Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

Εργαστήριο Γραμμικής Άλγεβρας

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός ν×ν πίνακα Α αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$Ax = \lambda x, \text{ όπου } x \neq 0.$$

Συγκεκριμένα, τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

1. Υπολογίζουμε το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Βρίσκουμε τις λύσεις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ της εξίσωσης $p(\lambda)=0$. Αυτές είναι οι *ιδιοτιμές* του πίνακα Α.
3. Για κάθε μία από τις τιμές λ_i επιλύουμε το ομογενές σύστημα $(A-\lambda_i I)x = 0$. Τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που προκύπτουν αποτελούν και τα *ιδιοδιανύσματα* που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.

Πολυώνυμα στη MATLAB

Στη MATLAB τα πολυώνυμα αναπαρίστανται από διανύσματα με στοιχεία τους συντελεστές των όρων του πολυωνύμου σε φθίνουσα διάταξη. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο

$$p(x) = x^2 – 3x + 5$$

αναπαρίσταται από το διάνυσμα

p = [1 -3 5]

ενώ το διάνυσμα

q = [1 0 7 -1 0]

παριστάνει το πολυώνυμο

$$q(x) = x^4 + 7x^2 – x$$

Συνάρτηση	Περιγραφή
poly(A)	Βρίσκει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A
roots(p)	Βρίσκει τις ρίζες ενός πολυωνύμου p

Υπολογισμός ιδιοτιμών στη Matlab

```
>> A=[1 2 3;2 4 5;3 5 6]
A =
    1     2     3
    2     4     5
    3     5     6

>> % υπολογισμός χαρακτηριστικού πολυωνύμου
>> p=poly(A)
p =
   1.0000  -11.0000   -4.0000    1.0000

>> % εύρεση ιδιοτιμών
>> lambda=roots(p)
lambda =
   11.3448
   -0.5157
    0.1709
```

Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων στη Matlab

```
>> % ορισμός του πίνακα B=A - λ*I για την πρώτη ιδιοτιμή
>> B=A-lambda(1)*eye(3)
B =

  -10.3448    2.0000    3.0000
    2.0000   -7.3448    5.0000
    3.0000    5.0000   -5.3448

>> % επίλυση του συστήματος B*x=0
>> rref(B)
ans =
    1.0000         0   -0.4450
         0    1.0000   -0.8019
         0         0         0
```

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1=11.3448 επιλύουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα B = A – λ_1I

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + 0x_{12} - 0.445x_{13} = 0 \\ 0x_{11} + x_{12} - 0.8019x_{13} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{11} = 0.445x_{13} \\ x_{12} = 0.8019x_{13} \end{aligned}\right\}$$

Άρα $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.445x_{13} \\ 0.8019x_{13} \\ x_{13} \end{pmatrix} = x_{13}\begin{pmatrix} 0.445 \\ 0.8019 \\ 1 \end{pmatrix}$,

όπου αν θεωρήσουμε $x_{13} = 1$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.445 \\ 0.8019 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> % ορισμός του πίνακα B=A - λ*I για τη δεύτερη ιδιοτιμή
>> B=A-lambda(2)*eye(3)
B =

 1.5157   2.0000   3.0000
 2.0000   4.5157   5.0000
 3.0000   5.0000   6.5157

>> % επίλυση του συστήματος B*x=0
>> rref(B)
ans =
   1.0000        0   1.2470
        0   1.0000   0.5550
        0        0        0
```

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2= -0.5157 επιλύουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα B = A – λ_2I

$$\left.\begin{aligned} x_{21} + 0x_{22} + 1.247x_{23} = 0 \\ 0x_{21} + x_{22} + 0.555x_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{21} = -1.247x_{23} \\ x_{22} = -0.555x_{23} \end{aligned}\right\}$$

Άρα $x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.247x_{23} \\ -0.555x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} = x_{23}\begin{pmatrix} -1.247 \\ -0.555 \\ 1 \end{pmatrix}$,

όπου αν θεωρήσουμε $x_{23} = 1$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1.247 \\ -0.555 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> % ορισμός του πίνακα B=A - λ*I για την τρίτη ιδιοτιμή
>> B=A-lambda(3)*eye(3)
B =
  0.8291    2.0000    3.0000
  2.0000    3.8291    5.0000
  3.0000    5.0000    5.8291

>> % επίλυση του συστήματος B*x=0
>> rref(B)
ans =
    1.0000         0   -1.8019
         0    1.0000    2.2470
         0         0         0
```

