ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι – ΣΕΙΡΕΣ

Διδάσκουσα : Δρ. Μαρία Αδάμ

Λυμένες ασκήσεις

1). Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλισή τους οι σειρές και να βρεθεί το άθροισμά τους, **όπου αυτό είναι δυνατόν**:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$, (β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n+1}{2^n} \right)$, (γ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1} \right)$

Λύση:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$ αποκλίνει, επειδή $\frac{n}{\sqrt{n^3+n}} = \frac{n}{n^{3/2}\sqrt{1+1/n^2}} = \frac{1}{n^{1/2}\sqrt{1+1/n^2}} \approx \frac{1}{n^{1/2}}$

(β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) = \infty + \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = \infty + 1 = \infty$, άρα αποκλίνει αφού η πρώτη γεωμετρική σειρά έχει λόγο (3/2)>1.

(γ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$=(τηλεσκοπική)=1.

2). Να υπολογισθούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών :

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{5^n}$

β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Λύση: α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{5^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} =$ (γεωμετρικές σειρές)

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 2 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - 3 \cdot \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = 2 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} - 3 \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3 - 2 = 1$$

β) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (τηλεσκοπική σειρά)

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{(2n-1)}+\frac{B}{(2n+1)}=\frac{(2A+2B)n+(A-B)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\begin{Bmatrix}2A+2B=0\\ A-B=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2(1+B)+2B=0\\ A=1+B\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}4B+2=0\\ A=1+B\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}B=-1/2\\ A=1-1/2=1/2\end{Bmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right\}=$$

$$=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2(2\cdot 1-1)}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

3). Ποια από τις παρακάτω σειρές συγκλίνει και ποια αποκλίνει; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^4+1}$

δ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$ ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ στ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$

Λύση: α) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ απειρίζεται θετικά και επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ απειρίζεται θετικά.

β) Χρησιμοποιούμε το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1>0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ απειρίζεται θετικά, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ απειρίζεται θετικά.

γ) Χρησιμοποιούμε το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2n^2-1}{3n^4+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4-n^2}{3n^4+1}=\frac{2}{3}>0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^4+1}$.

δ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}=\frac{3}{4}\neq 0$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$ αποκλίνει.

ε) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ συγκλίνει.

στ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n}{n^2}} = e\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = e > 1$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 4.

(α) Για ποια από τις τιμές του *x* συγκλίνει η σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$$

(β) Δίνεται η παρακάτω σειρά :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

η οποία έχει αποδειχθεί από τον Euler ότι συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\pi^3}{32}$. Προσπαθήστε να υπολογίσετε το πλήθος *n+1* των όρων της σειράς που πρέπει να πάρουμε ώστε να προσεγγίσουμε το $\frac{\pi^3}{32}$ (και συνεπώς και το π) με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-6}$. Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα των *n+1* πρώτων όρων και κατά συνέπεια να εκτιμήσετε το *π* ;

Υπόδειξη. Πρώτα αποδείξτε ότι έχουμε μια εναλλάσσουσα σειρά π.χ. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ όπου $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετική, φθίνουσα και με όριο το μηδέν και στη συνέχεια κάντε χρήση της ανισότητας $\left|S-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right| \le a_{k+1}$ ώστε να υπολογίσετε το πλήθος των όρων *k* που θα πρέπει να πάρουμε ώστε να υπολογίσουμε το άθροισμα S. Θα πρέπει να έχουμε $\left|S-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right| \le 10^{-6}$.

Λύση: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2+1}{3}$. Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει για $\frac{x^2+1}{3} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Για $x = \pm\sqrt{2}$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty}1$ η οποία αποκλίνει. Τελικά το διάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει είναι το $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

(β) Έστω $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3} > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)^3}}{\frac{1}{(2n+1)^3}} = \frac{(2n+1)^3}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{(2n+1)^3}{(2n+3)^3} < 1$$

(γιατί ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος του αριθμητή). Άρα
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ και επομένως η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0$.

Άρα η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ συγκλίνει.

$$\left| S - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right| \le \frac{1}{(2n+1)^3} \le 10^{-6} \Rightarrow (2n+1)^3 \ge 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n+1 \ge 10^2 \Rightarrow n \ge \frac{10^2-1}{2} = 49.5$$

Αρκεί να πάρουμε $n = 50$, οπότε $n+1 = 51$.

