Κεφάλαιο 9

Τ Ε Τ Ρ Α Γ Ω Ν Ι Κ Ε Σ Μ Ο Ρ Φ Ε Σ

9.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 9.1

Μια απεικόνιση $q:\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ *με*

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\ &\quad + \cdots \qquad , \\ &\quad + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{9.1}$$

όπου $a_{ij}\in\mathbb{R}$ *με* $i\le j=1,2,\ldots,n$ *και* $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ *ονομάζεται* ***τετραγωνική μορφή*** *του* $\mathbb{R}^n$.

Για παράδειγμα η απεικόνιση $q_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$, επίσης η $q_2(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$, ενώ η $q(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 + 3x_2$ δεν είναι τετραγωνική μορφή, επειδή περιέχει τον όρο $3x_2$.

Όπως και στο Παράδειγμα 1.11, αν θεωρήσουμε τον πραγματικό συμμετρικό πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

εύκολα επαληθεύουμε ότι η τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$ της (9.1) ισοδυναμεί με τη μορφή $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Ορισμός 9.2

Σε κάθε τετραγωνική μορφή $q:\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ *με*

$$q(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}, \tag{9.3}$$

$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$*, αντιστοιχεί ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας* $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$*, όπως στην (9.2), π ου ονομάζεται* ***αντίστοιχος πίνακας*** *της τετραγωνικής μορφής* $q(\boldsymbol{x})$.

Ο αντίστοιχος πραγματικός συμμετρικός πίνακας $A=(a_{ij})$ της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x})$ στην (9.1), προκύπτει με τον εξής απλό μνημονικό κανόνα: το στοιχείο a_{ii} της διαγωνίου του A είναι ο συντελεστής του x_i^2, ενώ το στοιχείο που βρίσκεται στην $i-$γραμμή και $j-$στήλη ($i<j$) είναι ίσο με το μισό του συντελεστή του γινομένου x_ix_j.

Έτσι, για τα παραδείγματα των προηγούμενων τετραγωνικών μορφών οι αντίστοιχοι πίνακες είναι $A_1=\begin{pmatrix}1&4&6\\4&4&2\\6&2&0\end{pmatrix}$ και $A_2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&-4\end{pmatrix}$, και οι αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές είναι $q_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A_1\boldsymbol{x}$, $q_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A_2\boldsymbol{x}$.

Αντίστροφα, κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{R})$ ορίζει μία τετραγωνική μορφή την $q:\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ με $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}0&-2&3\\-2&-1&1\\3&1&5\end{pmatrix}$ από την (9.3) ορίζεται η τετραγωνική μορφή

$$q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&3\\-2&-1&1\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+24x_2x_3.$$

Ορισμός 9.3

Μια τετραγωνική μορφή $q:\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ *με*

$$q(\boldsymbol{x})=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots\ +a_nx_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2, \tag{9.4}$$

όπου $a_i\in\mathbb{R}$ *με* $i=1,2,\ldots,n$ *και* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ *ονομάζεται* ***διαγώνια*** *τετραγωνική μορφή του* $\mathbb{R}^n$.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το διαγώνιο πραγματικό πίνακα $\Delta=diag(2,7)$, υπολογίζοντας την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t\,\Delta\,\boldsymbol{x}=2x_1^2+7x_2^2$, η οποία είναι διαγώνια μορφή.

Η (9.4) είναι μια έκφραση απλούστερη της (9.3), διότι από αυτήν απουσιάζουν οι όροι με τα γινόμενα των διαφορετικών μεταβλητών.

Από το Φασματικό θεώρημα (Πρόταση 8.14) και τα σχόλια που ακολουθούσαν το θεώρημα αυτό, παρατηρήσαμε ότι για κάθε πραγματικό συμμετρικό πίνακα $A\in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P\in M_n(\mathbb{R})$, με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, για τον οποίο ισχύει $P^tAP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, (*) όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Επειδή ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ είναι πραγματικός συμμετρικός (Ορισμό 9.2), ο A διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα $P\in M_n(\mathbb{R})$ και αν θέσουμε

$$\boldsymbol{x}=P\,\boldsymbol{y} \tag{9.5}$$

για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ και $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ προκύπτει :

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{x}^t\,A\,\boldsymbol{x}=(P\,\boldsymbol{y})^t\,A(P\,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^t\left(P^tAP\right)\boldsymbol{y}\\&\overset{(*)}{=}\boldsymbol{y}^t\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\,\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\end{aligned}$$

Έτσι από την $q(\boldsymbol{x})$, εφαρμόζοντας αλλαγή μεταβλητών όπως περιγράφεται στην (9.5), προκύπτει μια απλοποιημένη τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{y})$, αποτέλεσμα το οποίο διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1

Έστω $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$, *μία τετραγωνική μορφή του* $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ *και* $A\in M_n(\mathbb{R})$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $A\in M_n(\mathbb{R})$. *Έστω* $P\in M_n(\mathbb{R})$ *ορθογώνιος πίνακας τέτοιος ώστε* $P^tAP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, *για κάθε* $i=1,2,\dots,n$, *όπου* $\lambda_i\in\mathbb{R}$ *είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *(υπολογισμένης της αλγεβρικής πολλαπλότητάς τους). Αν η τετραγωνική μορφή εκφραστεί ως προς τις νέες μεταβλητές* $y_1,y_2,\dots,y_n$ *που προκύπτουν από την αλλαγή μεταβλητών* $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, *τότε η διαγώνια τετραγωνική μορφή είναι*

$$q(\boldsymbol{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2. \tag{9.6}$$

Για την τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x})=x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$ ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -4 & -5\end{pmatrix}$, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=-7$ και $\lambda_2=3$. Για την $\lambda_1=-7$, ο ιδιόχωρος είναι $V(-7)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t \;:\; x_1\in\mathbb{R}\right\}$ και για την $\lambda_2=3$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(3)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}^t \;:\; x_2\in\mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα (Πρόταση 7.11), άρα ο ορθογώνιος πίνακας που μπορεί να κατασκευαστεί, είναι αυτός που προκύπτει αν θέσουμε ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$. Προφανώς ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1}=P^t$. Με την αλλαγή μεταβλητών όπως στην (9.5) έχουμε $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x})$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια που είναι

$$q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^t P^tAP\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^t\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=-7y_1^2+3y_2^2.$$

Παρατήρηση 9.2 Σε κάθε τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$ του $\mathbb{R}^n$ δεν υπάρχει μόνο μια διαγώνια τετραγωνική μορφή, επειδή αυτή εξαρτάται από το πώς κατασκευάζεται ο πίνακας P. Πράγματι, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε μια άλλη διαγώνια μορφή της προηγούμενης τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$, αν χρησιμοποιούσαμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι για $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^t$ έχουμε

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = -140 y_1^2 + 60 y_2^2,$$

δηλαδή η διαγώνια μορφή, που προκύπτει, δεν έχει ως συντελεστές τις ιδιοτιμές του πίνακα A και αυτό γιατί ο πίνακας P που επιλέξαμε δεν είναι ορθογώνιος (τα διανύσματα-στήλες δεν είναι μοναδιαία).

Ορισμός 9.4

Μια τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x})$ *του* $\mathbb{R}^n$ *ονομάζεται*

- ***θετικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} > 0$
- ***θετικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} \geq 0$
- ***αρνητικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $-q(\boldsymbol{x}) > 0$
- ***αρνητικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $-q(\boldsymbol{x}) \geq 0$
- ***αόριστη*** *αν δεν ισχύει καμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις.*

Αρκετές φορές οι παραπάνω χαρακτηρισμοί αναφέρονται και ως πρόσημο της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x})$.

Παράδειγμα 9.3

- Η τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά ορισμένη, αφού $q(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 > 0$ για κάθε μη μηδενικό $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$.
- Η $q_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά ημιορισμένη, γιατί έχει τη μορφή $q_2(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3x_2)^2 + 2x_3^2$, όπου για $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, $q_2(\boldsymbol{x}_0) = 0$ και για κάθε $\boldsymbol{x} \neq k\,\boldsymbol{x}_0$, $k \in \mathbb{R}$, έχουμε $q_2(\boldsymbol{x}) > 0$.

- Η τετραγωνική μορφή $q_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι αόριστη, γιατί αν θέσουμε $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times1}$ έχουμε $q_3(\boldsymbol{x}_0) < 0$, ενώ αν θέσουμε $\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times1}$ έχουμε $q_3(\boldsymbol{x}_a) \geq 0$.

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας λέγεται ***θετικά ορισμένος***, όταν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη και συμβολίζεται $A > 0$. Ανάλογα ορίζονται και οι υπόλοιπες έννοιες και υιοθετούνται οι αντίστοιχοι συμβολισμοί για τον πραγματικό συμμετρικό πίνακα A.

