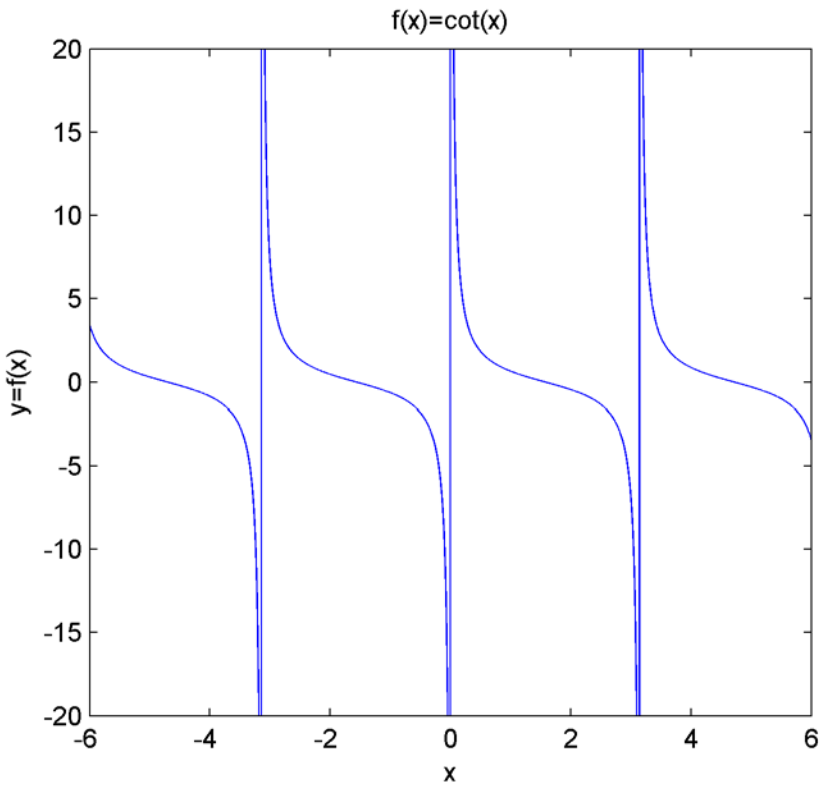
i) Στο Σχήμα 1.19 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τόξο εφαπτομένης $f(x) = arc\tan(x) = \tan^{-1}(x)$, και με κόκκινο χρώμα σχεδιάζεται η αντίστροφή της, $f^{-1}(x) = \tan(x)$. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

ii) Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης $f(x) = arc\tan(x) = \tan^{-1}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.19), επειδή $f(x) = arc\tan(x) = \tan^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης ορισμένης στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεπώς έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση της εφαπτομένης, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.).

iii)

Ορισμός 1.5.13. Έστω $A = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συνεφαπτομένης** (contangent) της γωνίας $x \in A$.

Η γραφική παράσταση της f αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.20. Παρατηρήστε ότι στο σχήμα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» της γραφικής παράστασης της $f(x) = \cot(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x, ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.20: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x)=\cot(x)$.

Παρατηρήσεις 1.5.14.

i) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.20 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x)=\cot(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή, δηλαδή, ισχύει $\cot(-x)=-\cot(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, το οποίο αποδεικνύει την ιδιότητα 13, (βλέπε, Πίνακα 1.5.1).

ii) Για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, σημειώνεται με $A_k=(k\pi,\, k\pi+\pi)$ ένα διάστημα υποσύνολο του πραγματικού άξονα. Από το Σχήμα 1.20 είναι φανερό ότι, για κάθε $x\in A_k$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνεφαπτομένης $f(x)=\cot(x)$, αποτελείται από ένα τμήμα καμπύλης, το οποίο επαναλαμβάνεται ανά $T=\pi$, συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)=\cot(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$.

iii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.20 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in A_k=(k\pi,\, k\pi+\pi)$, με $k\in\mathbb{Z}$, η συνάρτηση συνεφαπτομένης $f(x)=\cot(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Επειδή η $f(x)=\cot(x)$, για κάθε $x\in A_k=(k\pi,\, k\pi+\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, είναι γνήσια φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\cot(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη σε κάθε A_k, $k\in\mathbb{Z}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.). Θεωρώντας $k=0$, η συνάρτηση $f(x)=\cot(x)$, για κάθε $x\in A_0=(0,\pi)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{R}$, (βλέπε, Ορισμός 1.5.13.), είναι οι ιδιότητες που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση $f(x)=\cot(x)$ να είναι 1-1 στο A_0. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.8. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\ \mathbb{R}\to(0,\pi)$, και από την (1.2.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{-1}(y)=x\in(0,\pi),\ \text{για κάθε}\ y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=\cot(x)=y \tag{1.5.4}$$

Ορισμός 1.5.15. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, όπου $f(x)=\cot(x)$. Η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}:\ \mathbb{R}\to(0,\pi)$, η οποία ονομάζεται **τόξο συνεφαπτομένης** και συμβολίζεται με $arc\cot$ ή $\cot^{-1}$. Η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις διατυπώνεται στην (1.5.4), δηλαδή,

$$\cot^{-1}(y)=x \Leftrightarrow \cot(x)=y .$$

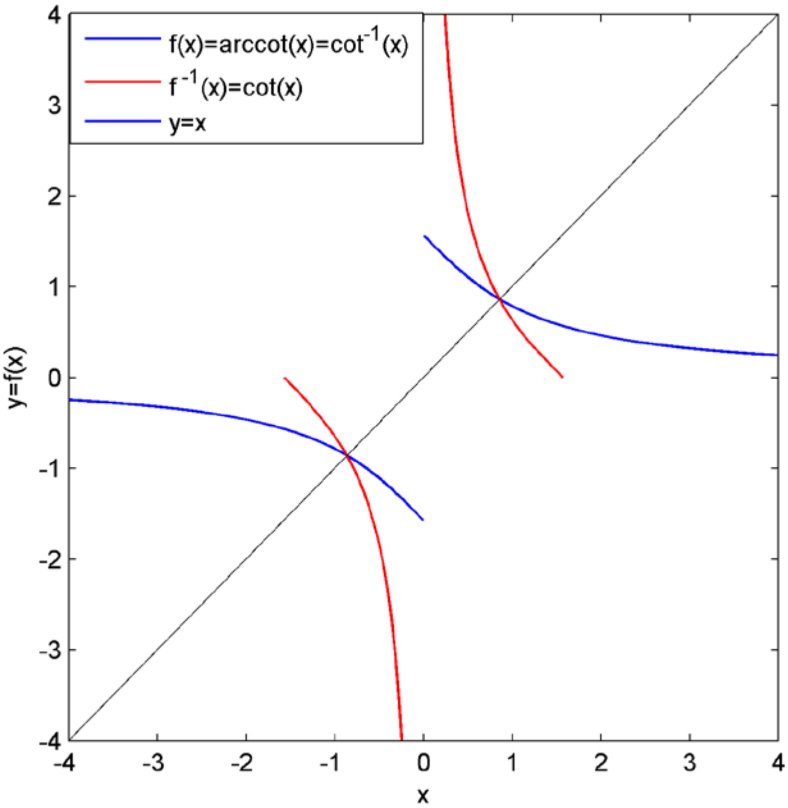
Στο Σχήμα 1.21 με μπλε χρώμα αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της $\cot^{-1}$.

Για παράδειγμα, $arc\cot(1)=\cot^{-1}(1)=\dfrac{\pi}{4}$, $arc\cot(0)=\cot^{-1}(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

Παρατηρήσεις 1.5.16.

i) Στο Σχήμα 1.21 αναπαριστάνεται με μπλε χρώμα η γραφική παράσταση τόξο συνεφαπτομένης $f(x)=arc\cot(x)=\cot^{-1}(x)$, $x\in(-4,4)$, και με κόκκινο χρώμα σχεδιάζεται η αντίστροφή της $f^{-1}(x)=\cot(x)$. Σχεδιασμένη με μαύρο χρώμα είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.
Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=arc\cot(x)=\cot^{-1}(x)$ στην περιοχή γύρω από το μηδέν δεν είναι συνεχής, επειδή το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστροφη συνάρτησή της $f^{-1}(x)=\cot(x)$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=arc\cot(x)=\cot^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.21), επειδή $f(x)=arc\cot(x)=\cot^{-1}(x)$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της συνεφαπτομένης ορισμένης στο $(0,\pi)$, συνεπώς έχει την ίδια μονοτονία με τη συνάρτηση της συνεφαπτομένης, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.).



Σχήμα 1.21: Οι γραφικές παραστάσεις τόξο συνεφαπτομένης $f(x)=arc\cot(x)=\cot^{-1}(x)$ και εφαπτομένης $f^{-1}(x)=\cot(x)$.

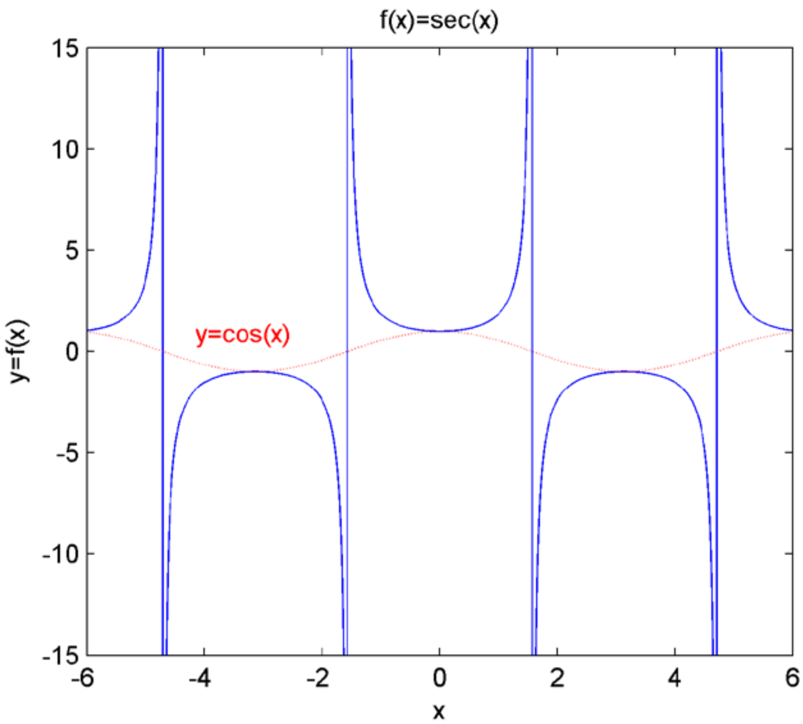
Ορισμός 1.5.17.

i) Έστω $A=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **τέμνουσας** (secant) της γωνίας $x\in A$.