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_3= 0.1709 επιλύουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα B = A – λ_3I

$$\left.\begin{aligned} x_{31} + 0x_{32} - 1.8019x_{33} = 0 \\ 0x_{31} + x_{32} + 2.247x_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{31} = 1.8019x_{33} \\ x_{32} = -2.247x_{33} \end{aligned}\right\}$$

Άρα $x_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8019x_{33} \\ -2.247x_{33} \\ x_{33} \end{pmatrix} = x_{33} \begin{pmatrix} 1.8019 \\ -2.247 \\ 1 \end{pmatrix},$

όπου αν θεωρήσουμε $x_{33} = 1$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1.8019 \\ -2.247 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A με τις εντολές

eig(A)   ή   [P, D] = eig(A)

Η πρώτη δίνει τις ιδιοτιμές με τη μορφή διανύσματος, ενώ η δεύτερη επιστρέφει δύο πίνακες, έναν διαγώνιο πίνακα D με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A και έναν πίνακα P του οποίου οι στήλες είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα έτσι ώστε να ισχύει

$P^{-1}*A*P = D$.


```
>> [P,D]=eig(A)
P =
    0.7370    0.5910    0.3280
    0.3280   -0.7370    0.5910
   -0.5910    0.3280    0.7370
D =
   -0.5157         0         0
         0    0.1709         0
         0         0   11.3448
```

Η διαφορά στην εφαρμογή της συνάρτησης [P, D] = eig(A) σε σχέση με τον αρχικό τρόπο εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων έγκειται στο γεγονός ότι τα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν τις στήλες του πίνακα P είναι κανονικοποιημένα, δηλαδή έχουν διαιρεθεί με τη νόρμα τους.

Ειδικότερα, παίρνουμε την 3η στήλη του P αν κανονικοποιήσουμε το ιδιοδιάνυσμα x_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1=11.3448

```
>> x1=[0.445; 0.8019; 1]
x1 =
   0.4450
   0.8019
   1.0000

>> x1/norm(x1)
ans =
   0.3280
   0.5910
   0.7370
```

Επίσης, παίρνουμε την 1η και 2η στήλη του P, αντίστοιχα, αν κανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα x_2, x_3 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_2= -0.5157 και λ_3=0.1709, αντίστοιχα.

```
>> x2=[-1.247; -0.555; 1]
x2 =
  -1.2470
  -0.5550
   1.0000
>> x2/norm(x2)
ans =
  -0.7370
  -0.3280
   0.5910
>> x3=[1.8019;-2.247;1]
x3 =
   1.8019
  -2.2470
   1.0000
>> x3/norm(x3)
ans =
   0.5910
  -0.7370
   0.3280
```

Τέλος, θα επαληθεύσουμε την ισότητα $P^{-1}*A*P = D$, αρχικά με τον πίνακα P που πήραμε από την εντολή [P, D] = eig(A) και στη συνέχεια θεωρώντας τον πίνακα Q με στήλες τα αρχικά μη κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, x_3. Τι παρατηρείτε;

```
>> inv(P)*A*P
ans =
  -0.5157    0.0000    0.0000
   0.0000    0.1709    0.0000
   0.0000    0.0000   11.3448

>> Q=[x1 x2 x3]
Q =
   0.4450   -1.2470    1.8019
   0.8019   -0.5550   -2.2470
   1.0000    1.0000    1.0000
>> inv(Q)*A*Q
ans =
  11.3448   -0.0003   -0.0002
  -0.0003   -0.5157   -0.0000
  -0.0000    0.0000    0.1709
```