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, επειδή η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του A, $q(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 = -(x_1 - 3x_2)^2 - 2x_3^2 \leq 0$ είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Έστω A ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας και $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Αν το $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times1}$ είναι ένα ιδοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ, τότε από τον ορισμό των ιδιοποσών έχουμε

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t \lambda \boldsymbol{x} = \lambda \|\boldsymbol{x}\|^2. \tag{9.7}$$

Επειδή το μέτρο ενός διανύσματος είναι θετικός αριθμός, σύμφωνα με την (9.7), αναμένουμε το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής να έχει σχέση με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα A. Σχετικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 9.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε ο A είναι

i) *θετικά ορισμένος (ημιορισμένος), αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές (μη αρνητικές),*

ii) *αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρνητικές,*

iii) *αόριστος, αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία θετική και τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή.*

Απόδειξη : i) Αν ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος (ημιορισμένος) τότε για την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή ισχύει $q(\boldsymbol{x}) > 0$, $\left(q(\boldsymbol{x}) \geq 0\right)$, για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times1}$

(Ορισμός 9.4), οπότε και για $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ως ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ ισχύει $q(\boldsymbol{x}) > 0$, $\left(q(\boldsymbol{x}) \geq 0\right)$. Όμως από (9.7) έχουμε και $q(\boldsymbol{x}) = \lambda \|\boldsymbol{x}\|^2$, άρα πρέπει ο λ να είναι θετικός (μη αρνητικός) αριθμός.

Αντίστροφα, αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές (μη αρνητικές) από την (9.6) έχουμε ότι υπάρχουν $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, έτσι ώστε η τετραγωνική μορφή να είναι διαγώνια, δηλαδή, $q(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0$ ή $\left(q(\boldsymbol{y}) \geq 0\right)$, οπότε ο αντίστοιχος πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (ημιορισμένος).

ii) Η απόδειξη στηρίζεται στο i) και στον Ορισμό 9.4 και αφήνεται ως άσκηση.

iii) Η απόδειξη στηρίζεται στα προηγούμενα ερωτήματα και στον Ορισμό 9.4 και αφήνεται ως άσκηση. ◆◆◆

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ (Παράδειγμα 9.3), έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = 2$, συνεπώς είναι αόριστος.

Πρόταση 9.5

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ *συμμετρικός πίνακας και ένας υποπίνακάς του*

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Τότε ο A *είναι*

i) *θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν* $\det A_m > 0$ *για κάθε* $m = 1, 2, \ldots, n$.

ii) *αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν*

$$\det A_1 < 0, \quad \det A_2 > 0, \quad \det A_3 < 0, \ \ldots, \ (-1)^n \det A > 0.$$

Απόδειξη : i) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος τότε και οι A_m, $m = 1, 2, \ldots, n$ είναι θετικά ορισμένοι. Παρατηρούμε ότι οι A_m είναι πραγματικοί συμμετρικοί ως υποπίνακες παραγματικών συμμετρικών πινάκων. Επειδή ένας πίνακας A μπορεί να γραφεί ως σύνθετος πίνακας

$A=\begin{pmatrix} A_m & A_k \\ A_l & A_r \end{pmatrix}$, όταν $m=1,2,\ldots,n-1$ και οι A_k, A_l, A_r είναι πίνακες κατάλληλων τύπων, όπως προκύπτουν από τη διαμέριση που γίνεται με βάση τον A_m, θεωρώντας ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ της μορφής $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}_m^t & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_m\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}_m^t & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_m & A_k \\ A_l & A_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}_m \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\tilde{\boldsymbol{x}}_m^t A_m\,\tilde{\boldsymbol{x}}_m\,. \tag{9.8}$$

Επομένως, αν $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος από την (9.8) είναι φανερό ότι και ο A_m, για κάθε $m=1,2,\ldots,n-1$ είναι θετικά ορισμένος.

Από το i) της Πρότασης 9.4 όλες οι ιδιοτιμές των A_m, $m=1,2,\ldots,n$ είναι θετικές και από τη σχέση (7.2), η ορίζουσα του πίνακα A_m είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\det A_m>0$ για κάθε $m=1,2,\ldots,n$.

Το αντίστροφο της πρότασης θα το αποδείξουμε με επαγωγή, ας υποθέσουμε ότι όταν ισχύει $\det A_m>0$, $m=1,2,\ldots,n-1$, οι αντίστοιχοι πίνακες A_m είναι θετικά ορισμένοι (υπόθεση επαγωγής). Θα δείξουμε ότι όταν $\det A>0$, τότε A θετικά ορισμένος. Από την υπόθεση της επαγωγής είναι φανερό ότι $\det A_1=a_{11}>0$. Στον πίνακα A αντιστοιχεί μια τετραγωνική μορφή, έστω $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$. Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $y_1=\dfrac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)$, και $y_i=x_i$, $i=2,\ldots,n$, τότε η τετραγωνική μορφή $q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ γράφεται

$$q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}=a_{11}y_1^2+q_1(\tilde{\boldsymbol{y}}),\ \text{με}\ \tilde{\boldsymbol{y}}=\begin{pmatrix} y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}^t. \tag{9.9}$$

Επειδή η $q_1(\tilde{\boldsymbol{y}})$ είναι τετραγωνική μορφή θετικά ορισμένη από την υπόθεση της επαγωγής, συνεπώς από (9.9) συμπεραίνουμε ότι $q(\boldsymbol{x})>0$, άρα και ο αντίστοιχος πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

ii) όταν ο πίνακας A_m είναι αρνητικά ορισμένος, ο $-A_m$ είναι θετικά ορισμένος, (Ορισμός 9.4), ακόμη είναι γνωστό ότι για έναν πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(\lambda A)=\lambda^n(\det A)$ (Πρόταση 2.2 iii), επομένως για όλους τους υποπίνακες A_m,

$m = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε $\det(-A_m) = (-1)^m (\det A_m)$, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα από i) συμπληρώνεται η απόδειξη. ◆◆◆

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος, γιατί $\det A_1 = -2 < 0, \quad \det A_2 = 4 > 0, \quad \det A_3 = -22 < 0$.

9.2 Κωνικές Τομές (ή Εφαρμογές στη Γεωμετρία)

Η δυνατότητα που δίνεται από την Πρόταση 9.1, κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να αναχθεί σε διαγώνια μορφή (σχέση (9.6)) μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα, αξιοποιείται σε μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική εφαρμογή, την ταξινόμηση στο $\mathbb{R}^3$ των επιφανειών και στο $\mathbb{R}^2$ των καμπυλών που ορίζονται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

9.2.1 Επιφάνειες δευτέρου βαθμού στον χώρο

Η γενική μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού με τρεις μεταβλητές είναι

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$$

η οποία γράφεται στη μορφή

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} + c = 0 , \tag{9.10}$$

όπου $A \in M_3(\mathbb{R})$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x})$ του $\mathbb{R}^3$ και $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ και $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ που δίνει $P^t AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ιδιοτιμές του A, η αλλαγή μεταβλητών $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ και η αντικατάσταση $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}^t P$ απλοποιούν την (9.10) ως εξής :

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + c = 0 \tag{9.11}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

➢ Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, ο μετασχηματισμός $w_i = z_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}, \quad i = 1,2,3$ μετατρέπει την (9.11) σε

$$\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_3 w_3^2 = k \tag{9.12}$$

όπου $k = \dfrac{\beta_1^2}{4\lambda_1} + \dfrac{\beta_2^2}{4\lambda_2} + \dfrac{\beta_3^2}{4\lambda_3} - c$.

- Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και εφόσον ο αριθμός $k \neq 0$, η (9.12) έχει μία από τις μορφές.

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} + \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = 1$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, ελλειψοειδές

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} - \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = 1$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, μονόχωνο υπερβολοειδές

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} - \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = -1$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, δίχωνο υπερβολοειδές

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} + \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = -1$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, φανταστική επιφάνεια

- Έστω $k = 0$

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} - \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = 0$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, ελλειπτικός κώνος

  $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} + \dfrac{w_3^2}{a_3^2} = 0$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, το σημείο $(0,0,0)$

➢ Αν μία ιδιοτιμή είναι μηδέν, έστω $\lambda_3 = 0$, και $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ οι μετασχηματισμοί $w_i = z_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}, \quad i = 1,2$ και $w_3 = \dfrac{\beta_1^2}{4\lambda_1} + \dfrac{\beta_2^2}{4\lambda_2} - c - \beta_3 z_3$ μετατρέπουν την (9.11) σε

$$\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 = w_3 \tag{9.13}$$

Η (9.13) έχει μία από τις μορφές :

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} = w_3$, αν $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, ελλειπτικό παραβολοειδές

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} + \dfrac{w_2^2}{a_2^2} = -w_3$ ελλειπτικό υπερβολοειδές

- Για $\beta_3 = 0$ οι μορφές είναι :

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2}+\dfrac{w_2^2}{a_2^2}=1$ ελλειπτικός κύλινδρος

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2}-\dfrac{w_2^2}{a_2^2}=1$ υπερβολικός κύλινδρος

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2}+\dfrac{w_2^2}{a_2^2}=-1$ φανταστική επιφάνεια

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2}+\dfrac{w_2^2}{a_2^2}=0$ ο άξονας w_3

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2}-\dfrac{w_2^2}{a_2^2}=0$ ζευγάρι τεμνόμενων επιπέδων

- Αν δύο ιδιοτιμές είναι μηδέν, έστω $\lambda_2, \lambda_3 = 0$ και $\lambda_1 \neq 0$,

  θέτοντας $w_1 = z_1 + \dfrac{\beta_1}{2\lambda_1}$ και $z_2 = w_2$, $z_3 = w_3$ η (9.11) μετασχηματίζεται σε

$$\lambda_1 w_1^2 = \frac{\beta_1^2}{4\lambda_1} - \beta_2 w_2 - \beta_3 w_3 - c \tag{9.14}$$

Η (9.14) έχει μία από τις μορφές :

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} = w_2$ ή $\dfrac{w_1^2}{a_1^2} = w_3$ παραβολικός κύλινδρος

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} = 1$ ζεύγος παράλληλων επιπέδων

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} = 0$ το επίπεδο $w_1 = 0$

$\dfrac{w_1^2}{a_1^2} = -1$ ζεύγος φανταστικών επιπέδων

9.2.2 Καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

Η γενική μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού με δύο μεταβλητές είναι

$$a_{11}x_1^{\,2} + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^{\,2} + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\,,$$

η οποία γράφεται στην ίδια μορφή της (9.10) με στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή,

$$\boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t\,\boldsymbol{x} + c = 0\,, \tag{9.10}$$

όπου $A \in M_2(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Από την Πρόταση 9.1 υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^t AP = diag\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$, λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A. Αν στην (9.10) αντικαταστήσουμε $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} = \left(z_1 \quad z_2\right)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $\left(\beta_1 \quad \beta_2\right) = \boldsymbol{b}^t P$ παίρνουμε

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + c = 0 \tag{9.15}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, θέτοντας $w_i = z_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}$, $i = 1, 2$ η (9.15) μετασχηματίζεται σε

$$\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 = k \tag{9.16}$$

  όπου $k = \dfrac{\beta_1^2}{4\lambda_1} + \dfrac{\beta_2^2}{4\lambda_2} - c$. Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών λ_1, λ_2 και εφόσον ο αριθμός k είναι μη μηδενικός, η (9.16) έχει μία από τις επόμενες μορφές.