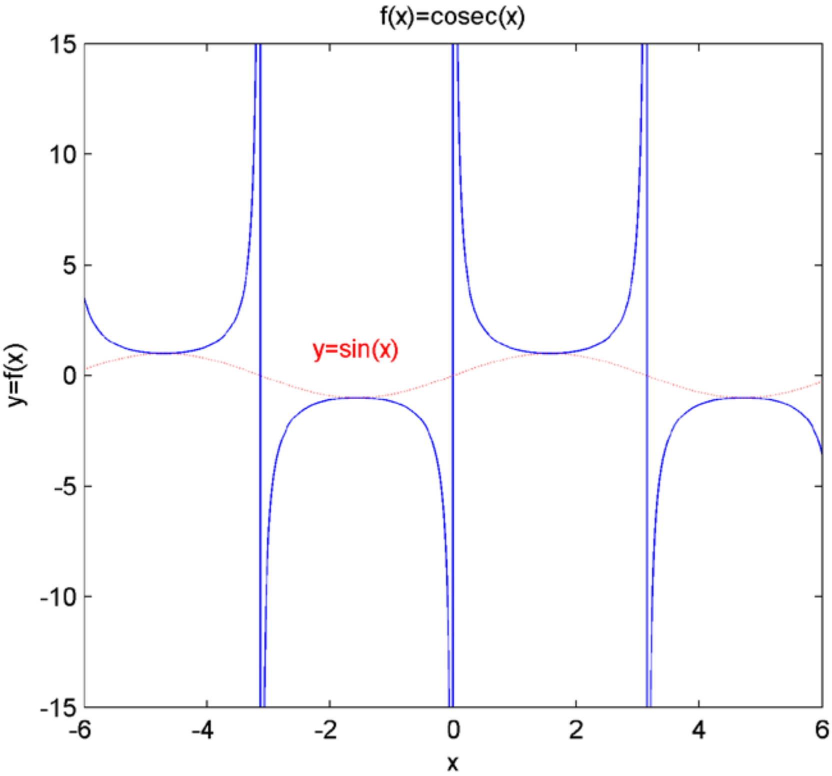
ii) Έστω $A=\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}=\mathrm{cosec}(x)$, ονομάζεται συνάρτηση **συντέμνουσας** (cosecant) της γωνίας $x\in A$.

Στο Σχήμα 1.22 αναπαριστάνεται η γραφική παράσταση της τέμνουσας και στο Σχήμα 1.23 της συντέμνουσας.

Παρατηρήστε ότι στα σχήματα απεικονίζονται οι κατακόρυφες ευθείες, $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, που είναι οι «ασύμπτωτες» των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων των $f(x)=\sec(x)$, $f(x)=\mathrm{cosec}(x)$, καθώς οι συναρτήσεις δεν ορίζονται στα αντίστοιχα x, ωστόσο αυτή είναι η αδυναμία των σχεδιαστικών λογισμικών.



Σχήμα 1.22: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνουσας $f(x)=\sec(x)$.



Σχήμα 1.23: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συντέμνουσας $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$.

1.5.18. Τυπολόγιο τριγωνομετρικών αριθμών

Στον Πίνακα 1.5.1 αναφέρονται μερικές από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Πίνακας 1.5.1: Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1.	$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$	
2.	$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	
3.	$\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
4.	$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$	
5.	$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1$	

6.	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$	
7.	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\cos(y)$	
8.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin(x)$
9.	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, $\sin(2k\pi + x) = \sin(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	
10.	$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$, $\cos(2k\pi + x) = \cos(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	
11.	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$, $\tan(\pi + x) = \tan(x)$, $\tan(2k\pi + x) = \tan(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	
12.	$\cot(\pi - x) = -\cot(x)$, $\cot(\pi + x) = \cot(x)$, $\cot(2k\pi + x) = \cot(x)$, $k \in \mathbb{Z}$	
13.	$\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\cot(-x) = -\cot(x)$	
14.	$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$	$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Στον Πίνακα 1.5.2, παρουσιάζεται η λύση κάθε τριγωνομετρικής εξίσωσης, όπου x είναι η άγνωστη γωνία και ω η γνωστή τιμή μίας γωνίας σε ακτίνια.

Πίνακας 1.5.2: Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Εξίσωση	**Λύση**
$\sin(x) = \sin(\omega)$	$x = 2k\pi + \omega$ ή $x = (2k+1)\pi - \omega$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = \cos(\omega)$	$x = 2k\pi \pm \omega$, $k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x) = \tan(\omega)$	$x = k\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x) = \cot(\omega)$	$x = k\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$

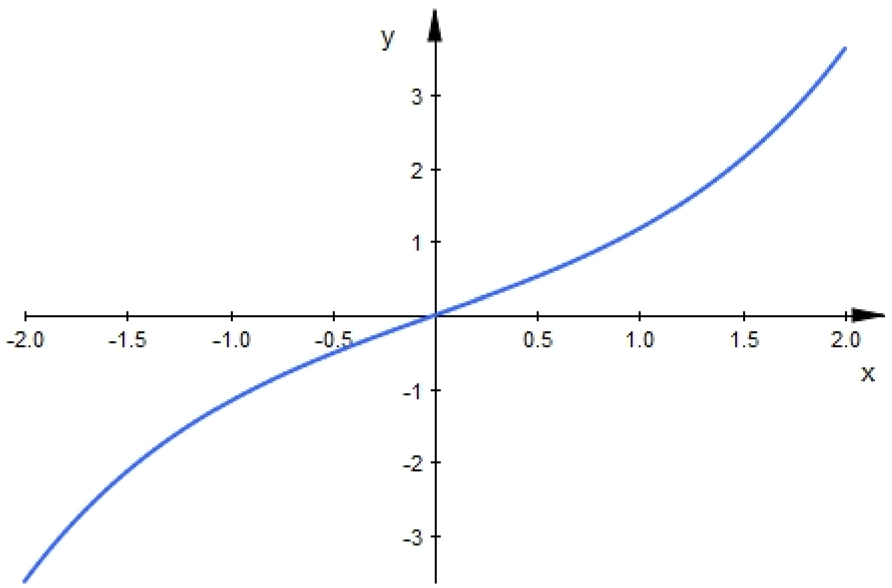
1.6. Υπερβολικές συναρτήσεις

Στην ενότητα ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις, οι ορισμοί των οποίων εξαρτώνται από την εκθετική συνάρτηση e^x, μελετώνται χαρακτηριστικές ιδιότητές τους και εξετάζεται η ύπαρξη αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού των αρχικών συναρτήσεων ή σε κατάλληλο υποσύνολό του.
Οι υπερβολικές συναρτήσεις ονομάστηκαν έτσι εξαιτίας της γεωμετρικής τους σχέσης με την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, (βλέπε, Εφαρμογή 1.6.16, (i)).

Ορισμός 1.6.1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικού ημιτόνου** (hyperbolic sine) και συμβολίζεται με $\sinh$, δηλαδή,

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ x\in\mathbb{R}. \tag{1.6.1}$$

Η γραφική παράσταση της $\sinh$ αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.24.



Σχήμα 1.24: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολικό ημίτονο $f(x)=\sinh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.2.

i) Η συνάρτηση $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ μηδενίζεται στο $x=0$, η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.24 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $\mathbf{0}$ των αξόνων, συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή, το οποίο αποδεικνύεται και αλγεβρικά, επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh(x),$$

από όπου προκύπτει ότι η $\sinh$ επαληθεύει την ισότητα (1.2.4) του Ορισμού 1.2.15.

ii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.24 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $\sinh$ είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iii) Επειδή $\sinh$ είναι γνήσια αύξουσα συμπεραίνουμε ότι, $\sinh x$ είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

iv) Η συνάρτηση $\sinh$ είναι συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$.
Πράγματι, για δοσμένο $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sinh(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow 2y - e^x + \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση επιλύεται ως προς e^x. Επειδή, $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$, έχουμε

$$e^x = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}. \tag{1.6.2}$$

Από την (1.6.2) προκύπτει

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \tag{1.6.3}$$

από όπου είναι φανερό ότι $x \in \mathbb{R}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών $\mathbb{R}$, (βλέπε, Ορισμός 1.4.3, Σχήμα 1.11).

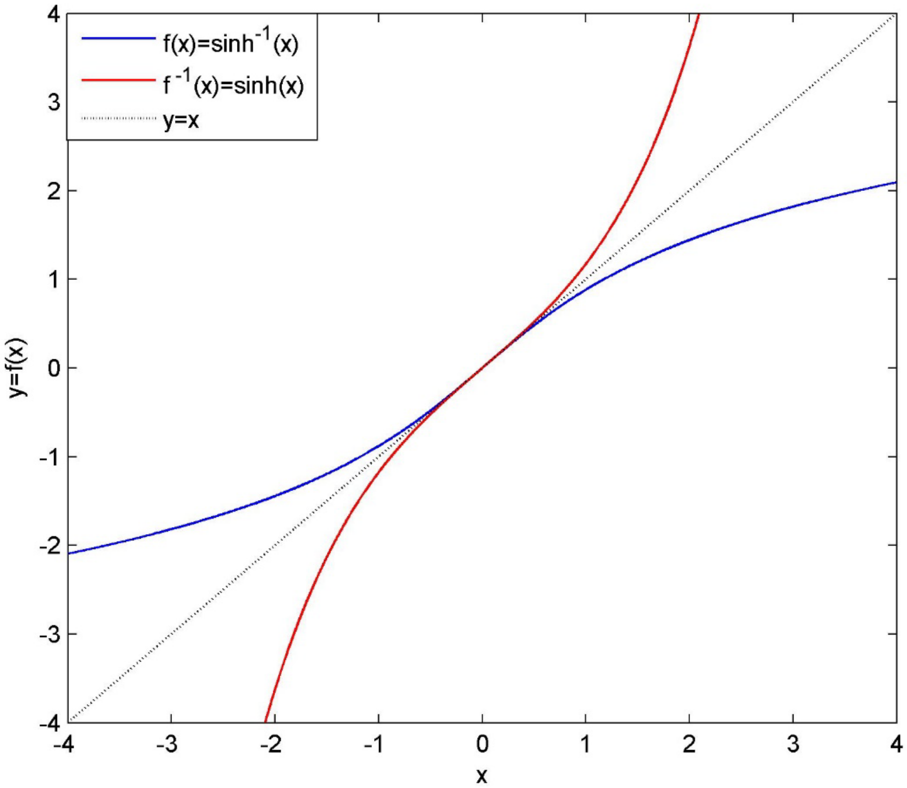
Σημειώστε ότι, η άλλη ρίζα του τριωνύμου απορρίπτεται, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και η άλλη ρίζα $e^x = \dfrac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$, χρησιμοποιώντας $e^x > 0$, μπορούμε να γράψουμε $y - \sqrt{y^2+1} > 0 \Rightarrow y > \sqrt{y^2+1} > 0$, που είναι άτοπο, (υπενθυμίζεται ότι $y \in \mathbb{R}$).

v) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iii)-(iv) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x)$ είναι 1-1, συνεπώς σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\sinh$, η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.3. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\sinh x$ στην (1.6.1). Η αντίστροφη συνάρτηση της $\sinh$ συμβολίζεται $\sinh^{-1}$ ή $arc\sinh$, και ορίζεται από την (1.6.3) να είναι η συνάρτηση $\sinh^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.6.4}$$

Στο Σχήμα 1.25, η γραφική παράσταση της $\sinh^{-1}$ είναι με μπλε χρώμα.



