

Πρόλογος

Το αντικείμενο του βιβλίου είναι ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής και περιλαμβάνει εκείνη την ύλη των μαθηματικών, που διδάσκεται ως Μαθηματική Ανάλυση ή Λογισμός συναρτήσεων μίας μεταβλητής, στα πρώτα εξάμηνα των Τμημάτων, των Θετικών και Φυσικών Επιστημών, των Πολυτεχνικών, Οικονομικών και Κοινωνικών Σχολών αλλά και των Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών των ΤΕΙ. Απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές και σπουδαστές ως κύριο σύγγραμμα και σε πτυχιούχους ως ένα χρήσιμο ηλεκτρονικό βιβλίο αναφοράς. Στο περιεχόμενό του ο αναγνώστης μπορεί να βρει υλικό που σχετίζεται με:

- το λογισμό και τη μελέτη συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής,
- το αόριστο, το ορισμένο, το γενικευμένο ολοκλήρωμα και τις εφαρμογές τους, τόσο στη γεωμετρία, όσο στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και στο μετασχηματισμό Laplace,
- τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών,
- τις σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων.

Είναι γεγονός ότι οι παραπάνω έννοιες είναι χρήσιμες στις επιστήμες του Μηχανικού και γενικότερα στις Θετικές Επιστήμες, και δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι αρκετές από αυτές οφείλουν την ύπαρξή τους σε αυτές τις Επιστήμες. Βασιζόμενοι σε αυτό το γεγονός ο αναγνώστης θα βρει σχόλια ή και αναλυτικές εισαγωγές στις αντίστοιχες ενότητες.

Στο βιβλίο επιχειρείται η παρουσίαση της θεωρητικής δομής και μεθοδολογίας της Μαθηματικής Ανάλυσης με συστηματικό και απλό τρόπο, με ακρίβεια και πληρότητα, εφ' όσον οι έννοιες ακολουθία, όριο, συνέχεια, παράγωγος και ολοκλήρωμα, είναι γνωστές από το λύκειο. Στόχος είναι η εύχρηστη αναφορά στην ύλη του λογισμού των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής και η κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού λογισμού, ως υπόβαθρο σε άλλα προπτυχιακά μαθήματα, όπως Σήματα Συστήματα, Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, κ.ά. Για το σκοπό αυτό, η ύλη είναι αυστηρά διατυπωμένη, με Ορισμούς, Θεωρήματα και Προτάσεις, χωρίς μακροσκελείς αποδείξεις και η παρουσίασή της στηρίζεται σε επιλεγμένα παραδείγματα και εφαρμογές. Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στο να υπάρχουν σε όλα τα κεφάλαια αναλυτικές επεξηγήσεις, επιστημονικές και λεπτομερής «συζήτηση», πάνω σε ποικίλα παραδείγματα, ώστε να παρέχεται η δυνατότητα στον αναγνώστη να αντιληφθεί τις έννοιες και τις διαδικασίες που αναπτύσσονται. Τέλος, αξιοποιούνται οι γνώσεις και οι δυνατότητες, που δίνει η τεχνολογική ανάπτυξη των υπολογιστών, γράφοντας προγράμματα σε υπολογιστικό περιβάλλον Matlab/Octave.

Στο κείμενο περιέχονται σε έγχρωμα πλαίσια τα θεωρήματα, οι βασικές προτάσεις, οι ιδιότητες, χρήσιμα συμπεράσματα και εφαρμογές, περιγραφή μεθόδων, εντολών και διαδικασιών, ώστε να διακρίνονται εύκολα από τον αναγνώστη. Μία ενότητα κάθε κεφαλαίου συγκεντρώνει τις απαραίτητες πληροφορίες, που απαιτούνται από το προγραμματιστικό/υπολογιστικό περιβάλλον των λογισμικών Matlab/Octave, ώστε η χρήση τους να επιτρέπει στον αναγνώστη την εξάσκηση ή τον έλεγχο της ορθότητας των απαντήσεων, σε αρκετά από τα λυμένα ή άλυτα προβλήματα που διαπραγματεύεται κάθε κεφάλαιο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν ασκήσεις αυτοαξιολόγησης με υποδείξεις για τη λύση τους καθώς και οι απαντήσεις τους. Σκοπός αυτών των ασκήσεων είναι να μπορεί ο αναγνώστης να ελέγξει το επίπεδο κατανόησης των εννοιών που αναπτύχθηκαν, γι' αυτό οι ασκήσεις αυτές είναι παρόμοιες με τα παραδείγματα, τα οποία έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο ή αποτελούν σύνθεσή τους. Επιπλέον, μετά τη βιβλιογραφία κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν και ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις, οι οποίες δίνονται για να μπορεί ο αναγνώστης να εξασκηθεί στην επίλυση αριθμητικών εφαρμογών και προβλημάτων, που αφορούν τα επιμέρους τμήματα της ύλης κάθε κεφαλαίου.

Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες, οι οποίες αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικές αριθμούνται με τρεις αριθμούς: ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποενότητα. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι εφαρμογές, τα παραδείγματα, οι τύποι και οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης αριθμούνται με τρεις αριθμούς: ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος στη σειρά εμφάνισης. Οι ενδεικτικές άλυτες ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου αριθμούνται με δύο αριθμούς, ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισης. Στο τέλος του συγγράμματος υπάρχει παράρτημα με πίνακες με τους σημαντικότερους τύπους όλων των κεφαλαίων.