  - Έστω $k \neq 0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2} + \frac{w_2^2}{a_2^2} = 1 \quad \text{αν } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \quad (\text{έλλειψη})$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2} - \frac{w_2^2}{a_2^2} = 1 \quad \text{αν } \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \quad (\text{υπερβολή})$$

$$-\frac{w_1^2}{a_1^2} - \frac{w_2^2}{a_2^2} = 1 \quad \text{αν } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \quad (\text{κενό σύνολο})$$

  - Έστω $k = 0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2} + \frac{w_2^2}{a_2^2} = 0 \quad \text{αν } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \text{ ή αν } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \quad (\text{το σημείο } \left(0,0\right))$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2} - \frac{w_2^2}{a_2^2} = 0 \quad \text{αν } \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \quad (\text{ζευγάρι τεμνόμενων ευθειών})$$

- Αν μία ιδιοτιμή είναι μηδέν, έστω $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_1 \neq 0$, θέτοντας $w_1 = z_1 + \dfrac{\beta_1}{2\lambda_1}$ και $w_2 = \dfrac{\beta_1^2}{4\lambda_1} - c - \beta_2 z_2$ παίρνουμε από την (9.15) $\lambda_1 w_1^2 = w_2$, η οποία είναι η εξίσωση παραβολής.
- Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, η (9.15) παριστάνει ευθεία.

9.3 Τοπικά ακρότατα συναρτήσεων (ή Εφαρμογές στην Ανάλυση)

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών με $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}$ για κάθε $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$. **Μερική παράγωγος πρώτης τάξης** της συνάρτησης, ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή x_j για $j = 1, 2, \ldots, n$, είναι η συνήθης (πρώτης τάξης) παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή x_j, θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ ως σταθερές, και συμβολίζεται $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. **Μερική παράγωγος δεύτερης τάξης** της συνάρτησης ονομάζεται η συνήθης παράγωγος δεύτερης τάξης της συνάρτησης, ως προς τις μεταβλητές που σημειώνονται κάθε φορά διατηρώντας τη σειρά. Συμβολίζονται

$$\frac{\partial^2 f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j}\right)$$

ή $\dfrac{\partial^2 f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_k}\right)$, για κάθε $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης της συνάρτησης.

Για παράδειγμα, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 3x_2$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\dfrac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2^3$ και $\dfrac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} = 6x_1x_2^2 + 3$. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι :

$$\frac{\partial^2 f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1 + 2x_2^3\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(6x_1x_2^2 + 3\right) = 12x_1x_2$$

και $\dfrac{\partial^2 f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(6x_1x_2^2 + 3\right) = 6x_2^2$, $\dfrac{\partial^2 f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(2x_1 + 2x_2^3\right) = 6x_2^2$.

Αν είναι γνωστός ο πραγματικός χώρος στον οποίο αναφερόμαστε, για συντομία θα γράφουμε $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Γενικά ισχύει $\dfrac{\partial^2 f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j \partial x_k} \neq \dfrac{\partial^2 f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_k \partial x_j}$, για κάθε $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς, αποδεικνύεται ότι ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ για κάθε $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, ο πίνακας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης

$$H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{9.17}$$

είναι ένας τετραγωνικός πραγματικός συμμετρικός και ονομάζεται **Hessian πίνακας** της συνάρτησης f στο σημείο $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ ή **πίνακας του Hesse** στο σημείο $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Στην Ανάλυση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση η οποία χαρακτηρίζει το είδος των ακροτάτων σημείων $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ μιας πραγματικής συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

Πρόταση 9.6

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής και οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι συνεχείς, και έστω ένα σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, που είναι η λύση του συστήματος $\frac{\partial f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j} = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε

i) *αν ο Hessian πίνακας της f, στο σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, είναι αρνητικά ορισμένος, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.*

ii) αν ο Hessian πίνακας της f, στο σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, είναι θετικά ορισμένος, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

iii) αν ο Hessian πίνακας της f, στο σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, είναι αόριστος, τότε η f δεν έχει ακρότατο στο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Παράδειγμα 9.7 Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, με

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

Το ομογενές σύστημα που προκύπτει από το μηδενισμό των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης είναι :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_1}&=0\\ \frac{\partial f\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_2}&=0\\ \frac{\partial f\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_3}&=0\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}8x_1+4x_2+2x_3&=0\\ 4x_1+8x_2+2x_3&=0\\ 2x_1+2x_2+4x_3&=0\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}8&4&2\\4&8&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

Επειδή $\det A=160$, το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική, (Πρόταση 3.6i και κεφάλαιο 4 $\det A\neq 0$ $r\left(A\right)=n$), συνεπώς , $\left(x_1{}^0,x_2{}^0,x_3{}^0\right)=\left(0,0,0\right)$.

Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο $\left(0,0,0\right)$, ο οποίος από (9.17) είναι:

$$H\left(0,0,0\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2 f\left(0,0,0\right)}{\partial x_3^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&2\\4&8&2\\2&2&4\end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $H\left(0,0,0\right)$ είναι θετικά ορισμένος (Πρόταση 9.5), επειδή

$$\det H_1=8>0,\quad \det H_2=\det\begin{pmatrix}8&4\\4&8\end{pmatrix}=48>0,\quad \det H=\det\begin{pmatrix}8&4&2\\4&8&2\\2&2&4\end{pmatrix}=160>0.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.6, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $\left(x_1{}^0,x_2{}^0,x_3{}^0\right)=\left(0,0,0\right)$.

Σε κάποιες περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν υπάρχουν ακρότατα μιας συνάρτησης $f=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ με την προϋπόθεση οι μεταβλητές να συνδέονται με κάποιες σχέσεις μεταξύ τους (να υπάρχουν περιορισμοί). Σημειώνοντας $g_j=g_j\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, $j=1,2,\ldots,m$ με $m<n$ τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούν οι ανεξάρτητες μεταβλητές χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των

πολλαπλασιαστών Lagrange για να υπολογίσουμε αν υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f.

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right), \qquad (9.18)$$

όπου $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ οι *πολλαπλασιαστές Lagrange*, τον $n\times n$ πίνακα

$$\Phi=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \text{ τον } m\times n \text{ πίνακα } G=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

και τον $(n+m)\times(n+m)$ πίνακα

$$\Delta_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)=\begin{pmatrix} \Phi & G^t \\ G & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \qquad (9.19)$$

Θεωρούμε τις ορίζουσες $D_1,D_2,\ldots,D_{n-m}$, που ορίζονται ως εξής : $D_1=\det\left(\Delta_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)\right)$,

D_2 είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον (9.19) αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη

D_3 είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον (9.19) αν διαγράψουμε τις δύο πρώτες γραμμές και τις δύο πρώτες στήλες

κ.ο.κ.

Στην Ανάλυση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση η οποία χαρακτηρίζει το είδος των ακροτάτων σημείων $\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$ μιας πραγματικής συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

Πρόταση 9.8

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *με τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης συνεχείς, έστω οι περιορισμοί*

$$g_j = g_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{με} \quad m < n,$$

όπου οι g_j είναι συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, και $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ η αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange *όπως στην* (9.18).