Σχήμα 1.25: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x)=\sinh^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x)=\sinh(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.4.

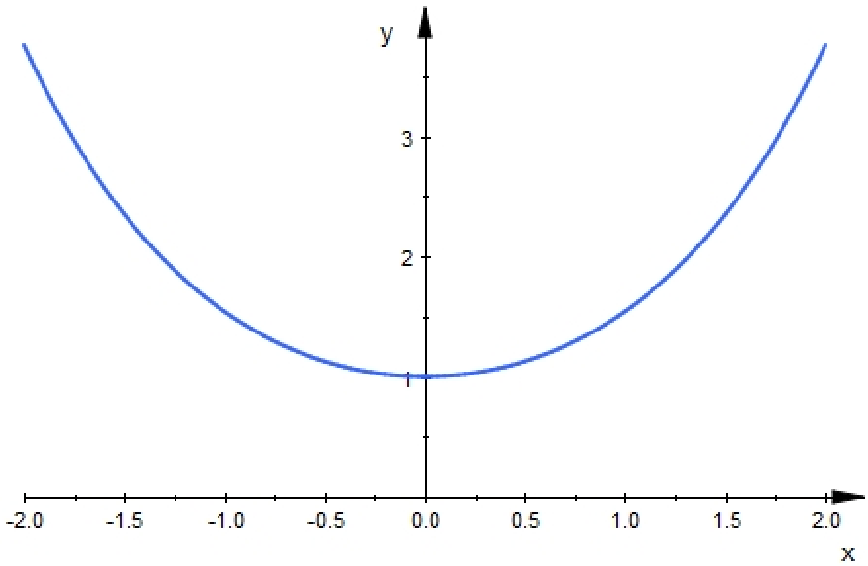
i) Στο Σχήμα 1.25 αναπαριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\sinh^{-1}(x)$ (με μπλε χρώμα), χρησιμοποιώντας την (1.6.4) με $x\in[-4,4]$, και της αντίστροφής της, $f^{-1}(x)=\sinh(x)$, με κόκκινο χρώμα. Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sinh^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.25), επειδή $\sinh^{-1}$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της $\sinh$, συνεπώς οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μονοτονία, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.).

Ορισμός 1.6.5. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, με $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικού συνημιτόνου** (hyperbolic cosine) και συμβολίζεται με $\cosh$, δηλαδή,

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ x\in\mathbb{R}. \qquad (1.6.5)$$

Η γραφική παράσταση της $\cosh$ αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.26.



Σχήμα 1.26: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολικό συνημίτονο $f(x)=\cosh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.6.

i) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.26 συμπεραίνουμε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης cosh με $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'0y$, συνεπώς η συνάρτηση είναι άρτια, το οποίο αποδεικνύεται και αλγεβρικά, επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε
$$\cosh(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh(x),$$
από όπου προκύπτει ότι η cosh επαληθεύει την ισότητα (1.2.3) του Ορισμού 1.2.15.

ii) Επειδή $e^x>0$ είναι φανερό ότι $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$. Συνεπώς το πεδίο τιμών της cosh είναι $(0,+\infty)$, (βλέπε, Σχήμα 1.26).

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση cosh είναι άρτια και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'0y$ στο σημείο $A(0,1)$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της cosh είναι $(0,1]$ ή $[1,+\infty)$. Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.26 συμπεραίνουμε ότι, το σύνολο τιμών της cosh είναι $[1,+\infty)$, (βλέπε, στη συνέχεια Παρατήρηση 1.6.6 (vi) και Κεφάλαιο 5).

iii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.26 συμπεραίνουμε ότι, η συνάρτηση cosh είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, και γνήσια αύξουσα $[0,+\infty)$, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Η συνάρτηση cosh **δεν** είναι μία αμφιμονοσήμαντη στο πεδίο ορισμού της, επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\cosh(x)=\cosh(-x)$ ως άρτια συνάρτηση, επομένως, η cosh **δεν** είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$.

v) Ο περιορισμός της cosh, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ ή $[0,+\infty)$, είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα, επειδή στο κάθε διάστημα η συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4., Παρατήρηση 1.6.6. (iii)).

vi) Η συνάρτηση cosh είναι συνάρτηση επί του $[1,+\infty)$.

Πράγματι, για δοσμένο $y\in[1,+\infty)$ αναζητούμε $x\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε
$$\cosh(x)=y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-2ye^x+1=0.$$
Η τελευταία εξίσωση επιλύεται ως προς e^x. Επειδή, $\Delta=4y^2-4\geq 0$, ($y\geq 1$), υπάρχουν δύο ρίζες του παραπάνω τριωνύμου,

$$e^{x_+}=\frac{2y+2\sqrt{y^2-1}}{2}=y+\sqrt{y^2-1}\,, \tag{1.6.6}$$

και

$$e^{x_-}=\frac{2y-2\sqrt{y^2-1}}{2}=y-\sqrt{y^2-1} \tag{1.6.7}$$

Επομένως, για $y\geq 1$, από τον Ορισμό 1.4.3., την (1.4.3) και την (1.6.6) συνεπάγεται

$$x_+=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right), \tag{1.6.8}$$

ενώ από την (1.4.3) και την (1.6.7)

$$x_-=\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right). \tag{1.6.9}$$

Επειδή $y\geq 1$ ισχύουν οι ακόλουθες ανισώσεις, $\sqrt{y^2-1}>0\Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}>y\geq 1$, από όπου (1.6.6) γράφεται: $e^{x_+}=y+\sqrt{y^2-1}\geq 1=e^0$. Επιπλέον, η εκθετική συνάρτηση e^x είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Παρατήρηση 1.4.2. (ii)), συνεπώς $e^{x_+}\geq e^0\Rightarrow x_+\geq 0$, άρα $x_+\in[0,+\infty)$.

Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι $y-\sqrt{y^2-1}<1$.

Πράγματι, αν $y-\sqrt{y^2-1}\geq 1\Rightarrow y-1\geq\sqrt{y^2-1}\Rightarrow(y-1)^2\geq y^2-1\Rightarrow y\leq 1$, που είναι αδύνατο από την υπόθεση $y\geq 1$. Συνδυάζοντας τον παραπάνω ισχυρισμό με την (1.6.7) έχουμε

$$e^{x_-}=y-\sqrt{y^2-1}<1=e^0,$$

από όπου η μονοτονία της e^x επιτρέπει να γράψουμε $e^{x_-}\leq e^0\Rightarrow x_-\leq 0\Rightarrow x_-\in(-\infty,0]$.

vii) Ο περιορισμός της $\cosh$ στο $(-\infty,0]$ ή στο $[0,+\infty)$ είναι συνάρτηση 1-1, επειδή $\cosh$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $[1,+\infty)$, (βλέπε, Παρατηρήσεις 1.6.6 (v), (vi)). Συνεπώς, στο συγκεκριμένο πεδίο ορισμού σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\cosh$, η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Στη συνέχεια ο περιορισμός της $\cosh$ στο $[0,+\infty)$ συμβολίζεται με $\cosh_+$, και ο περιορισμός στο $(-\infty,0]$ με $\cosh_-$.

Ορισμός 1.6.7.

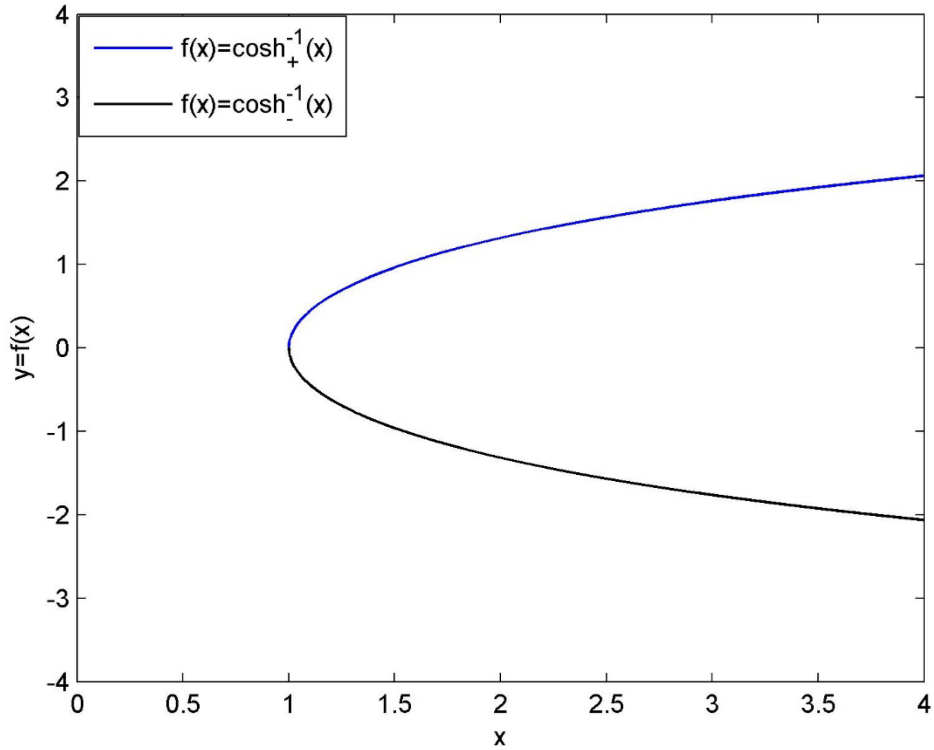
i) Έστω η 1-1 συνάρτηση $\cosh_+:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της $\cosh_+$ συμβολίζεται $\cosh_+^{-1}$ ή $arc\cosh_+$ και ορίζεται από την (1.6.8) να είναι η συνάρτηση $\cosh_+^{-1}:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$, με

$$\cosh_+^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty). \tag{1.6.10}$$