Το περιεχόμενο του βιβλίου κατανέμεται σε δέκα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται όλοι οι ορισμοί, οι ιδιότητες και οι πράξεις που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων, όπως είναι οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι

τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές καθώς και οι αντίστροφες συναρτήσεις αυτών, και αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητές τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της ακολουθίας, διατυπώνονται οι ιδιότητες που συνδέουν τις έννοιες της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας, αποδεικνύονται τα σημαντικότερα κριτήρια και οι προτάσεις μίας συγκλίνουσας ακολουθίας και μελετώνται χαρακτηριστικά όρια ακολουθιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί και τα σημαντικότερα κριτήρια ελέγχου σύγκλισης των σειρών πραγματικών αριθμών. Μελετώνται επίσης ειδικές σειρές, όπως είναι οι γεωμετρικές, οι τηλεσκοπικές, οι p -αρμονικές και οι εναλλάσσουσες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια του ορίου μίας πραγματικής συνάρτησης, η οποία είναι θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού, δίνονται ο ορισμός και οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σ' έναν πραγματικό αριθμό ή όταν αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα και διατυπώνονται ο ορισμός, οι ιδιότητες και οι σημαντικότερες προτάσεις για τις συνεχείς συναρτήσεις, από τις οποίες προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κανόνες παραγωγίσης των πραγματικών συναρτήσεων και αποδεικνύονται οι παράγωγοι των σημαντικότερων πραγματικών συναρτήσεων. Επίσης, δίνεται ο ορισμός του διαφορικού μίας πραγματικής συνάρτησης.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, θεώρημα Fermat, Rolle, Μέσης Τιμής, τα οποία βρίσκουν εφαρμογές στη μελέτη μίας συνάρτησης κατά τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Μερικές από αυτές αφορούν τη μονοτονία και την κυρτότητα, τον προσδιορισμό τοπικών ακροτάτων και σημείων καμψής της συνάρτησης, την ύπαρξη ασύμπτωτων ευθειών στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, καθώς και τον εντοπισμό των ριζών μίας εξίσωσης.

Στο έβδομο κεφάλαιο ξεκινά η μελέτη του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Παρουσιάζεται η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος, η οποία «λειτουργεί» ως αντίστροφη διαδικασία από εκείνη της παραγωγίσης. Μελετώνται οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και αναπτύσσονται οι τεχνικές υπολογισμού του. Εισάγεται η έννοια του αθροίσματος Riemann, με τη χρήση του οποίου, δίνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann), και διατυπώνεται το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος στη γεωμετρία, στη μηχανική, στη φυσική, όπως είναι το εμβαδόν μίας επίπεδης περιοχής, ο όγκος ενός στερεού από περιστροφή, το μήκος μίας καμπύλης. Επιπλέον, παρουσιάζονται εφαρμογές του αόριστου ολοκληρώματος, στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, όπως είναι οι διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και η διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος προσέγγισης μίας συνάρτησης από μία πολυωνυμική συνάρτηση, δίνεται ο ορισμός της δυναμοσειράς, της σειράς Taylor και Maclaurin. Επιπλέον, παρουσιάζεται η προσέγγιση μίας συνάρτησης από τριγωνομετρικά πολυώνυμα και περιγράφεται η ανάλυση μίας συνάρτησης σε σειρά Fourier.

Στο τελευταίο κεφάλαιο του συγγράμματος επεκτείνεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε εκείνη του γενικευμένου ολοκληρώματος, δηλαδή, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το ολοκλήρωμα μελετάται για συνάρτηση ορισμένη σε μη φραγμένο διάστημα, καθώς επίσης για μη φραγμένη συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα ή ο συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων. Ως εφαρμογές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μελετώνται ο μετασχηματισμός Laplace και ο αντίστροφός του.

Στο τέλος της προσπάθειας αυτής θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσουμε όλους τους συντελεστές της συγγραφικής προσπάθειας.

Ευχαριστούμε τον κριτικό αναγνώστη κ. Νικόλαο Καραμπετάκη για τις εποικοδομητικές και αναλυτικές υποδείξεις του.

Ευχαριστούμε την υποψήφια διδάκτορα του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική κα Παναγιώτα Κοντού για την τεχνική υποστήριξη.

Ευχαριστούμε τη συναδέλφισσα και φίλη κα Ευφροσύνη-Άλκηστη Παρασκευοπούλου-Κόλλια για τη γλωσσική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε την κα Αντιγόνη Παναγιωτίδου για τη σύλληψη της ιδέας του εξώφυλλου και τη γραφιστική επιμέλεια.

Ευχαριστούμε όλους τους φοιτητές των Τμημάτων όπου διδάξαμε, που τα τελευταία χρόνια, μέσα από τις συζητήσεις στις διαλέξεις και στα εργαστήρια, μέσα από τις ασκήσεις και τις εξετάσεις, μας βοήθησαν να γίνουμε πιο μεθοδικοί στην παρουσίαση της ύλης και μας ενέπνευσαν να γράψουμε το παρόν ηλεκτρονικό σύγγραμμα. Ελπίζουμε να είναι χρήσιμο βοήθημα στους επόμενους φοιτητές των Πανεπιστημίων και Τεχνολογικών Ιδρυμάτων και να αποτελέσει ένα από τα βασικά εργαλεία στην προσπάθειά τους για την απόκτηση της γνώσης στα αντικείμενα που θεραπεύονται μέσα στις «σελίδες» του.

Λαμία, Μάιος 2016

Οι συγγραφείς
Μαρία Αδάμ-Ιωάννης Χατζάρας-Νικόλαος Ασημάκης