Αν το σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0\right)$ είναι η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)}{\partial \lambda_j} = 0, \text{ για κάθε}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, και οι ορίζουσες D_k, $k = 1, 2, \ldots, n-m$, υπολογισμένες στο ίδιο σημείο $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0\right)$, τότε ισχύουν τα επόμενα :

i) *Το $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης f με τους περιορισμούς $g_j = 0$, όταν ισχύει ένα από τα επόμενα :*

α) m άρτιος και $D_k > 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$

β) m περιττός και $D_k < 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$

ii) *Το $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της συνάρτησης f με τους περιορισμούς $g_j = 0$, όταν ισχύει ένα από τα επόμενα :*

α) n άρτιος και $\left(-1\right)^k D_k < 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$

β) n περιττός και $\left(-1\right)^k D_k > 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-m$

Παράδειγμα 9.9 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, όπου

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3$$

με περιορισμούς $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ και $2x_1 - x_2 - x_3 = 6$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις των περιορισμών $g_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + x_2 + x_3 - 12$, $g_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1 - x_2 - x_3 - 6$ και τη συνάρτηση Lagrange, όπως αυτή ορίστηκε στην (9.18),

$$\begin{aligned} F\left(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2\right) &= f\left(x_1, x_2, x_3\right) + \lambda_1 g_1\left(x_1, x_2, x_3\right) + \lambda_2 g_2\left(x_1, x_2, x_3\right) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3 + \lambda_1\left(x_1 + x_2 + x_3 - 12\right) + \lambda_2\left(2x_1 - x_2 - x_3 - 6\right) \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3}=0\\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=0\\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2x_1-2+\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 2x_2-2+\lambda_1-\lambda_2=0\\ 2x_3-2+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_1+x_2+x_3-12=0\\ 2x_1-x_2-x_3-6=0\end{array}\right\}$$

είναι $x_1=6,\quad x_2=x_3=3,\quad \lambda_1=-6,\quad \lambda_2=-2$. Ο πίνακας από (9.19) είναι

$$\Delta_1(6,3,3,-6,-2)=\begin{pmatrix}2&0&0&1&2\\0&2&0&1&-1\\0&0&2&1&-1\\1&1&1&0&0\\2&-1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n=3$, $m=2$, χρειάζεται να υπολογισθεί μόνο η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1(6,3,3,-6,-2)$, η οποία είναι $\det\left(\Delta_1(6,3,3,-6,-2)\right)=36>0$, και από Πρόταση 9.8 i υποπερίπτωση α συμπεραίνουμε ότι στο σημείο $\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)=(6,3,3)$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμής της συνάρτησης $f(6,3,3)=33$.

9.4 Ιδιάζουσες τιμές πίνακα (ή Εφαρμογές στη Στατιστική)

Όπως διαπιστώσαμε στο κεφάλαιο 8, η παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ σε διαγώνια μορφή με άλλα λόγια η διαγωνοποίηση του A, παίζει σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας. Το πρόβλημα είναι ότι η διαγωνοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα A δεν είναι πάντα εφικτή, μια και όπως διαπιστώσαμε δεν υπάρχει πάντοτε αντιστρέψιμος πίνακας P, για να επιτυγχάνεται η παραγοντοποίηση στη μορφή $A = P\Delta P^{-1}$, όπου Δ κατάλληλος διαγώνιος πίνακας.

Στην παράγραφο αυτή αντιμετωπίζεται το ανάλογο πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός $m \times n$ πίνακα και αποδεικνύεται ότι για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ υπάρχουν πάντοτε κατάλληλοι πίνακες $Q,\ P$ ώστε να επιτυγχάνεται μια παραγοντοποίηση του στη μορφή $A = Q\Delta P^{-1}$, όπου Δ είναι διαγώνιος πίνακας.

Για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ παρατηρούμε ότι $A^t A \in M_n(\mathbb{R})$, $AA^t \in M_m(\mathbb{R})$ και όπως στο Παράδειγμα 1.12, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες i και vi των Προτάσεων 1.2 και 1.3 συμπεραίνουμε ότι, επειδή

$$\left(A^t A\right)^t = A^t \left(A^t\right)^t = A^t A \quad \text{και} \quad \left(AA^t\right)^t = \left(A^t\right)^t A^t = AA^t. \tag{9.20}$$

Επίσης οι συμμετρικοί πίνακες $A^t A,\ AA^t$ είναι θετικά ημιορισμένοι, διότι για κάθε $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις :

$$\boldsymbol{x}^t A^t A\boldsymbol{x} = \left(A\boldsymbol{x}\right)^t A\boldsymbol{x} = \left\|A\boldsymbol{x}\right\|^2 \geq 0, \quad \boldsymbol{y}^t AA^t \boldsymbol{y} = \left(A^t \boldsymbol{y}\right)^t A^t \boldsymbol{y} = \left\|A^t \boldsymbol{y}\right\|^2 \geq 0. \tag{9.21}$$

Στην περίπτωση δε ενός συμμετρικού πίνακα A, όπου ισχύει $A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$ με $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, παρατηρούμε ότι

$$\|A\boldsymbol{x}\| = \|\lambda\,\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα A, τότε το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα είναι αυτό που κάνει το διάνυσμα $A\boldsymbol{x}$ να έχει ακριβώς ίδιο μήκος με την τιμή $|\lambda|$.

Αυτές οι παρατηρήσεις συμβάλλουν στην παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, αρκεί να κάνουμε τη μελέτη του μέσω των αντίστοιχων συμμετρικών, όπως αποδείχθηκαν ότι είναι στην (9.20). Αξίζει να αναφέρουμε την επόμενη πρόταση, η οποία μας πληροφορεί ότι για όλα τα μοναδιαία $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ οι τιμές της τετραγωνικής μορφής $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ ανήκουν σε ένα κλειστό διάστημα του πραγματικού άξονα με το αριστερό άκρο του διαστήματος την ελάχιστη ιδιοτιμή του αντίστοιχου συμμετρικού πίνακα A και δεξιό άκρο του διαστήματος τη μέγιστη ιδιοτιμή του A.

Πρόταση 9.10

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας και οι τιμές

$$m = \min\left\{\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \ : \ \|\boldsymbol{x}\| = 1\right\} \quad \textit{και} \quad \mu = \max\left\{\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \ : \ \|\boldsymbol{x}\| = 1\right\}.$$

Τότε μ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_n του A, όταν το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και ταυτίζεται με το ιδιοδιάνυσμα $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή και m είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του A, όταν $\boldsymbol{x}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και ταυτίζεται με το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή.

Απόδειξη : Επειδή ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται από έναν ορθογώνιο πίνακα $P \in M_n(\mathbb{R})$ (Πρόταση 9.1). Ας υποθέσουμε ότι όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές του A έχουν διαταχθεί

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_{n-1} \le \lambda_n \tag{9.22}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους είναι

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Από αυτά (αν χρειάζεται εφαρμόζουμε μέθοδο Gram-Scmidt) αποκτούμε μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων τα

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_{n-1}, \hat{\boldsymbol{x}}_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

και θεωρούμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ έχει στήλες με την ίδια σειρά τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης, δηλαδή $P = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1 & \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \hat{\boldsymbol{x}}_n\end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών (9.5), $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y}$, έχουμε

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^t\,\boldsymbol{x} = (P\,\boldsymbol{y})^t\,P\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t\,\underbrace{P^tP}_{I}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t\,\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2 \tag{9.23}$$

οπότε από την (9.23) συμπεραίνουμε

$$\|\boldsymbol{x}\| = 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|\boldsymbol{y}\| = 1\ . \tag{9.24}$$

Ας θεωρήσουμε κάποιο $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητών $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και την Πρόταση 9.1 έχουμε $P^tAP = \Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ και

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t AP\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \Delta\,\boldsymbol{y} &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &\overset{(9.22)}{\leq} \lambda_n y_1^2 + \lambda_n y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &= \lambda_n \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) = \lambda_n \|\boldsymbol{y}\|^2 \overset{(9.24)}{=} \lambda_n\end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \leq \lambda_n$, δηλαδή $\mu \leq \lambda_n$.

Επίσης αν επιλέξουμε $\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^t$, προφανώς $\|\tilde{\boldsymbol{y}}\| = 1$ και $\tilde{\boldsymbol{y}}^t \Delta\,\tilde{\boldsymbol{y}} = \lambda_n$.

Επομένως $\mu = \lambda_n$. Επιπλέον, $\boldsymbol{x} = P\,\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1 & \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \hat{\boldsymbol{x}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}_n$, έτσι μετά από πράξεις

$$\lambda_n = \tilde{\boldsymbol{y}}^t \Delta\,\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{y}}^t \left(P^t AP\right)\tilde{\boldsymbol{y}} = \left(P\,\tilde{\boldsymbol{y}}\right)^t A\left(P\,\tilde{\boldsymbol{y}}\right) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}_n^t A\,\hat{\boldsymbol{x}}_n,$$

επαληθεύουμε ότι το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ είναι αυτό που κάνει μέγιστη την τιμής της τετραγωνικής μορφής.

Με ανάλογα επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι $m = \lambda_1$ και ότι το αντίστοιχο διάνυσμα

$$\boldsymbol{x} = P\,\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1 & \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \hat{\boldsymbol{x}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}_1.$$

◆◆◆

Παράδειγμα 9.11 Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$. Αναζητούμε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το μήκος του διανύσματος $A\boldsymbol{x}$.

Ο συμμετρικός πίνακας $A^t A = \begin{pmatrix}13 & 12 & 2\\ 12 & 13 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 9$ και $\lambda_3 = 0$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 4\end{pmatrix}^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$. Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα ανά δύο, οπότε τα μοναδιαία είναι

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t,\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\end{pmatrix}^t \text{ και } \hat{\boldsymbol{x}}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t.$$

Η ποσότητα $\|A\boldsymbol{x}\|^2$ μεγιστοποιείται στο ίδιο $\boldsymbol{x}$ στο οποίο μεγιστοποιείται και η $\|A\boldsymbol{x}\|$, όμως από (9.21) έχουμε $\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^t A^t A \boldsymbol{x}$, επίσης από (9.20) ο $A^t A$ είναι συμμετρικός πίνακας, άρα εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.10 συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της $\boldsymbol{x}^t A^t A \boldsymbol{x}$ ισούται με τη μέγιστη ιδιοτιμή του $A^t A$ και μάλιστα αυτό επιτυγχάνεται για $\boldsymbol{x} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_1$, άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\|A\boldsymbol{x}\|^2 = 25$.