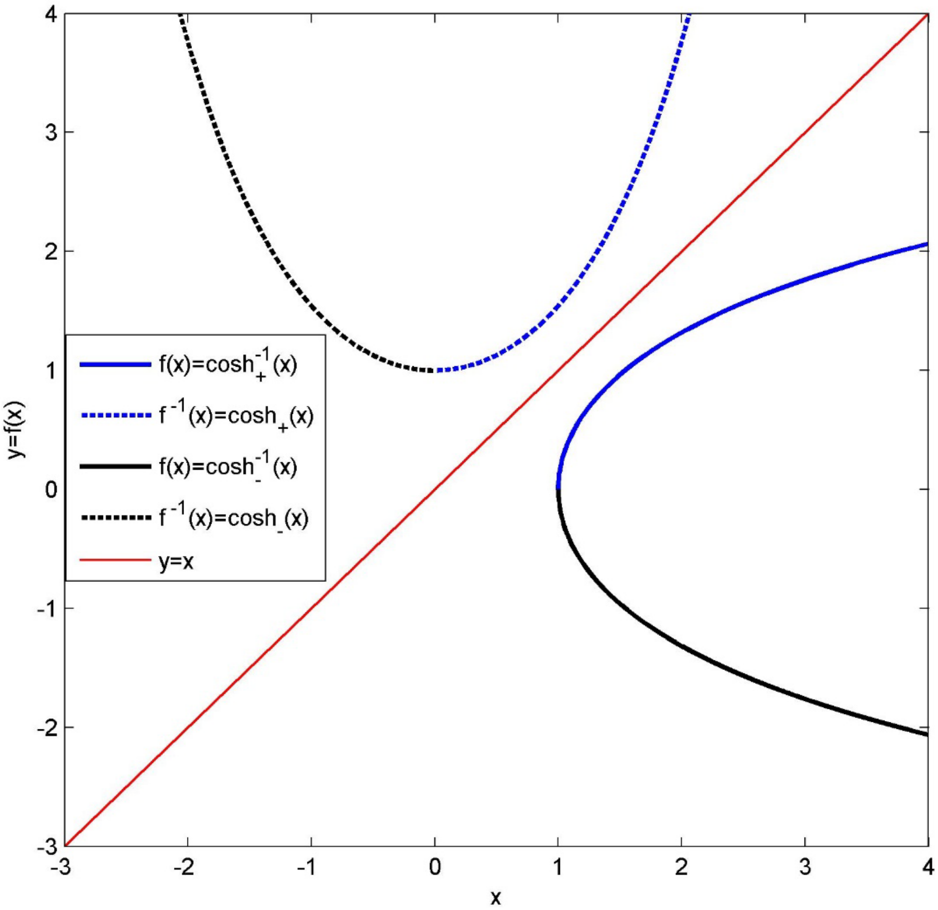
ii) Έστω η 1-1 συνάρτηση $\cosh_-:(-\infty,0]\to[1,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση της $\cosh_-$ συμβολίζεται $\cosh_-^{-1}$ ή $arc\cosh_-$ και ορίζεται από την (1.6.9) να είναι η συνάρτηση $\cosh_-^{-1}:[1,+\infty)\to(-\infty,0]$, με

$$\cosh_-^{-1}(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty). \tag{1.6.11}$$

Στο Σχήμα 1.27, η γραφική παράσταση της $f(x)=\cosh_+^{-1}(x)$ είναι το τμήμα της καμπύλης με μπλε χρώμα και της συνάρτησης $f(x)=\cosh_-^{-1}(x)$ είναι το τμήμα της καμπύλης με μαύρο χρώμα.



Σχήμα 1.27: Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης υπερβολικό συνημίτονο $f(x) = \cosh^{-1}(x)$.



Σχήμα 1.28: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\cosh_{+}^{-1}(x)$, $\cosh_{-}^{-1}(x)$, $\cosh_{+}(x)$ και $\cosh_{-}(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.8.

i) Στο Σχήμα 1.28 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των υπερβολικών συναρτήσεων συνημιτόνου που αναφέρονται στον Ορισμό 1.6.7. Η καμπύλη με τη συνεχή γραμμή αντιστοιχεί στην αντίστροφη συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου και η καμπύλη με τη διακεκομμένη γραμμή στη συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου.

Το μέρος της καμπύλης με μπλε χρώμα και συνεχή γραμμή αποτελεί τη γραφική παράσταση της $\cosh_+^{-1}$, ενώ με διακεκομμένη γραμμή (dash) τη γραφική παράσταση της $\cosh_+$.

Το μέρος της καμπύλης με μαύρο χρώμα και συνεχή γραμμή αποτελεί τη γραφική παράσταση της $\cosh_-^{-1}$, ενώ με διακεκομμένη γραμμή (dash) τη γραφική παράσταση της $\cosh_-$.

Σχεδιασμένη με κόκκινο χρώμα είναι η ευθεία $y = x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

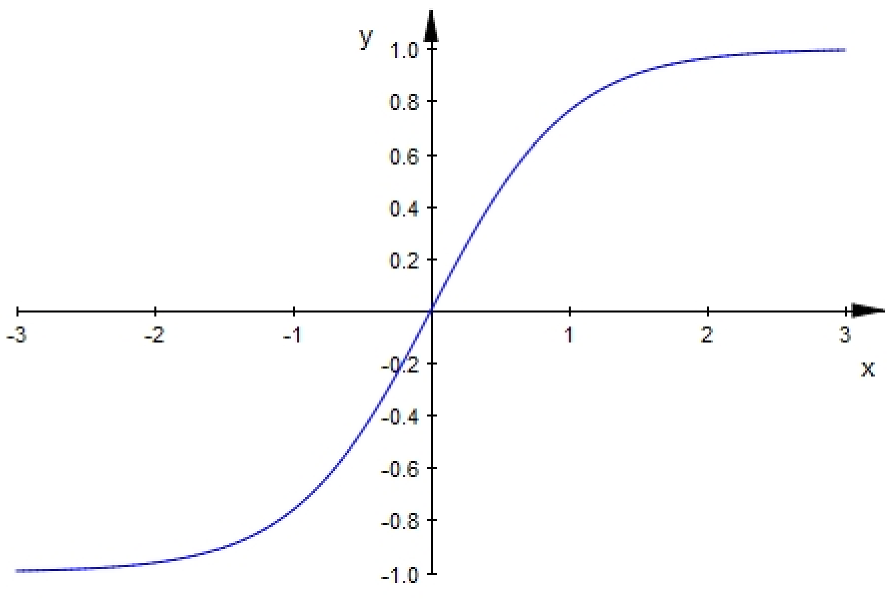
ii) Στο $[1, +\infty)$, η συνάρτηση $\cosh_+^{-1}$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.28), επειδή $\cosh_+$ στο $[0, +\infty)$ είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Παρατήρηση 1.6.6 (iii) και Πρόταση 1.3.6.).

Ανάλογα, η συνάρτηση $\cosh_-^{-1}$ είναι γνήσια φθίνουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.28), επειδή $\cosh_-$ στο $(-\infty, 0]$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Ορισμός 1.6.9. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to (-1,1)$, με $f(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικής εφαπτομένης** (hyperbolic tangent) και συμβολίζεται με $\tanh$, δηλαδή,

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (1.6.12)$$

Η γραφική παράσταση της $\tanh$ αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.29.



Σχήμα 1.29: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολική εφαπτομένη $f(x) = \tanh(x)$.

Παρατηρήσεις 1.6.10.

i) Από την (1.6.12) είναι φανερό ότι $\tanh(0)=\dfrac{e^{0}-e^{-0}}{e^{0}+e^{-0}}=0$, συνεπώς, η γραφική παράσταση της $\tanh$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\tanh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων, (βλέπε, Σχήμα 1.29, Εφαρμογή 1.6.16 (viii)), συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή.

ii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.29 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\tanh$ είναι γνήσια αύξουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iii) Επειδή $\tanh$ είναι γνήσια αύξουσα συμπεραίνουμε ότι, $\tanh$ είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

iv) Η συνάρτηση $\tanh$ είναι συνάρτηση επί του $(-1,1)$. Πράγματι, από την (1.6.12) έχουμε

$$y=\tanh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\Leftrightarrow y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Leftrightarrow y\left(e^{2x}+1\right)-e^{2x}+1=0,$$

από όπου προκύπτει

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}. \tag{1.6.13}$$

Επειδή $e^{2x}>0$, στην (1.6.13) πρέπει να ισχύει $\dfrac{1+y}{1-y}>0\Rightarrow y\in(-1,1)$.

Άρα, το σύνολο τιμών της $\tanh$ είναι $(-1,1)$.

Επιπλέον, συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.4.3., την (1.4.3) και την (1.6.13) μπορούμε να γράψουμε

$$x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \tag{1.6.14}$$

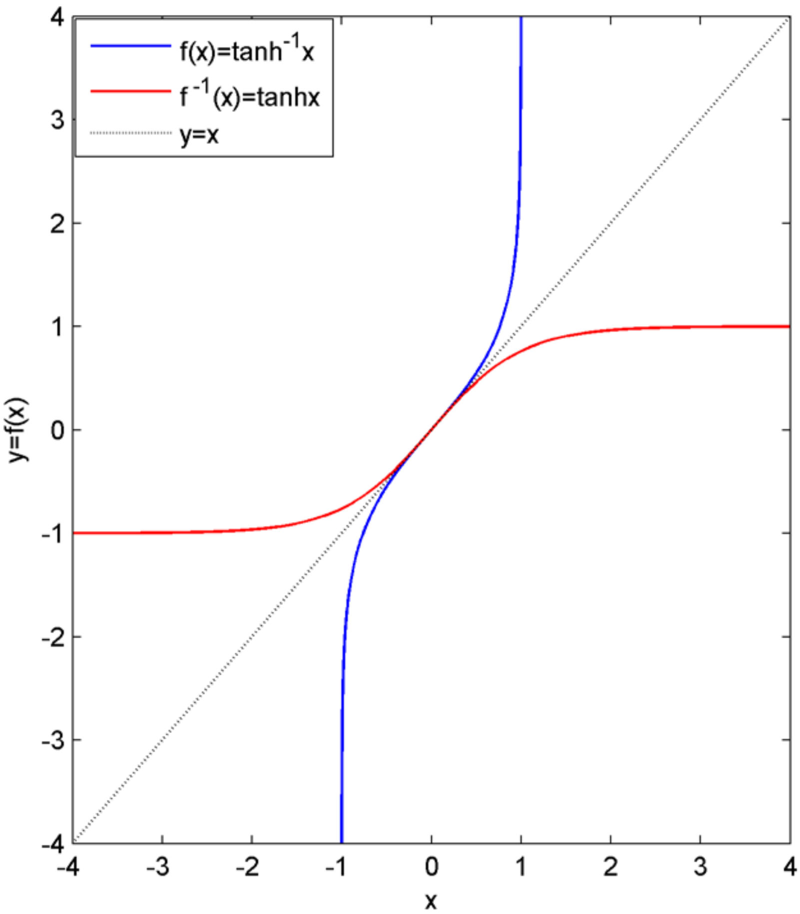
από όπου είναι φανερό ότι $x\in\mathbb{R}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, (βλέπε, Ορισμός 1.4.3, Σχήμα 1.11).

v) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iii)-(iv) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\tanh$ είναι 1-1, συνεπώς σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\tanh$, η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.11. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\tanh:\mathbb{R}\to(-1,1)$, με $\tanh(x)$ όπως στην (1.6.12). Η αντίστροφη της $\tanh$ συμβολίζεται $\tanh^{-1}$ ή $arc\tanh$, και ορίζεται από την (1.6.14) να είναι η συνάρτηση $\tanh^{-1}:\ (-1,1)\to\mathbb{R}$, με

$$\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \text{για κάθε } x\in(-1,1). \tag{1.6.15}$$

Στο Σχήμα 1.30, η γραφική παράσταση της $\tanh^{-1}$ είναι με μπλε χρώμα.



