Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

Εργαστήριο Γραμμικής Άλγεβρας

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων στη MATLAB

$$A_{mxn} x_{nx1} = b_{mx1}$$

$m = n$

$\det(A) \neq 0$

$x = A^{-1} b$

$= A \backslash b$

$\det(A) = 0$

$m \neq n$

$E = [A \quad b]$

$\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(A)$

σύστημα συμβιβαστό

$\mathrm{rank}(E) \neq \mathrm{rank}(A)$

Αδύνατο

rref(E), (row reduced echelon form)
δίνει τον ανηγμένο κλιμακωτό
του πίνακα A και τη λύση (Gauss).

Κάτω τριγωνικός πίνακας και εμπρός αντικατάσταση

Έστω το γραμμικό σύστημα L**x** = **b**, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας. Όταν ο πίνακας L είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή det(L)≠0, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση που μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας εμπρός αντικατάσταση.

$$Lx = b \Rightarrow \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = b_1/l_{11} \\ x_2 = (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22} \\ \vdots \\ x_n = (b_n - l_{n,n-1}x_{n-1} - \cdots - l_{n1}x_1)/l_{nn} \end{cases}$$

Το παρακάτω function m-file επιλύει ένα κάτω τριγωνικό γραμμικό σύστημα εφαρμόζοντας εμπρός αντικατάσταση.

```
function x = LTriSol(L,b)
% Input: L nxn αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας
%            b nx1 διάνυσμα
% Output:  x λύση του συστήματος Lx=b

n = length(b);
x = zeros(n,1);
for j=1:n-1
    x(j) = b(j)/L(j,j);
    b(j+1:n) = b(j+1:n) - x(j)*L(j+1:n,j);
end
x(n) = b(n)/L(n,n);
```

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:</u> Να λυθεί το ακόλουθο κάτω τριγωνικό γραμμικό σύστημα με εμπρός αντικατάσταση

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
>> L=[ 2 0 0;1 5 0; 7 9 8 ];
>> b = [ 6; 2; 5];
>> x=LTriSol(L,b)
x =
     3.0000
    -0.2000
    -1.7750
```

Άνω τριγωνικός πίνακας και πίσω αντικατάσταση

Η επίλυση ενός άνω τριγωνικού συστήματος είναι ανάλογη.

Έστω U**x** = **b**, όπου U είναι ένας άνω τριγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας (det(U)≠0), τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση που βρίσκεται με πίσω αντικατάσταση.

$$Ux = b \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = b_n / u_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1,n} x_n)/u_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ x_1 = (b_n - u_{12} x_2 - \cdots - u_{1n} x_n)/u_{11} \end{cases}$$

Το παρακάτω function m-file επιλύει ένα άνω τριγωνικό γραμμικό σύστημα εφαρμόζοντας πίσω αντικατάσταση.

```
function x = UTriSol(U,b)
% Input: U nxn αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας
%           b nx1 διάνυσμα
% Output:  x λύση του συστήματος Ux=b

n = length(b);
x = zeros(n,1);
for j=n:-1:2
    x(j) = b(j)/U(j,j);
    b(1:j-1) = b(1:j-1) - x(j)*U(1:j-1,j);
end
x(1) = b(1)/U(1,1);
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να λυθεί το ακόλουθο άνω τριγωνικό γραμμικό σύστημα με πίσω αντικατάσταση

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
>> U=[ 6 7 8; 0 3 4; 0 0 1];
>> b=[9; 5; 2];
>> x=UTriSol(U,b)
x =
     0
    -1
     2
```

Παραγοντοποίηση LU

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U. Η ανάλυση αυτή καλείται παραγοντοποίηση LU και είναι πολύ χρήσιμη στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Θα λύσουμε το γραμμικό σύστημα A**x** = **b**, γνωρίζοντας ότι A=LU.

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow L(Ux) = b$$

Θέτουμε $Ux = y$, τότε $Ly = b$.

1. Λύνουμε το σύστημα $Ly = b \Rightarrow$ βρίσκουμε το y
2. Λύνουμε το σύστημα $Ux = y \Rightarrow$ βρίσκουμε το x

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα αφού βρεθεί η παραγοντοποίηση LU του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[4 2 0; 2 3 1; 0 1 5/2];
>> [L,U]=lu(A)
L =
   1.0000         0         0
   0.5000    1.0000         0
        0    0.5000    1.0000
U =
    4    2    0
    0    2    1
    0    0    2
```

```
>> b=[9; 5; 2];
>> y = LTriSol(L,b)
y =
   9.0000
   0.5000
   1.7500
>> x = UTriSol(U,y)
x =
   2.3438
  -0.1875
   0.8750

>> inv(A)*b
ans =
   2.3438
  -0.1875
   0.8750
```