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, από (9.20) ο $A^t A$ είναι συμμετρικός, άρα ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.14) μέσω ενός πίνακα P. Ας θεωρήσουμε $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση που τα διανύσματά της να είναι μοναδιαία ιδιοδιανύσματα του $A^t A$ στις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Από την (9.21) και την Πρόταση 9.4 είναι φανερό πως όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε μια διάταξή τους $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$.

Ορισμός 9.5

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *και* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *οι ιδιοτιμές του* $A^t A$ *με* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$. *Όλες οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών* λ_i *ονομάζονται* ***ιδιάζουσες τιμές*** (singular values) *του* A, συμβολίζονται σ_i, δηλαδή

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Παρατήρηση 9.12 Αν θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{v}_i$, όπου το $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι κάποιο στοιχείο της παραπάνω ορθοκανονικής βάσης ($\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$) κάνοντας πράξεις όπως και στην (9.21), έχουμε

$$\|A\boldsymbol{v}_i\|^2 = \boldsymbol{v}_i^t \left(A^t A \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{v}_i^t \left(\lambda_i \boldsymbol{v}_i\right) = \lambda_i.$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με τον Ορισμό 9.5 προκύπτει ότι τα μήκη των $A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \ldots, A\boldsymbol{v}_n$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A, δηλαδή

$$\|A\boldsymbol{v}_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i. \tag{9.25}$$

Για παράδειγμα, οι ιδιοτιμές του $A^t A$ στο Παράδειγμα 9.11 είναι $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 9$ και $\lambda_3 = 0$. Επομένως οι ιδιάζουσες τιμές του αντίστοιχου A είναι $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 5$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 3$ και $\sigma_3 = 0$. Επίσης μπορούμε να επαληθεύσουμε τα σχόλια της

Παρατήρησης 9.12, μια και χρησιμοποιώντας τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_2,\ \boldsymbol{v}_3 \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_3$ του Παραδείγματος 9.11 παίρνουμε:

$$A\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ οπότε } \left\|A\boldsymbol{v}_1\right\|^2 = 25 \Rightarrow \left\|A\boldsymbol{v}_1\right\| = 5 = \sigma_1,$$

$$A\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ συνεπώς } \left\|A\boldsymbol{v}_2\right\|^2 = 9 \Rightarrow \left\|A\boldsymbol{v}_2\right\| = 3 = \sigma_2,$$

και $A\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, από όπου $\left\|A\boldsymbol{v}_3\right\|^2 = 0 \Rightarrow \left\|A\boldsymbol{v}_3\right\| = 0 = \sigma_3$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν αλγόριθμο για την «παραγοντοποίηση» ενός $m \times n$ πίνακα A με τη χρήση «ειδικών» πινάκων.

Πρόταση 9.13

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με $r(A) = k$. Τότε υπάρχει $m \times n$ πίνακας

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta_{k\times k} & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(m-k)\times k} & \mathbb{O}_{(m-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$$

με τον $\Delta = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > 0$ οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A και υπάρχουν οι $m \times m$ και $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες U, V αντιστοίχως τέτοιοι ώστε

$$A = U\Sigma V^t. \tag{9.26}$$

Απόδειξη : Έστω λ_i οι ιδιοτιμές του A^tA με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ και $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

Αν για κάποια $\boldsymbol{v}_i$ ισχύει $A^tA\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, τότε $\left\|A\boldsymbol{v}_i\right\|^2 = \boldsymbol{v}_i^t A^tA\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$. Επομένως είναι φανερό ότι $A^tA\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ αν και μόνο αν $A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, το οποίο σημαίνει ότι το $\boldsymbol{v}_i$ ανήκει στον μηδενόχωρο του A, ο οποίος έχει διάσταση $n-k$, επειδή $r(A) = k$. Επίσης υπάρχουν k το πλήθος διανύσματα για τα οποία $A\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$, οπότε από την

(9.25) υπάρχουν $\|A\boldsymbol{v}_i\| = \sigma_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ μια ορθοκανονική βάση με $\boldsymbol{u}_i = \dfrac{1}{\|A\boldsymbol{v}_i\|} A\boldsymbol{v}_i \overset{(9.25)}{=} \dfrac{1}{\sigma_i} A\boldsymbol{v}_i$, από όπου

$$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i\, \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \,. \tag{9.27}$$

Επεκτείνουμε τη βάση $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ στην $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ και θεωρούμε

$$U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}.$$

Προφανώς οι πίνακες U, V από την κατασκευή τους είναι ορθογώνιοι πίνακες και

$$\begin{aligned} AV = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \ldots & A\boldsymbol{v}_k & A\boldsymbol{v}_{k+1} & \ldots & A\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \\ &\overset{(9.27)}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 & \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \sigma_k \boldsymbol{u}_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned} U\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \vdots & \\ & \sigma_2 & & & \vdots & \\ & & \ddots & & \vdots & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ & & & \sigma_k & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \mathbb{O}_{(m-k)\times k} & & \vdots & \mathbb{O}_{(m-k)\times(n-k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 & \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \sigma_k \boldsymbol{u}_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.29}$$

Από τα δεύτερα μέλη των (9.28) και (9.29) συμπεραίνουμε ότι $AV = U\Sigma$ και επειδή ο πίνακας V είναι ορθογώνιος πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη ισότητα δεξιά επί V^t καταλήγουμε στην (9.26). ◆◆◆

Παρατήρηση 9.14 Η παραγοντοποίηση του $m \times n$ πίνακα A στη μορφή (9.26) ονομάζεται **ιδιάζουσα ανάλυση** (singular value decomposition, ή συντομογραφικά SVD) του A. Ο πίνακας Σ είναι μοναδικά ορισμένος, μια και τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $A^t A$, ποσότητες μοναδικά ορισμένες. Οι πίνακες U, V δεν είναι μοναδικά ορισμένοι, επειδή εξαρτώνται από τα ιδιοδιανύσματα του $A^t A$, οι στήλες του U ονομάζονται αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα A, και οι στήλες του V ονομάζονται δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A.

Παράδειγμα 9.15 Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθούν ορθογώνιοι πίνακες U,V, ώστε να παραγοντοποιηθεί ο πίνακας A στη μορφή (9.26).

Αρχικά ο συμμετρικός πίνακας $A^tA=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A^tA}(\lambda)=\lambda^2\left(\lambda^2-22\lambda+96\right)=\lambda^2(\lambda-6)(\lambda-16)$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=16$, $\lambda_2=6$ και $\lambda_3=0$ (διπλή ρίζα). Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\boldsymbol{x}_1=(-1 \quad -2 \quad 1 \quad 2)^t$, $\boldsymbol{x}_2=(1 \quad 2 \quad -1 \quad 3)^t$, $\boldsymbol{x}_3=(-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{x}_4=(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^t$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε μέθοδο Gram-Schmidt ανάμεσα στα δύο τελευταία ιδιοδιανύσματα $\tilde{\boldsymbol{x}}_4=\boldsymbol{x}_4-\dfrac{\boldsymbol{x}_4\circ\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|^2}\boldsymbol{x}_3=\left(\dfrac{1}{5} \quad \dfrac{2}{5} \quad 1 \quad 0\right)^t$. Διαιρώντας τα διανύσματα με τα μέτρα τους έχουμε τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης, συγκεκριμένα

$$\boldsymbol{v}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1 \quad -2 \quad 1 \quad 2)^t, \qquad \boldsymbol{v}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1 \quad 2 \quad -1 \quad 3)^t,$$

$$\boldsymbol{v}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t,$$

$$\boldsymbol{v}_4=\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_4}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_4\|}=\frac{5}{\sqrt{30}}\left(\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 1 \quad 0\right)^t=\frac{1}{\sqrt{30}}(1 \quad 2 \quad 5 \quad 0)^t.$$

Οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι $\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=4$, $\sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{6}$, ο βαθμός του A είναι $r(A)=2$. Επομένως $A\boldsymbol{v}_3=A\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}$. Ορίζουμε όπως στην (9.27) την ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ με

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sigma_1}A\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{4\sqrt{10}}(-4 \quad 12)^t=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1 \quad 3)^t,$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sigma_2}A\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{15}}(9 \quad 3)^t=\frac{1}{\sqrt{10}}(3 \quad 1)^t,$$

συνεπώς ο ορθογώνιος πίνακας U είναι

$$U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{15} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{15} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{10} & 3/\sqrt{15} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Με τους παραπάνω ορθογώνιους πίνακες και για τον $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ισχύει η (9.26), σύμφωνα με την Πρόταση 9.13.