Σχήμα 1.30: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x)=\tanh^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x)=\tanh(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.12.

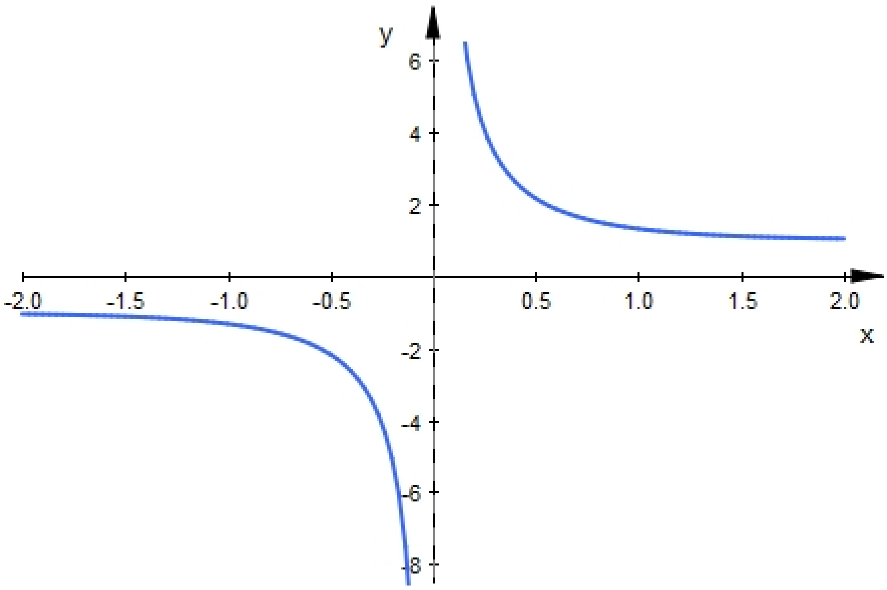
i) Οι γραφικές παραστάσεις των υπερβολικών συναρτήσεων εφαπτομένης, που αναφέρονται στον Ορισμό 1.6.11 αναπαριστάνονται στο Σχήμα 1.30. Η καμπύλη με μπλε χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της $\tanh^{-1}$, χρησιμοποιώντας την (1.6.15), ενώ η καμπύλη με κόκκινο χρώμα αποτελεί τη γραφική παράσταση της $\tanh$.
Σχεδιασμένη με διακεκομμένη γραμμή είναι η ευθεία $y=x$, άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των δύο υπερβολικών συναρτήσεων εφαπτομένης.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\tanh^{-1}(x)$, για κάθε $x\in(-1,1)$, είναι γνήσια αύξουσα, (βλέπε, Σχήμα 1.30), επειδή $\tanh^{-1}$ ορίστηκε ως η αντίστροφη συνάρτηση της $\tanh$, συνεπώς οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μονοτονία, (βλέπε, Πρόταση 1.3.6.).

Ορισμός 1.6.13. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}-\{0\}\to(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, με $f(x)=\dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, ονομάζεται συνάρτηση **υπερβολικής συνεφαπτομένης** (hyperbolic cotangent) και συμβολίζεται με $\coth$, δηλαδή,

$$\coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}. \tag{1.6.16}$$

Η γραφική παράσταση της $\tanh$ αναπαριστάνεται στο Σχήμα 1.31.



Σχήμα 1.31: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολική συνεφαπτομένη $f(x)=\coth(x)$

Παρατηρήσεις 1.6.14.

i) Συνδυάζοντας τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης από τους (1.6.12) και (1.6.16) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ ισχύει

$$\tanh(x)\cdot\coth(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1.$$

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\coth(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή **0** των αξόνων, (βλέπε, Σχήμα 1.31, Εφαρμογή 1.6.16 (viii)), συνεπώς, η συνάρτηση είναι περιττή.

iii) Παρατηρώντας στο Σχήμα 1.31 συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, η συνάρτηση coth είναι γνήσια φθίνουσα, (η απόδειξη γίνεται με τη μεθοδολογία, που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5).

iv) Επειδή coth είναι γνήσια φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι, coth είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, (βλέπε, Πρόταση 1.3.4.).

v) Η συνάρτηση coth είναι συνάρτηση επί του $\mathbb{R}-[-1,1]$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, από $\tanh(x)\cdot\coth(x)=1$ είναι φανερό ότι $\tanh(x)\neq 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\coth(x)=\frac{1}{\tanh(x)}. \tag{1.6.17}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.9 και την Παρατήρηση 1.6.10 (iv) ισχύει $\tanh(x)\in(-1,1)$, δηλαδή, $-1<\tanh(x)<0$, $0<\tanh(x)<1$, ($\tanh(x)\neq 0$).

Χρησιμοποιώντας (1.6.17) στις δύο ανισώσεις παίρνουμε:

- $-1<\tanh(x)<0 \Rightarrow -1>\dfrac{1}{\tanh(x)} \Rightarrow \coth(x)<-1$, δηλαδή, $\coth(x)\in(-\infty,-1)$
- $0<\tanh(x)<1 \Rightarrow \dfrac{1}{\tanh(x)}>1 \Rightarrow \coth(x)>1$, δηλαδή, $\coth(x)\in(1,+\infty)$

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της coth είναι $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}-[-1,1]$.

Από την (1.6.16) έχουμε

$$y=\coth(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\Leftrightarrow y=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\Leftrightarrow y\left(e^{2x}-1\right)-e^{2x}-1=0,$$

από όπου προκύπτει

$$e^{2x}=\frac{1+y}{y-1}. \tag{1.6.18}$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.4.3., την (1.4.3) και την (1.6.18) μπορούμε να γράψουμε

$$x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), \tag{1.6.19}$$

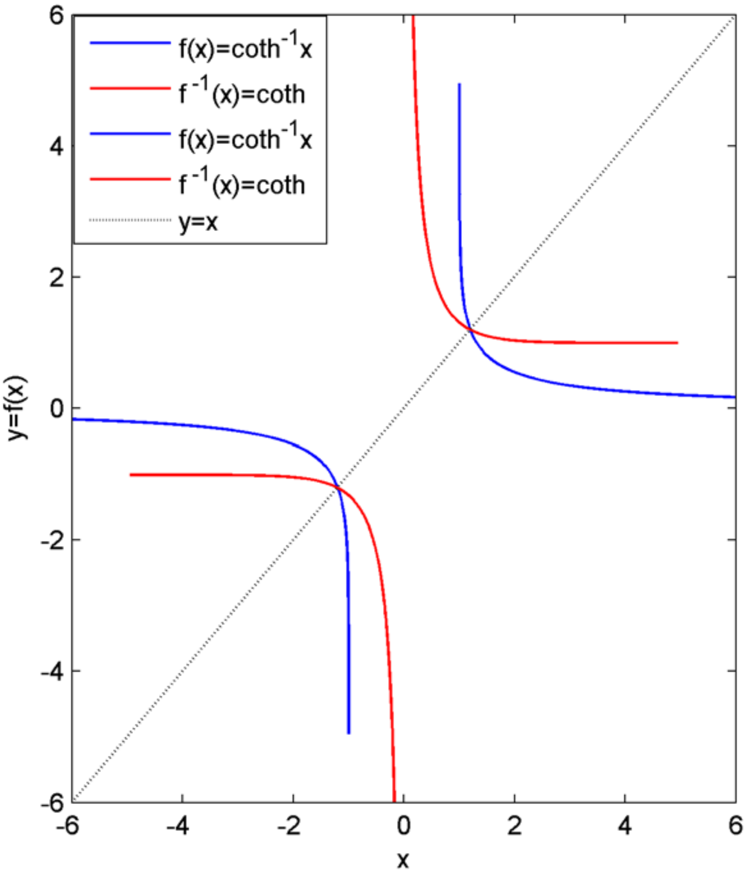
από όπου είναι φανερό ότι $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, και $\frac{y+1}{y-1}\neq 1$.

vi) Συνδυάζοντας τις ιδιότητες από (iv)-(v) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\coth$ είναι 1-1, συνεπώς σύμφωνα με την (1.2.1) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $\coth$, η οποία διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.15. Έστω η 1-1 συνάρτηση $\coth:\mathbb{R}-\{0\}\to(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, με $\coth(x)$ όπως στην (1.6.16). Η αντίστροφη της $\coth$ συμβολίζεται $\coth^{-1}$ ή $arc\coth$, και ορίζεται από την (1.6.19) να είναι η συνάρτηση $\coth^{-1}:\ (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}-\{0\}$, με

$$\coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ \text{για κάθε } |x|>1. \tag{1.6.20}$$

Στο Σχήμα 1.32, η γραφική παράσταση της $\coth^{-1}$ σχεδιάζεται με μπλε χρώμα και αποτελείται από δύο τμήματα ανάλογα με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στο ίδιο σχήμα η γραφική παράσταση της $\coth$ αναπαριστάνεται με κόκκινο χρώμα, καθώς και η ευθεία $y=x$, που είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφημάτων των παραπάνω συναρτήσεων.