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 0,968947 \simeq \frac{\pi^3}{32} \Rightarrow \pi \simeq (32 \cdot 0,968947)^{\frac{1}{3}} \simeq 3,14159$$

5). Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, να βρεθούν όλες οι τιμές του *x* για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-1}}{n \cdot 6^n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^n$$

Λύση.

i. **α.** Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(x+1)^n}{6^{n+1} \cdot (n+1)}}{\dfrac{(x+1)^{n-1}}{6^n \cdot n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{6^n \cdot n \cdot (x+1)^n}{6^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (x+1)^{n-1}} = |x+1| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6 \cdot (n+1)} = \frac{|x+1|}{6}$$

.

Άρα, αν $\frac{|x+1|}{6} < 1 \Rightarrow |x+1| < 6 \Rightarrow -7 < x < 5$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-1}}{n \cdot 6^n}$ συγκλίνει.

Για $\frac{|x+1|}{6} > 1 \Rightarrow x > 5$ ή $x < -7$, προφανώς η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{n-1}}{n \cdot 6^n}$ αποκλίνει.

Για $x = 5$, προκύπτει η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει, όπως η αντίστοιχη αρμονική.

Για $x = -7$, έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{n \cdot 6^n} = -\frac{1}{6} \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει, γιατί είναι η εναλλάσσουσα αρμονική, (ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz).

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x \in [-7, 5)$.

β. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\left|\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

.

Άρα, αν $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{1-x}{1+x}<1 \Rightarrow 0<\frac{2}{x+1}<2 \Rightarrow x>0$, τότε η

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^n$ συγκλίνει.

Για $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}>1 \Rightarrow -1<x<0 \\ \text{ή} \\ \frac{1-x}{1+x}<-1 \Rightarrow x<-1 \end{cases}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^n$ δεν συγκλίνει.

Για $x=0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$ αποκλίνει, όπως η αντίστοιχη p-σειρά ($p=-2$).

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x\in(0,\infty)$.

6). Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες συγκλίνει η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$.

Λύση:

Με το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι για $|x-1|<1$ δηλαδή $0<x<2$ συγκλίνει και για $|x-1|>1$ δηλαδή x<0 ή x>2 αποκλίνει. Για x=0 συγκλίνει (κριτήριο Leibniz) , για x=2 αποκλίνει (αρμονική σειρά).

Άλυτες ασκήσεις

i) Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5^n}+\frac{2}{3^n}\right)$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty}3^n\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{2^n}\right)$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{3n+1}}{(3n+2)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{2}{5^n}-\frac{3}{4^n}\right)$ (e) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{2^n}+\frac{3}{(n+1)!}+\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+6n-6}{n^4}$

και σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρεθεί το αντίστοιχο άθροισμα.

ii) Θεωρώντας ως δεδομένο ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, να βρεθούν τα διαστήματα σύγκλισης και τα αθροίσματα των ακόλουθων δυναμοσειρών:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{x^{2n}}-\frac{1}{4^n}\right)x^n$

iii) Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+4}{3^n+16}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5^n\cdot(n+1)!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8n^2+8}{2n^4+10n+12}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sin(n\theta)}{2n^2+4n+3}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-6n}{2(n+1)!}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3+8}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{2^n+16}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{2^n+16}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+5}{3^n+4}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+2)e^{n+1}}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+8n+10}{2n^5+4n+2}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n}$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi a)}{n^2}$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^2+6n+1}$ **17)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$ **18)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n^2+1)}{3n^2+2}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n+2}}{(3n+2)^2}$ **20)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$ **21)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+7^n+6\cdot 4^n}$

22) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ **23)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+8n}{4n^5}$ **24)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n}$

25) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$ **26)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ **27)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

28) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n^3}$ **29)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{2^n}+\frac{3n}{(n+1)!}+\frac{2}{\sqrt{n+1}}$ **30)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{10}$

iv) Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ακόλουθες σειρές

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{5^n\cdot n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(x-2)^{n-1}(n-1)!}{6^n\cdot(n+2)!}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(3x-2)^n(n-1)!}{x^n\cdot(3n+1)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4x+8)^n}{8^n\cdot n^2}$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cdot n!}{n^n\cdot(2x-1)^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(x-1)^{3n}}{3n+7}$

συγκλίνουν. Η σύγκλιση να εξετασθεί και στα άκρα των αντίστοιχων διαστημάτων.