Αν ο πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ έχει $r(A) = k$ κάνοντας μια κατάλληλη διαμέριση των ορθογωνίων πινάκων U, V

$$U = \begin{pmatrix} U_k & U_{m-k} \end{pmatrix}, \qquad \text{όπου} \quad U_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix} \tag{9.30}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_k & V_{n-k} \end{pmatrix}, \qquad \text{όπου} \quad V_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

και αντικαθιστώντας τους πίνακες στην (9.26) καταλήγουμε

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_k & U_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_k^t \\ V_{n-k}^t \end{pmatrix} = U_k \Delta V_k^t, \tag{9.32}$$

όπου $\Delta = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, σ_i οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A. Με βάση την παραγοντοποίηση του πίνακα A στην (9.32), και επειδή ο Δ είναι αντιστρέψιμος πίνακας (τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί), ορίζουμε τον $n\times m$ πίνακα **ψευδοαντίστροφο πίνακα** του A (γνωστό και ως γενικευμένο αντίστροφο του A ή Moore-Penrose inverse matrix)

$$A^+ = V_k \Delta^{-1} U_k^t. \tag{9.33}$$

Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ του Παραδείγματος 9.15, επειδή $r(A) = 2$, θεωρούμε τις διαμερίσεις των ορθογωνίων πινάκων U, V, όπως οι σχέσεις (9.30) και (9.31) υποδεικνύουν. Οπότε έχουμε $U_2 \equiv U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$,

$V_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{15} \\ -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{10} & 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}$ και από την (9.33) υπολογίζουμε ότι ο ψευδοαντίστροφος πίνακας του A είναι

$$A^+ = V_2 \Delta^{-1} U_2^t = V_2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} U_2^t = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/24 \\ 1/4 & -1/12 \\ -1/8 & 1/24 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 9.16

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με $r(A) = k$. Τότε ο $n \times m$ πίνακας A^+ έχει τις εξής ιδιότητες:

i) $AA^+A = A$

ii) $A^+AA^+ = A^+$

iii) *οι πραγματικοί πίνακες AA^+ και A^+A είναι συμμετρικοί.*

Απόδειξη : i) Αντικαθιστώντας από την (9.32) και την (9.33) τους πίνακες A, A^+ αντιστοίχως έχουμε

$$AA^+A \underset{(9.33)}{\overset{(9.32)}{=}} U_k \Delta V_k^t \left(V_k \Delta^{-1} U_k^t\right) U_k \Delta V_k^t = U_k \Delta \underbrace{V_k^t V_k}_{I} \Delta^{-1} \underbrace{U_k^t U_k}_{I} \Delta V_k^t$$

$$= U_k \underbrace{\Delta\Delta^{-1}}_{I} \Delta V_k^t = U_k \Delta V_k^t \overset{(9.32)}{=} A.$$

ii) Ανάλογα όπως και στην απόδειξη της i) έχουμε

$$A^+AA^+ \underset{(9.32)}{\overset{(9.33)}{=}} \left(V_k \Delta^{-1} U_k^t\right) U_k \Delta V_k^t \left(V_k \Delta^{-1} U_k^t\right) = V_k \Delta^{-1} \underbrace{U_k^t U_k}_{I} \Delta \underbrace{V_k^t V_k}_{I} \Delta^{-1} U_k^t$$

$$= V_k \underbrace{\Delta^{-1}\Delta}_{I} \Delta^{-1} U_k^t = V_k \Delta^{-1} U_k^t \overset{(9.33)}{=} A^+.$$

iii) Από τη σχέση

$$AA^{+} \underset{(9.33)}{\overset{(9.32)}{=}} U_k \Delta \underbrace{V_k^t V_k}_{I} \Delta^{-1} U_k^t = U_k \underbrace{\Delta\Delta^{-1}}_{I} U_k^t = U_k U_k^t \qquad (*)$$

προφανώς προκύπτει $\left(AA^{+}\right)^t \overset{(*)}{=} \left(U_k U_k^t\right)^t = U_k U_k^t \overset{(*)}{=} AA^{+}$, δηλαδή AA^{+} είναι συμμετρικός, και από την ισότητα $A^{+}A = V_k \Delta^{-1} \underbrace{U_k^t U_k}_{I} \Delta V_k^t = V_k \underbrace{\Delta^{-1}\Delta}_{I} V_k^t = V_k V_k^t$ (**) συμπεραίνουμε ότι $\left(A^{+}A\right)^t \overset{(**)}{=} \left(V_k V_k^t\right)^t = V_k V_k^t \overset{(**)}{=} A^{+}A$, άρα ο $A^{+}A$ είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας. ◆◆◆

Παρατήρηση 9.17 • Αποδεικνύεται και το αντίστροφο της Πρότασης 9.16, το οποίο αρκετές φορές χρησιμοποιείται και ως ορισμός για τον γενικευμένο αντίστροφο. Συγκεκριμένα, για τον πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ο $A^{+} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ονομάζεται **ψευδοαντίστροφος** του A ή **γενικευμένος αντίστροφος**, αν επαληθεύει τις τρεις ιδιότητες i) $AA^{+}A = A$, ii) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$, iii) οι πίνακες AA^{+} και $A^{+}A$ είναι συμμετρικοί.

• Από τον ορισμό του ψευδοαντιστρόφου πίνακα (9.33) μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτός είναι μοναδικός.

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε A^{+} είναι ο A^{-1}. Γενικά ο ψευδοαντίστροφος πίνακας χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που ο πίνακας είναι A είναι μη αντιστρέψιμος.

9.5 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 9.18 Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε μια αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.

i) $q_1(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$

ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ του $\mathbb{R}^3$

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με την (9.2) και (9.3), ο αντίστοιχος πραγματικός συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1 χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A_1 και τα ιδιοδιανύσματά του τα οποία θα αποτελέσουν τις στήλες του ορθογωνίου πίνακα P, αρκεί αυτά να είναι ορθογώνια. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_1 είναι $\chi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$, άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 7$.

Για $\lambda_1 = 2$ το ομογενές σύστημα $(A_1 - 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ έχει λύση τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(2) = \left\{x_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της λ_1 ιδιοτιμής το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 7$ το ομογενές σύστημα $(A_1 - 7I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ έχει λύση τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(7) = \left\{x_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^t \ : x_1 \in \mathbb{R}\right\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της λ_2 ιδιοτιμής το $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^t$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A_1 είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.11). Άρα ο ορθογώνιος πίνακας $P \in M_2(\mathbb{R})$ κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A_1, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t A_1 P = diag(2, 7)$ και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (9.5), $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_1 \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_1 P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 2y_1^2 + 7y_2^2,$$

αποτέλεσμα σύμφωνο με την (9.6).

ii) Σύμφωνα με την (9.3), ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x})$ είναι $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.1 βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A_2 και τα ιδιοδιανύσματά του. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_2 είναι $\chi_{A_2}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-9)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 9$.

Για $\lambda_1 = -1$ το ομογενές σύστημα $(A_2 + I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ έχει λύση τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-1) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}^t \ : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της λ_1 ιδιοτιμής το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 4$ από το σύστημα $(A_2 - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ υπολογίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $V(4) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t \ : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της λ_2 ιδιοτιμής το $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Τέλος, για $\lambda_3 = 9$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(9) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t \ : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_3 το $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A_2 είναι διακεκριμένες, όλα τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 7.11). Άρα ο ορθογώνιος πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A_2, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή

$$P=\begin{pmatrix} 4/\sqrt{50} & 3/5 & -4/\sqrt{50} \\ -3/\sqrt{50} & 4/5 & 3/\sqrt{50} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

. Προφανώς επαληθεύεται η σχέση $P^t A_2 P = diag(-1, 4, 9)$ και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (9.5), $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y}$, με $\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$, η τετραγωνική μορφή $q_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_2\, \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_2\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_2 P\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = -y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 .$$

iii) Όπως και προηγούμενα, ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x})$ είναι $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. Για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.1 βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A_3 και τα ιδιοδιανύσματά του, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_3 είναι $\chi_{A_3}(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda - 6)^2$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 12$ και $\lambda_2 = 6$ (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2).

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ το ομογενές σύστημα $(A_3 - 12I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ δίνει τον ιδιόχωρο $V(12) = \left\{ x_2 (-1 \quad 1 \quad 2)^t \ : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1 το $\boldsymbol{x}_1 = (-1 \quad 1 \quad 2)^t$.

Στην $\lambda_2 = 6$ η λύση του συστήματος $(A_3 - 6I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ δίνει τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $V(6) = \left\{ x_2 (1 \quad 1 \quad 0)^t + x_3 (2 \quad 0 \quad 1)^t \ : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ_2 τα $\boldsymbol{x}_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = (2 \quad 0 \quad 1)^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ και $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι κάθετα (Πρόταση 7.11).

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1, ο πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ πρέπει να έχει στήλες τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Επομένως χρειάζεται να εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-

Schmidt στα $\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$, βρίσκουμε $\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{\boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Διαιρώντας τα διανύσματα $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3\}$ με το μέτρο του το καθένα, ώστε να γίνει μοναδιαίο, έχουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_3\|}\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Είναι φανερό ότι επαληθεύεται η σχέση $P^t A_3 P = diag(12, 6, 6)$ και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (9.5), $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y}$, με $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^t$, η τετραγωνική μορφή $q_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_3\, \boldsymbol{x}$, μετά από πράξεις, μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$\boldsymbol{x}^t A_3\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t P^t A_3 P\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^t \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 12y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 .$$

◆◆◆

Παράδειγμα 9.19 Να εξετασθεί το πρόσημο των επόμενων τετραγωνικών μορφών

i) $q_1(\boldsymbol{x}) = 8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

ii) $q_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iii) $q_3(\boldsymbol{x}) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

iv) $q_4(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 + 3x_4^2$ του $\mathbb{R}^4$

Απόδειξη : i) Η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_1\, \boldsymbol{x}$ έχει αντίστοιχο πίνακα $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής είναι το ίδιο με το πρόσημο του αντίστοιχου πίνακά της, το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα (Πρόταση 9.4). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_1

είναι $\chi_{A_1}(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda^2-11\lambda+11)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=8$, $\lambda_2=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}>0$ και $\lambda_3=\dfrac{11+\sqrt{77}}{2}$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικοί αριθμοί, οπότε ο πίνακας A_1 είναι θετικά ορισμένος (Πρόταση 9.4), άρα η τετραγωνική μορφή $q_1(\boldsymbol{x})$ είναι θετικά ορισμένη.