Σχήμα 1.32: Οι γραφικές παραστάσεις $f(x)=\coth^{-1}(x)$ και $f^{-1}(x)=\coth(x)$

Εφαρμογή 1.6.16.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες :

i) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

ii) $\sinh^2(x)+\cosh^2(x)=\cosh(2x)$

iii) $2\sinh(x)\cdot\cosh(x)=\sinh(2x)$

iv) $\cosh^2(x)=\dfrac{1+\cosh(2x)}{2}$, $\sinh^2(x)=\dfrac{\cosh(2x)-1}{2}$

v) $\cosh(x)+\sinh(x)=e^x$, $\cosh(x)-\sinh(x)=e^{-x}$

vi) $1-\tanh^2(x)=\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$

vii) $\tanh(x)\cdot\coth(x)=1$

viii) $\sinh(-x)=-\sinh(x)$, $\cosh(-x)=\cosh(x)$, $\tanh(-x)=-\tanh(x)$, $\coth(-x)=-\coth(x)$

Απόδειξη: Όλες οι ταυτότητες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων. Αναλυτικότερα:

i) Από την (1.6.1) και (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=1$$

Εδώ, αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $X = \cosh(x)$, $Y = \sinh(x)$, τότε η παραπάνω ταυτότητα είναι η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής $X^2 - Y^2 = 1$, δηλαδή καθώς $x \in \mathbb{R}$, το σημείο (X, Y) του επιπέδου $x'0y$ διατρέχει κάποιον κλάδο της υπερβολής $X^2 - Y^2 = 1$, (Ρασσιάς, 2014). Σε αυτήν την ιδιότητα οφείλεται ο χαρακτηρισμός των συναρτήσεων ως «υπερβολικές». Το άλλο συνδετικό της ονομασίας των συναρτήσεων συνδέται με την ονομασία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, επειδή ισχύουν τύποι που «θυμίζουν τριγωνομετρικές ταυτότητες», (βλέπε και σύγκρινε, 1.5.18 Τυπολόγιο, Εφαρμογή 1.6.16 (ii), (iii), (vi), (vii), Ορισμός 1.6.9, Ορισμός 1.6.13).

ii) Από την (1.6.1) και (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)$$

iii) Αντικαθιστώντας $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ από τις (1.6.1) και (1.6.5), αντίστοιχα, έχουμε:

$$2\sinh(x) \cdot \cosh(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

iv) Η πρώτη ταυτότητα προκύπτει άμεσα προσθέτοντας τις ισότητες στις (i) και (ii), ενώ η δεύτερη προκύπτει μετά από την αφαίρεση (i) και (ii).

v) Προκύπτει μετά από αντικατάσταση $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ από τις (1.6.1) και (1.6.5), αντίστοιχα.

vi) Διαιρώντας την (i) με $\cosh^2(x)$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό της υπερβολικής εφαπτομένης, (βλέπε, Ορισμός 1.6.9) παράγεται άμεσα η ισότητα.

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$ ονομάζεται **υπερβολική τέμνουσα** (hyperbolic secant) και συμβολίζεται με sech.

vii) Η απόδειξη στηρίζεται στον ορισμό των αντίστοιχων υπερβολικών συναρτήσεων (Ορισμός 1.6.9, Ορισμός 1.6.13, αντίστοιχα) και δίνεται στην Παρατήρηση 1.6.14 (i).

viii) Επειδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την (1.6.1) έχουμε:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την (1.6.5) έχουμε:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες και τον Ορισμός 1.6.9 έχουμε:

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες των $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ και τον Ορισμό 1.6.13, έχουμε:

$$\coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -\coth(x)$$

Από την ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\sinh$, $\tanh$ και $\coth$ είναι περιττές, ενώ η $\cosh$ είναι άρτια, (βλέπε, Παρατηρήσεις 1.6.2 (i), 1.6.10 (ii), 1.6.14 (ii) και 1.6.6 (i), αντίστοιχα). ◊◊

1.7. Πραγματικές συναρτήσεις σε προγραμματιστικό περιβάλλον

Προκειμένου να υπολογίσουμε μαθηματικά ή αριθμητικά μεγέθη, να αναπτύξουμε αλγορίθμους, να μοντελοποιήσουμε, να αναπαραστήσουμε, να αναλύσουμε και να οπτικοποιήσουμε δεδομένα, ή ακόμη να υλοποιήσουμε έτοιμους αλγορίθμους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά λογισμικά, (Καραμπετάκης; Καραμπετάκης, Σταματάκης, & Ψωμόπουλος, 2004; Maxima). Ο αναγνώστης, ως ένα εργαλείο υποβοήθησης στη μελέτη του, μπορεί να χρησιμοποιήσει το προγραμματιστικό περιβάλλον Octave. Το Octave είναι ένας ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του εμπορικού λογισμικού/προγράμματος Matlab και είναι διαθέσιμο από το δικτυακό τόπο (GNU Octave). Ένας οδηγός χρήσης για το περιβάλλον προγραμματισμού Matlab, μπορεί να βρεθεί (Moler, 2010; Γεωργίου & Ξενοφώντος, 2007; Παπαγεωργίου, Τσίτουρας, & Φαμέλης, 2004; Στεφανίδης, 2014; Μούσας, 2010; Οδηγός Χρήσης Matlab).

Η συνάρτηση f της πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x ορίζεται στην Matlab/Octave χρησιμοποιώντας τις εντολές `inline` και `vectorize`. Η σύνταξη των εντολών ορίζεται ως ακολούθως.

Σύνταξη εντολής: `inline('τύπος συνάρτησης')`

ή `inline(vectorize('τύπος συνάρτησης'))`

Επιπλέον υπάρχει δυνατότητα να υπολογισθεί η τιμή της f για μία συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x καλώντας τη συνάρτηση (με το όνομά της) και στη θέση της μεταβλητής σημειώνεται η επιθυμητή τιμή για τη μεταβλητό.

Για παράδειγμα, στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ και υπολογίζεται η τιμή $f(-1)$ με τη χρήση της εντολής `inline`.

```
f = inline('1/(x^3-1)')
```

Από την εκτέλεση της παραπάνω εντολής προκύπτει η απάντηση:

```
Inline function:
 f(x) = 1/(x^3-1)
```

Στη συνέχεια, από την εκτέλεση της εντολής

```
f(-1)
```

προκύπτει η απάντηση:

```
-0.5000
```

Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε :

```
f = inline(vectorize('1/(x^3-1)'))
```

Από την εκτέλεση της παραπάνω εντολής προκύπτει η απάντηση:

```
Inline function:
   f(x) = 1./(x.^3-1)
```

Στη συνέχεια, από την εκτέλεση της εντολής

```
f(-1)
```

προκύπτει η απάντηση:

```
-0.5000
```

◊◊

1.7.1 Συμβολικές εντολές

Η υλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων ή συναρτήσεων, δηλαδή, οι πράξεις μεταξύ μεταβλητών γίνεται με τη βοήθεια συμβολικών μεταβλητών, στις οποίες δεν χρειάζεται να έχουμε εκχωρήσει τιμή. Η δήλωση μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών x,y,s,a,… γίνεται με τη συμβολική εντολή `syms` και τους χαρακτήρες των μεταβλητών ως ακολούθως.

```
syms x y s a
```

Η εντολή `syms` είναι διαθέσιμη στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Οι επόμενες εντολές είναι πολύ χρήσιμες, καθώς υλοποιούν γνωστές μας έννοιες σε μία αλγεβρική παράσταση/συνάρτηση `f`, όπως είναι η αλγεβρική τιμή, το ανάπτυγμα, η απλοποίηση, η παραγοντοποίηση, η ρητή μορφή οι οποίες παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

`subs(x,a)`	αντικατάσταση της συμβολικής μεταβλητής x με την a, όπου a μπορεί να είναι μία νέα συμβολική μεταβλητή ή αριθμός
`subs(f,x,a)`	αντικατάσταση στην παράσταση f της συμβολικής μεταβλητής x με την a, όπου a μπορεί να είναι μία νέα συμβολική μεταβλητή που θα αντικαταστήσει τη x ή αν είναι αριθμητική τιμή, υπολογίζει την τιμή της αλγεβρικής παράστασης για x= a, δηλαδή, f(a)
`eval(a)`	αν a είναι αριθμητική τιμή αποθηκεύεται με αυτήν τη μορφή
`expand(f)`	ανάπτυγμα της f
`factor(f)`	παραγοντοποίηση της f
`simplify(f)`	απλοποίηση της f
`pretty(f)`	ρητή μορφή της f

Για παράδειγμα, στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$, υπολογίζονται οι τιμές $f(-1)$ και $f(0)$, παραγοντοποιείται η f, και δίνεται η ρητή μορφή της παραγοντοποίησης, γράφοντας:

```
syms x
f = 1/(x^3 – 1);
f1 = subs(f,x,-1)
f2 = subs(f,x,0)
ff = factor(f)
pretty(ff)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτουν οι απαντήσεις:

```
f1 = -0.5000
f2 = -1
ff = 1/((x - 1)*(x^2 + x + 1))
```

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

➢ Η σύνθεση δύο συναρτήσεων f, g, υπολογίζεται με την εντολή `compose` και τη συμβολική εντολή `syms` για να δηλωθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή `x` των συναρτήσεων. Οι εντολές είναι διαθέσιμες στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) και Octave με το Symbolic package (Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave).

Για τον υπολογισμό της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f, g, η εντολή `compose` δέχεται ως εισόδους:

- τις συναρτήσεις `f` και `g`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.

Σύνταξη εντολής: `compose(f,g,x)`

Έχει σημασία η σειρά καταχώρησης των συναρτήσεων στην `compose`, πρώτα f και μετά g υπολογίζεται η $f \circ g$, με διαφορετική σειρά καταχώρησης υπολογίζεται η $g \circ f$.

Για παράδειγμα, θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(x)=2x-1$ και $g(x)=x^2+3x-1$, που δόθηκαν στο Παράδειγμα 1.2.7 (iv), για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f \circ g$, που στη συνέχεια ονομάζεται `fog`, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
g = x^2+3*x-1;
fog = compose(f,g)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
fog = 2*x^2+6*x-3
```

Αν χρειαζόταν να υπολογίσουμε την $g \circ f$, η οποία στη συνέχεια ονομάζεται `gof`, θα γράφαμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
g = x^2+3*x-1;
gof = compose(g,f)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
gof = 6*x+(2*x-1)^2-4
```

Εκτελώντας την εντολή

```
gof = expand(gof)
```

παίρνουμε την ανάπτυξη της σύνθετης συνάρτησης `gof` ως

```
gof = 4*x^2+2*x-3
```

Τέλος, για τον υπολογισμό της $f \circ f$, η οποία στη συνέχεια ονομάζεται `fof`, θα γράφαμε:

```
syms x
f = 2*x-1;
fof = compose(f,f)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
fof = 4*x - 3
```

Τα αποτελέσματα των συνθέσεων `fog`, `gof`, και `fof`, που προκύπτουν με τη χρήση Matlab/ Octave, προφανώς ταυτίζονται με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος 1.2.7 (iv). ◊◊

➢ Η αντίστροφη συνάρτηση μίας συνάρτησης υπολογίζεται με την εντολή `finverse` και τη συμβολική εντολή `syms`, με την οποία δηλώνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.

Για τον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης f, η εντολή `finverse` δέχεται ως είσοδο:

- τη συνάρτηση `f`.
- την ανεξάρτητη μεταβλητή `x`.

Σύνταξη εντολής: `finverse(f,x)`

Η εντολή `finverse` είναι διαθέσιμη μόνο στο λογισμικό Matlab με το Symbolic Math Toolbox (Symbolic Math Toolbox) δεν είναι διαθέσιμη σε Octave.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της 1-1 συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$, μπορούμε να γράψουμε:

```
syms x
f = x^3;
finv = finverse(f,x)
```

Από την εκτέλεση των παραπάνω εντολών προκύπτει η απάντηση:

```
finv = x^(1/3)                  finverse(x^3) is not unique.
```

Από το μήνυμα καταλαβαίνουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση δεν είναι μοναδική. ◊◊

1.7.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης μίας μεταβλητής

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x_1, x_2]$ ορίζεται χρησιμοποιώντας δυο διανύσματα, που είναι πίνακες-γραμμή, ως ακολούθως:

- ένα διάνυσμα-γραμμή για την ανεξάρτητη μεταβλητή x: το διάνυσμα ορίζεται να έχει ως αρχική τιμή, την αρχική τιμή του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή την x_1, και ως τελική τιμή να έχει την τελική τιμή του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή την x_2. Οι ενδιάμεσες τιμές του διανύσματος είναι οι τιμές που δημιουργούνται από τη διαμέριση του διαστήματος $[x_1, x_2]$ σε $\frac{x_2 - x_1}{k}$ υποδιαστήματα, που το καθένα υποδιάστημα έχει μήκος ίσο με το βήμα k είναι $[x_{n-1}, x_n]$, όπου $x_n = x_1 + n\frac{x_2 - x_1}{k}$, $n = 1, 2, \ldots, k$, με $x_0 = x_1$, και
- ένα διάνυσμα-γραμμή για την εξαρτημένη μεταβλητή $f(x)$: το διάνυσμα έχει τιμές τις τιμές της συνάρτησης για $x = x_n$, όπου $x_n = x_1 + n\frac{x_2 - x_1}{k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Είναι προφανές ότι για να είναι σωστά ορισμένη μία συνάρτηση, πρέπει το μήκος του διανύσματος της ανεξάρτητης μεταβλητής να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος της εξαρτημένης μεταβλητής.
Εδώ χρειάζεται να σχολιάσουμε ότι :

- το πεδίο ορισμού διαιρείται σε $\frac{x_2 - x_1}{k}$ το πλήθος μικρά ισομήκη υποδιαστήματα με τη χρήση του βήματος k.
- Για να έχουν νόημα οι πράξεις πολλαπλασιασμού, δυνάμεων και διαίρεσης μεταξύ των τιμών του διανύσματος x χρησιμοποιείται η τελεία πριν το σύμβολο κάθε πράξης, δηλαδή, σημειώνεται .*, .^, ./.

Για παράδειγμα, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή έχει πεδίο ορισμού $[-1,1]$ και βήμα $k = 0.5$, γράφοντας

```
x = -1:0.5:1
```

εμφανίζεται ένα διάνυσμα με τιμές

```
x =  -1.0000   -0.5000    0    0.5000    1.0000
```

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$, με $x \in [-1,\ 1]$ και $k = 0.5$ μπορεί να οριστεί:

```
x = -1:0.5:1
f = x.^2-2*x+1
```

οι τιμές της συνάρτησης εμφανίζονται σε έναν πίνακα ως ακολούθως:

```
f = 4.0000    2.2500    1.0000    0.2500         0
```

Οι εντολές που παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα, είναι χρήσιμες κατά το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f μίας πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x. Τα διατεταγμένα σημεία κάθε γραφικής παράστασης είναι αποθηκευμένα σε ισομήκη διανύσματα x και f. Επιπλέον, στο ίδιο παράθυρο γραφικών μπορούν να παρουσιάζονται περισσότερες από μία γραφικές παραστάσεις (γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h) ή κάθε παράθυρο να χωρίζεται σε υποπαράθυρα και στο καθένα να παρουσιάζεται μία γραφική παράσταση.

`plot(x,f)`	η εντολή χρησιμοποιείται για την κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μίας πραγματικής ανεξάρτητης μεταβλητής x
`subplot(m,n,p)`	η εντολή επιτρέπει το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων mn συναρτήσεων, γι΄αυτό χωρίζει το παράθυρο γραφικών σε m x n υποπαράθυρα και τοποθετεί την επόμενη γραφική παράσταση στο p-υποπαράθυρο.
`hold on`	χρησιμοποιείται για να «κρατήσει-παγώσει» το παράθυρο γραφικών με τις υπάρχουσες σχεδιασμένες γραφικές παραστάσεις και να δεκτεί επιπρόσθετα και νέα γραφική παράσταση μίας νέας συνάρτησης, g .
`axis equal`	ταυτίζει τα μήκη των αξόνων $x'0x$ και $y'0y$
`axis([xmin xmax ymin ymax])`	ορίζει μήκη στους άξονες $x'0x$ και $y'0y$
`xlabel('…')`	εισάγει τίτλο στον άξονα $x'0x$
`ylabel('…')`	εισάγει τίτλο στον άξονα $y'0y$
`legend('…')`	εισάγει υπόμνημα για τις γραφικές παραστάσεις του παράθυρου
`title('…')`	εισάγει τίτλο στο παράθυρο
`grid on`	εμφανίζει γραμμές πλέγματος στο παράθυρο

Συγκεκριμένα, για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , απαιτούνται :

- το πεδίο ορισμού $[x1, x2]$ της συνάρτησης f , ορισμένο ως διάνυσμα
- το βήμα `k` , με το οποίο θα γίνει η διαμέριση του $[x1, x2]$
- η συνάρτηση f .

Σύνταξη εντολής: `plot(x,f)`

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1.8.(α) για να αναπαρασταθεί η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, με $x\in[-4,4]$, και βήμα $k=0.01$, χρειάστηκαν οι ακόλουθες εντολές:

```
x=-4:0.01:4;
f=(x.^3)./(x.^2+1);
plot(x,f);
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('f(x)=x^3/(x^2+1)');
```

Σε ένα παράθυρο γραφικών για να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις δύο ή περισσότερων συναρτήσεων χρησιμοποιείται η εντολή `hold on`. Συγκεκριμένα, σχεδιάζεται η συνάρτηση f , δίνεται `hold on` κατόπιν δίνεται νέα συνάρτηση, έστω g , σχεδιάζεται και δίνεται `hold on` , δίνεται νέα συνάρτηση, έστω h, σχεδιάζεται και δίνεται `hold on`, κ.λ.π. Ισοδύναμο αποτέλεσμα προκύπτει χρησιμοποιώντας την εντολή `plot(x,f,x,g,x,h)`.

Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 1.3 έχουν σχεδιασθεί χρησιμοποιώντας την εντολή `plot(x,f,x,g,x,h)` ως ακολούθως:

```
x=-3:0.001:3;
g1=-0.5*x.^2;
g2=-x.^2;
g3=-3*x.^2;
plot(x,g1,'r',x,g2,'k',x,g3,'b');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('g_{1}(x)=-0.5x^2','g_{2}(x)=-x^2', 'g_{3}(x)=-3x^2');
axis([-3.1 3.1 -10 0.5]);
```

Χρησιμοποιώντας Matlab/Octave μπορούμε να γράψουμε μία συνάρτηση, την ονομαζόμενη **function**, η οποία έχει εισόδους κάποιες παραμέτρους, που ανάλογα με το πρόβλημα αλλάζουμε.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), που χρησιμοποιήθηκε για τα Σχήματα 1.2 και 1.3, για τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$, με πεδίο ορισμού $[x_1,x_2]$ και βήμα k, χρησιμοποιώντας τις εντολές `plot` και `hold on`.

```
function parabola(a1,b1,c1,a2,b2,c2,a3,b3,c3,x1,x2,k)
    x=x1:k:x2;
    y1=a1*x.^2+b1.*x+c1;
    y2=a2*x.^2+b2.*x+c2;
    y3=a3*x.^2+b3.*x+c3;
    plot(x,y1,’r’);
    hold on;
    plot(x,y2,’k’);
    hold on;
    plot(x,y3,’b’);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
end
```

Η συνάρτηση `parabola` έχοντας είσοδο $a_1=0.5, b_1=c_1=0$, $a_2=1, b_2=c_2=0$, $a_3=4, b_3=c_3=0$, $x_1=-3$, $x_2=3$, και k=0.01 δίνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=0.5x^2$, $f_2(x)=x^2$ και $f_3(x)=4x^2$ στο Σχήμα 1.2.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση (function), που χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a^x$ με πεδίο ορισμού το $[x1,x2]$ με βήμα 0.001.