ii) Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A_2\,\boldsymbol{x}$ είναι $A_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\2&3&5\end{pmatrix}$. Όπως και προηγούμενα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_{A_2}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-8)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3-\sqrt{17}<0$ και $\lambda_3=3+\sqrt{17}$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστον μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, ο πίνακας A_2 είναι αόριστος (Πρόταση 9.4), άρα η τετραγωνική μορφή $q_2(\boldsymbol{x})$ είναι αόριστη.

iii) Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A_3\,\boldsymbol{x}$ είναι $A_3=\begin{pmatrix}-4&1&1\\1&-4&2\\1&2&-4\end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_{A_3}(\lambda)=(\lambda+6)(\lambda^2+6\lambda+6)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-6$, $\lambda_2=-3-\sqrt{3}$ και $\lambda_2=-3+\sqrt{3}$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με την Πρόταση 9.4 ο πίνακας A_3 είναι αρνητικά ορισμένος, άρα η τετραγωνική μορφή $q_3(\boldsymbol{x})$ είναι αρνητικά ορισμένη.

iv) Η τετραγωνική μορφή $q_4(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^t A_4\,\boldsymbol{x}$ έχει πίνακα $A_4=\begin{pmatrix}4&0&0&2\\0&2&0&-2\\0&0&3&0\\2&-2&0&3\end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_4 είναι $\chi_{A_4}(\lambda)=\lambda(\lambda-3)^2(\lambda-6)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_3=6$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, ο πίνακας A_4 είναι θετικά ημιορισμένος (Πρόταση 9.4), άρα η τετραγωνική μορφή είναι $q_4(\boldsymbol{x})\geq 0$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.20 Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε οι πίνακες

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&1&1\\a&1&1\end{pmatrix},\ \text{ii) } B=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix},\ \text{iii) } C=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&a&6\\5&6&1\end{pmatrix},\ \text{iv) } D=\begin{pmatrix}4&a\\a&9\end{pmatrix}$$

να είναι θετικά ορισμένοι.

Απόδειξη : i) Η ορίζουσα του πίνακα είναι $\det A=-a^2+2a-1=-(a-1)^2 \le 0$, η οποία ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα A (Πρόταση 7.2). Είναι φανερό ότι στην περίπτωσή μας οι τρεις ιδιοτιμές δεν μπορεί να είναι όλες θετικές, ώστε ο συμμετρικός πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος, σύμφωνα με την Πρόταση 9.4. Κατά συνέπεια δεν υπάρχουν τιμές του a, ώστε ο πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος.

ii) Οι ορίζουσες όλων των κύριων υποπινάκων του πίνακα B είναι $\det B_1=5>0$, $\det B_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0$ και $\det B=a-2$. Από την Πρόταση 9.5i, ο συμμετρικός πίνακας B είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του είναι θετικές, άρα πρέπει $a-2>0$, συνεπώς για κάθε $a>2$ ο πίνακας B είναι θετικά ορισμένος.

iii) Όπως και προηγούμενα, υπολογίζοντας όλες τις ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του C έχουμε : $\det C_1=1>0$, $\det C_2=\det\begin{pmatrix}1&4\\4&a\end{pmatrix}=a-16$ και $\det C=-24a+188$. Για να είναι θετικά ορισμένος ο C, πρέπει $\det C_2>0$ και $\det C>0$, άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν

$$\left.\begin{matrix}a-16>0\\-24a+188>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a>16\\a<\dfrac{47}{6}\approx 7.833\end{matrix}\right\}$$

το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, δεν υπάρχουν τιμές του a ώστε ο πίνακας C να είναι θετικά ορισμένος.

iv) Επειδή η ορίζουσα του πρώτου υποπίνακα είναι θετική ($\det D_1=4$), πρέπει και η ορίζουσα του πίνακα D να είναι θετική για να εφαρμόζεται η Πρόταση 9.5i, δηλαδή πρέπει $\det D=36-a^2>0$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν $-6<a<6$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.21 Να βρείτε το είδος των επόμενων επιφανειών

i) $5x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2-x_3^2=1$

ii) $5x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2+4x_2x_3+7x_3^2-10x_1+8x_2+14x_3=6$

iii) $3x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+4x_3^2=1$

iv) $4x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2-12x_1-12x_2+6x_3=1$

v) $2x_1^2+12x_1x_2+8x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-2x_3^2=0$

Απόδειξη : i) Η αντίστοιχη εξίσωση της (9.10) είναι η $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}-1=0$ (*), όπου $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(\boldsymbol{x})=5x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2-x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{3\times1}$ με $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε έναν ορθογώνιο πίνακα P, ο οποίος βρίσκεται όπως στο Παράδειγμα 8.15. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$ και $\lambda_3=6$. Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον $V(-1)=\left\{x_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t : x_3\in\mathbb{R}\right\}$, επιλέγουμε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=-1$ το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t$, η ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ έχει ιδιόχωρο τον $V(4)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t$, και τέλος η $\lambda_3=6$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον $V(6)=\left\{x_2\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t : x_2\in\mathbb{R}\right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα. Άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.1, ο μετασχηματισμός

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

οδηγεί $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(-1,4,6)\boldsymbol{z}$, για κάθε $z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times1}$, άρα η (*) καταλήγει στην εξίσωση

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} - 1 = 0 \Rightarrow -z_1^2 + 4z_2^2 + 6z_3^2 - 1 = 0, \qquad (**)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη σχέση της (9.11). Επειδή $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, έχουμε τον μετασχηματισμό $w_i = z_i$, για κάθε $i = 1,2,3$, οπότε η αντίστοιχη της (9.12) είναι η

$$-w_1^2 + 4w_2^2 + 6w_3^2 = 1. \qquad (***)$$

Η ποσότητα $k = 1 \neq 0$, όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, σύμφωνα με τη θεωρία της παραγράφου 9.2.1, η επιφάνεια που περιγράφεται από την (***) είναι μονόχωνο υπερβολοειδές.

ii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} - 6 = 0, \qquad (*)$$

(αντίστοιχη μορφή εξίσωσης (9.10)), όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times1}$, με $\boldsymbol{b} = (-10 \quad 8 \quad 14)^t$. Ο μετασχηματισμός της (*) επιτυγχάνεται από έναν ορθογώνιο πίνακα P, ο οποίος κατασκευάζεται με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 9$. Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον $V(3) = \left\{x_3(-2 \quad -2 \quad 1)^t : x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 3$ το $\boldsymbol{x}_1 = (-2 \quad -2 \quad 1)^t$, η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ έχει ιδιόχωρο τον $V(6) = \left\{x_2(-2 \quad 1 \quad -2)^t : x_2 \in \mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2 = (-2 \quad 1 \quad -2)^t$, και τέλος η $\lambda_3 = 9$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον

$V(9)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\end{pmatrix}^t : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\end{pmatrix}^t$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα. Άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}-2/3 & -2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\\ 1/3 & -2/3 & -2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.1, ο μετασχηματισμός είναι

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

από όπου έχουμε $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}^tP^tAP\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^t diag(3,6,9)\boldsymbol{z}$, για όλα $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{3\times 1}$,

$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}^t=\boldsymbol{b}^tP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-10 & 8 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & -18\end{pmatrix}$. Έτσι η (*) καταλήγει στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{pmatrix}6 & 0 & -18\end{pmatrix}\boldsymbol{z}-6=0\Rightarrow 3z_1^2+6z_2^2+9z_3^2+6z_1-18z_3-6=0, \quad (**)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη σχέση της (9.11). Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $w_i=z_i+\frac{\beta_i}{2\lambda_i}\Rightarrow z_i=w_i-\frac{\beta_i}{2\lambda_i}$, για κάθε $i=1,2,3$, έχουμε $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_1-1\\ w_2\\ w_3+1\end{pmatrix}$, οπότε αντικαθιστώντας στην (**) καταλήγουμε

$$3w_1^2+6w_2^2+9w_3^2=18\Rightarrow\frac{w_1^2}{6}+\frac{w_2^2}{3}+\frac{w_3^2}{2}=1, \quad (***)$$

η οποία είναι αντίστοιχη της (9.12). Η ποσότητα $k\neq 0$, όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία (παρ. 9.2.1), η επιφάνεια που περιγράφεται από την (***) είναι ελλειψοειδές.

iii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 6$. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, της $\lambda_2 = 3$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ και τέλος της $\lambda_3 = 6$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα. Άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,

οπότε ισχύει $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^t diag(0,3,6)\boldsymbol{z}$, για κάθε $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Επειδή υπάρχει μία ιδιοτιμή ίση με μηδέν, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της θεωρίας, η (*) καταλήγει σε εξίσωση ελλειπτικού κυλίνδρου

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = 1 \Rightarrow 3z_2^2 + 6z_3^2 = 1.$$

iv) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x}-1=0$ (*), όπου $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_4(\boldsymbol{x})=4x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{3\times 1}$ και $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-12 & -12 & 6\end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=9$ και $\lambda_2=\lambda_3=0$ (διπλή ρίζα). Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1=9$ είναι $\left\{k\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=k\boldsymbol{p}_1,\ k\in\mathbb{R}\right\}$, ενώ της $\lambda_2=\lambda_3=0$ είναι $\left\{k\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^t+\mu\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}^t=k\boldsymbol{p}_2+\mu\boldsymbol{p},\ \ k,\mu\in\mathbb{R}\right\}$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}$ αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, επιπλέον τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι μεταξύ τους κάθετα, επομένως εδώ χρειάζονται ορθοκανονικοποίηση τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή. Έτσι έχουμε $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^t$ και $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-4/5\\2/5\\1\end{pmatrix}$. Διαιρούμε το κάθε ιδιοδιάνυσμα και με το μέτρο του,