```
function exp10(a1,a2, x1,x2)
    x=x1:0.001:x2;
    y1=a1.^x;
    subplot(2,1,1);
    plot(x,y1)
    xlabel('x');
    ylabel('y=f(x)');
    title ('f(x)=a^x, με a>1');
    y2=a2.^x;
    subplot(2,1,2);
    plot(x,y2)
    xlabel('x');
```

```
      ylabel('y=f(x)');
      title ('f(x)=a^x, με 0<a<1');
 end
```

Η συνάρτηση `exp10` έχοντας είσοδο $a_1 = 2$, $a_2 = 1/2$ και [-5,5] δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $(a_1 = 2)$ στο Σχήμα 1.9. στο πάνω παράθυρο και τη γραφική παράσταση της $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $(a_2 = 1/2)$ στο κάτω παράθυρο.

Η ίδια συνάρτηση (function) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο Σχήμα 1.10 αλλάζοντας την τιμή της εισόδου και αφαιρώντας από τη function την εντολή `subplot`. ◊◊

1.8. Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

1.8.1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{2-x}$.

Στη συνέχεια, να υπολογισθούν οι συνθέσεις $f\circ g$, $g\circ f$, και $g\circ g$.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε τα Παραδείγματα 1.2.7 (ii)-(v).

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού A της f είναι $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και της g είναι $(-\infty,2]$.

Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται αν $x\in(-\infty,1)\cup(1,2]$ με τύπο είναι $\left(f\circ g\right)(x)=\dfrac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}-1}$.

Η συνάρτηση $g\circ f$ ορίζεται αν $x\in(-\infty,1)$ με τύπο είναι $\left(g\circ f\right)(x)=\sqrt{\dfrac{2}{1-x}}$.

Η συνάρτηση $g\circ g$ ορίζεται αν $x\in(-\infty,2]$ με τύπο είναι $\left(g\circ g\right)(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$.

1.8.2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. Να εξετασθεί εάν η f είναι 1-1.

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού A της f είναι $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ και το σύνολο τιμών είναι

$B=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

1.8.3. Να υπολογισθεί η αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει, της συνάρτησης $f(x)=e^{-2x}-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας Matlab να γίνει επαλήθευση των αποτελεσμάτων και να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μεθοδολογία που προτείνεται στην Παρατήρηση 1.2.11(ii) και Παρατήρηση 1.4.2. (iv).

Απάντηση: Αν $x\in(-2,+\infty)$, η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x+2)$.

1.8.4. Να μελετηθεί στο $[-1,+\infty)$ η μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=-x^3-3x+2$ και στη συνέχεια να υπολογισθούν τα ακρότατα της f, αν υπάρχουν. Είναι η συνάρτηση f φραγμένη;

Υπόδειξη: Για τη μονοτονία χρησιμοποιήστε το λόγο μεταβολής στην (1.3.1) και συμβουλευτείτε την Εφαρμογή 1.3.5. Για τα ακρότατα, συμβουλευτείτε το Παράδειγμα 1.3.8.

Απάντηση: Η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα, έχει ολικό μέγιστο στο $\left(-1,f(-1)\right)$ και είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 6.

1.8.5. Να λυθεί η εξίσωση $12\cosh^2(x)+7\sinh(x)=24$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τον τύπο στην Εφαρμογή 1.6.16.(i), για να δημιουργηθεί μία δευτεροβάθμια εξίσωση του $\sinh(x)$.

Απάντηση: Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=-\ln 3$ ή $x=\ln 2$.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Χ. Ε., Γιαννακούλιας, Ε., & Γιωτόπουλος, Σ. Χ. (2009). Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικός Λογισμός (1η έκδοση, τόμος Ι). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Γεωργίου, Γ., & Ξενοφώντος, Χ. (2007). Εισαγωγή στη Matlab. Λευκωσία: εκδόσεις Kantzilaris.

Γεωργίου, Δ., Ηλιάδης, Σ., & Μεγαρίτης, Α. (2010). Πραγματική Ανάλυση. Πάτρα: Γεωργίου Δημήτριος.

Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2012). Απειροστικός Λογισμός. Κρήτη: ΙΤΕ-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Καραμπετάκης, Ν.(2007). Από την Άλγεβρα των Υπολογισμών στα Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας, Συνέδριο, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη, 05-09/03/2007, http://ikee.lib.auth.gr/record/221208?ln=el

Καραμπετάκης, Ν., Σταματάκης, Σ., & Ψωμόπουλος, Ε. (2004). Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Κυβεντίδης, Θ. Α. (2001). Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, Τεύχος Πρώτο. Θεσσαλονίκη: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Μούσας, Β.Χ. (2010). Βασική χρήση και προγραμματισμός του Matlab 7, Αθήνα: Ίων.

Moler, C. B. (2010). Αριθμητικές μέθοδοι με το Matlab. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Ντούγιας, Σ. (2007). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Α. Αθήνα: Διαδρομές Μονοπρόσωπη ΕΠΕ.

Οδηγός Χρήσης Matlab. from http://www.hpclab.ceid.upatras.gr/courses/num_anal/matlab.pdf

Οικονομίδης, Ν. Π., & Καρυοφύλλης, Χ. Γ. (1999). Διαφορικός Λογισμός Ι: Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

Παντελίδης, Γ. Ν. (2008). Ανάλυση (3η έκδοση τόμος Ι). Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας, Χ. Γ., & Φαμέλης, Ι. Θ. (2004). Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό, Matlab-Mathematica, Εισαγωγή και Εφαρμογές. Αθήνα: εκδόσεις Συμεών.

Ρασσιάς, Θ. (2014). Μαθηματική Ανάλυση Ι (1η έκδοση 2014). Αθήνα: εκδόσεις Τσότρας.

Στεφανίδης, Γ. (2014). Γραμμική Άλγεβρα Με Το Matlab : Νέα Έκδοση. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζυγός.

Spivak, M. (2010). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (2η έκδοση). Κρήτη: Πανεπιστημίακές εκδόσεις Κρήτης.

Τσεκρέκος, Π. Χ. (2008). Μαθηματική Ανάλυση Ι. Αθήνα: Σ.Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Τσίτσας, Λ. (2003). Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός (2η έκδοση). Αθήνα: εκδόσεις Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ Ο.Ε.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

GNU Octave from http://www.gnu.org/software/octave

Lebl, J. (2014). Basic Analysis: Introduction to Real Analysis: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Maxima, a Computer Algebra System from http://maxima.sourceforge.net/

Matlab from http://www.mathworks.com/products/matlab/

Octave-Forge - Extra packages for GNU Octave from http://octave.sourceforge.net/symbolic/overview.html

Ross, K. A. (2013). Elementary Analysis: The Theory of Calculus (2 ed.). New York: Springer.

Stewart, J. (2007). Calculus: Cengage Learning.

Symbolic Math Toolbox from http://www.mathworks.com/products/symbolic/

Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus (3rd edition ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Trench, W. F. (2003). Introduction to real analysis: Prentice Hall/Pearson Education Upper Saddle River, NJ.

Ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις

1.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$

iii) $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2-x-2}}$ iv) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$

v) $f(x)=\ln(\cos(x))$ vi) $f(x)=\dfrac{x^2+1+\ln x}{x^2-1}$

vii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$ viii) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5}{4-x^2}}$

ix) $f(x)=2^{\sqrt{x-2}}$ x) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(2x)}+\dfrac{1}{\cos(3x)}$

1.2. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας κάποια προσέγγιση ή κάποιο υπολογιστικό πακέτο (Matlab, Octave, Mathematica κ.α):

i) $f(x)=4x$ ii) $f(x)=4x+1$

iii) $f(x)=3x^2$ iv) $f(x)=3x^2-12x+13$

v) $f(x)=|x-3|-2$ vi) $f(x)=\ln(x+2)$

vii) $f(x)=1-x^2$ viii) $f(x)=e^{-x}$

ix) $f(x)=-\ln x$ x) $f(x)=\cosh(2x)$

Υπόδειξη: Να συμβουλευτείτε την Υποενότητα 1.7.2.

1.3. Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

1.4. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές ή δεν έχουν καμία συμμετρία:

i) $f_1(x)=x^3$ ii) $f_2(x)=e^{2x+1}$

iii) $f_3(x)=x^2-x+1$ iv) $f_4(x)=\tan(x)$

v) $f_5(x)=\sinh^{-1}(x)$ vi) $f_6(x)=\cosh^{-1}(x)$

vii) $f_7(x)=\sin^2(x)-2x^4+4$ viii) $f_8(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ix) $f_9(x)=\sin(x)+\cos(x)$ x) $f_{10}(x)=\dfrac{2^x+1}{2^{-x}-1}$

1.5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$

ii) $\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$

1.6. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(-2,3]$, ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x-3)$, $f(-x)$ και $f(x^2)$;

1.7. Να υπολογισθεί το σύνολο τιμών των ακόλουθων συναρτήσεων:

i) $f(x)=|x^2-5|$ ii) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{3-\cos(2x)}$ iv) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

1.8. Να υπολογισθεί η συνάρτηση $3f-2g$, αν

$$f(x)=\begin{cases}2x-3, & x\le -1\\ 4-5x, & x>-1\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}3x+5, & x<3\\ 4x+1, & x\ge 3\end{cases}$$

1.9. Αν $f(x+1)=x^2-3x+2$, να υπολογισθεί η $f(x)$.

1.10. Αν $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ και $g(x)=x+5$, να υπολογισθεί η σύνθετη $f\circ g$. Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

1.11. Αν f και g είναι περιττές συναρτήσεις να αποδείξετε ότι και η σύνθετη $f\circ g$ είναι περιττή συνάρτηση.
Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και η g περιττή, τότε η σύνθετη $f\circ g$ είναι περιττή ή άρτια συνάρτηση ;

1.12. Να εξετάσετε, αν η ακόλουθη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\ge 3\\ 2x+5, & x<3\end{cases}$$

είναι 1-1. Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να υπολογισθεί η αντίστροφή της.

1.13. Να υπολογισθεί η αντίστροφη συνάρτηση, αν υπάρχει, σε κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

i) $f(x)=\dfrac{5}{1+2^{-x}}$ ii) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

v) $f(x)=x^x$ vi) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

vii) $f(x)=1-2\ln(1-x)$ viii) $f(x)=e^{-2x}-1$

ix) $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$ x) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}=\mathrm{cosec}(x)$

Να επαληθεύσετε ότι ισχύει $f^{-1}\circ f=I$, όπου I είναι η ταυτοτική συνάρτηση.
Τα παραπάνω αποτελέσματα να επιβεβαιωθούν με τη χρήση Matlab.

1.14. i) Αν οι συναρτήσεις $f:A\to B$ και $g:B\to C$ είναι αμφιμονοσήμαντες και επί συναρτήσεις, να αποδείξετε ότι η σύνθετη $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση.
ii) Αν η $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη.
iii) Αν η $g\circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί συνάρτηση.

1.15. Να υπολογισθεί, η σύνθετη συνάρτηση $f\circ g$, όπου αυτή ορίζεται, όταν

i) $f(x)=x^2+2$, $g(x)=\sqrt{1-x}$
ii) $f(x)=\sqrt{x}=g(x)$
iii) $f(x)=\tan(x)$, $g(x)=\ln x$
iv) $f(x)=\cosh(x)$, $g(x)=x^2+1$
v) $f(x)=\tanh^{-1}(x)$, $g(x)=x^2$.

Επαληθεύστε τα αποτελέσματα με Matlab/Octave.

1.16. Χρησιμοποιώντας Matlab να γράψετε μία συνάρτηση (function), με είσοδο τους συντελεστές της συνάρτησης $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, τα άκρα του διαστήματος $[x_1,x_2]$, το βήμα k και έξοδο τη γραφική παράσταση της f με «μπλε χρώμα». Στη συνέχεια, στην ίδια εικόνα και με «κόκκινο χρώμα» να σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=ax^5+bx^4+cx^3+d$. Τι παρατηρείτε; Οι συναρτήσεις αντιστρέφονται; Ποιες είναι οι αντίστροφες; Ποια είναι η σύνθεση $g\circ f$;