οπότε ο ορθογώνιος πίνακας P είναι $P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15\\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15\\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3\end{pmatrix}$.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15\\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15\\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$,

οπότε ισχύει $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}^t P^t AP\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^t diag(9,0,0)\boldsymbol{z}$ για κάθε $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{3\times 1}$ και

$$\boldsymbol{b}^t P = \begin{pmatrix} -12 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -36/\sqrt{5} & 18\sqrt{5}/5 \end{pmatrix},$$

άρα η (*) καταλήγει στην

$$\boldsymbol{z}^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{pmatrix} 0 & -36/\sqrt{5} & 18\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = 1 \Rightarrow 9z_1^2 = 1 + \frac{36}{\sqrt{5}} z_2 - \frac{18\sqrt{5}}{5} z_3 \qquad (**).$$

Επειδή υπάρχουν δύο ιδιοτιμές ίσες με μηδέν, η δε λ_1 είναι μη μηδενική ιδιοτιμή, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς που προτείνονται στην αντίστοιχη θεωρία, έχουμε $w_1 = z_1 + \dfrac{\beta_1}{2\lambda_1} \Rightarrow w_1 = z_1$ και $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dfrac{\sqrt{5}}{36} w_2 + \dfrac{w_3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{36} \\ w_3 \end{pmatrix}$. Οπότε μετά από πράξεις στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση παραβολικού κυλίνδρου

$$9w_1^2 = w_2 \Rightarrow \frac{w_1^2}{(1/9)} = w_2 .$$

v) $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} = 0 , \qquad (*)$$

(αντίστοιχη μορφή εξίσωσης (9.10)), όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_5(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2$, για κάθε $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Ο μετασχηματισμός της (*) επιτυγχάνεται από έναν ορθογώνιο πίνακα P , ο οποίος κατασκευάζεται με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 10$. Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -5$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον $V(-5) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = -5$ το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t$, η ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ έχει ιδιόχωρο τον

$V(-2)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\end{pmatrix}^t : x_2\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\end{pmatrix}^t$, και τέλος η $\lambda_3=10$ έχει αντίστοιχο ιδιόχωρο τον $V(10)=\left\{x_3\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t : x_3\in\mathbb{R}\right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα. Άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}-2/3 & -1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.1, ο μετασχηματισμός είναι

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{z}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

από όπου έχουμε $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}^tP^tAP\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^t diag(-5,-2,10)\boldsymbol{z}$, για όλα $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}^t=\boldsymbol{b}^tP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-10 & 8 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & -18\end{pmatrix}$. Έτσι η (*) καταλήγει στην εξίσωση

$$\boldsymbol{z}^t\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\boldsymbol{z}=0\Rightarrow -5z_1^2-2z_2^2+10z_3^2=0, \qquad (**)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη σχέση της (9.11). Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, ο μετασχηματισμός που εφαρμόζουμε είναι $w_i=z_i$, για κάθε $i=1,2,3$, οπότε η (**) γράφεται

$$-5w_1^2-2w_2^2+10w_3^2=0, \qquad (***)$$

η οποία είναι αντίστοιχη της (9.12). Η ποσότητα $k=0$, με δύο ιδιοτιμές αρνητικές και μία θετική, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία (παρ. 9.2.1), η επιφάνεια που περιγράφεται από την (***) είναι ελλειπτικός κώνος. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.22 Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων

i) $5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2-14x_1+2x_2+5=0$

ii) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-6x_1-14x_2+19=0$

iii) $x_1^2+6x_1x_2+x_2^2+4x_1+4x_2=10$

Απόδειξη : i) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^tAx+b^tx+5=0$ (*), όπου $A=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(x)=5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$, για κάθε $x=\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$ και $b=\begin{pmatrix}-14&2\end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=8$. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1=2$ είναι $\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$ και της $\lambda_2=8$ είναι $\left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Για κάθε $z=\begin{pmatrix}z_1&z_2\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x=Pz\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^tAx=z^tP^tAPz=z^t diag(2,8)z$ και

$b^tP=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-14&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-12}{\sqrt{2}}&\frac{-16}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}z+\begin{pmatrix}\frac{-12}{\sqrt{2}}&\frac{-16}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}z+5=0\Rightarrow 2z_1^2+8z_2^2-\frac{12}{\sqrt{2}}z_1-\frac{16}{\sqrt{2}}z_2+5=0\ (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \dfrac{-12/\sqrt{2}}{4} \\ w_2 - \dfrac{-16/\sqrt{2}}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ w_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της έλλειψης

$$2w_1^2 + 8w_2^2 = 8 \Rightarrow \frac{w_1^2}{4} + \frac{w_2^2}{1} = 1.$$

ii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t A x + b^t x + 19 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times1}$ και $b = \begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ και της $\lambda_2 = 2$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t A x = z^t P^t A P z = z^t diag(0,2) z$ και

$b^t P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-20}{\sqrt{2}} & \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \dfrac{-20}{\sqrt{2}} & \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z + 19 = 0 \Rightarrow 2z_2^2 - \frac{20}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{8}{\sqrt{2}} z_2 + 19 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς $z_2 = w_2 - \dfrac{8/\sqrt{2}}{4} = w_2 - \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ και $w_1 = \dfrac{20}{\sqrt{2}} z_1 - 15$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της παραβολής $2w_2^2 = w_1 \Rightarrow \dfrac{w_2^2}{(1/2)} = w_1$.

iii) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t A x + b^t x - 10 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ και της $\lambda_2 = 4$ είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t A x = z^t P^t A P z = z^t diag(-2,4) z$ και

$b^t P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z - 10 = 0 \Rightarrow -2z_1^2 + 4z_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} z_2 - 10 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, επειδή οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \dfrac{0}{-4} \\ w_2 - \dfrac{8/\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και αντικαταστήσουμε στην (**)

καταλήγουμε στην εξίσωση της υπερβολής $-2w_1^2 + 4w_2^2 = 12 \Rightarrow \dfrac{w_2^2}{3} - \dfrac{w_1^2}{6} = 1$. ◆◆◆

Παράδειγμα 9.23 Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 2x_3 - 7x_1 + 12$

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = 12 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 30x_1$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = 10 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_1x_3$

Απόδειξη : i) Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 2x_3 - 7x_1 + 12$ έχει ακρότατα, αυτά θα βρίσκονται στα σημεία, όπου μηδενίζονται οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι. Άρα αρκεί να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 7 = 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad = 0 \\ 2x_3 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{array}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = (4, -1, 1)$.

Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο $(4, -1, 1)$, ο οποίος από (9.17) είναι: $H(4,-1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.5, προκύπτει ότι ο πίνακας $H(4,-1,1)$ είναι θετικά ορισμένος, επειδή ισχύει

$$\det A_1 = 2 > 0,\quad \det A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 > 0,\quad \det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 14 > 0 .$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.6, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = (4,-1,1)$.

ii) Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = 12 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 30x_1$ έχει ακρότατα αυτά θα βρίσκονται στα σημεία, όπου μηδενίζονται οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι. Άρα αρκεί να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 30 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 10 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = (20,10,0)$. Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο$(20,10,0)$, ο οποίος είναι:

$$H(20,10,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.5, προκύπτει ότι ο πίνακας $H(20,10,0)$ είναι αρνητικά ορισμένος, επειδή ισχύει

$$\det A_1 = -2 < 0,\quad \det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0,\quad \det A = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -6 < 0 .$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.6, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = (20,10,0)$.

iii) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = 10 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_1x_3$ έχει ακρότατα αυτά θα βρίσκονται στα σημεία όπου μηδενίζονται οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης. Άρα χρειάζεται να λύσουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x_1 + x_3 + 1 &= 0 \\ -2x_2 + 1 \quad &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2/5 \\ x_2 &= 1/2 \\ x_3 &= -1/5 \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{5}\right)$.

Σχηματίζουμε τον Hessian πίνακα της συνάρτησης στο σημείο $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{5}\right)$, ο οποίος είναι:

$$H\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.5, προκύπτει ότι ο πίνακας $H\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{5}\right)$ είναι αόριστος, επειδή ισχύει

$$\det A_1 = -2 < 0, \quad \det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0, \quad \det A = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 10 > 0$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 9.6, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3)$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{5}\right)$.

◆◆◆

Παράδειγμα 9.24 Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις έχουν ακρότατα :

i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50$

με τον περιορισμό $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

ii) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-2)^2 + 3(x_2-1)^2 - 2(x_1-4)(x_2+1)$

με τους περιορισμούς $3x_1 + 2x_2 = 0$ και $4x_1 + 2x_3 = 0$.

Απόδειξη : i) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange. Για τη συνάρτηση $f = f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50$, θεωρούμε τη συνάρτηση του περιορισμού $g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Σύμφωνα με την (9.18) ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange να είναι

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3).$$

Για να υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_i} = 0, \text{ για κάθε } i = 1,2,3 \text{ και } \frac{\partial F(x_1,x_2,x_2,\lambda_1)}{\partial \lambda_1} = 0.$$

Έτσι δημιουργείται το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1)}{\partial \lambda_1} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 12 + \lambda_1 = 0 \\ -2x_2 + 12 + \lambda_1 = 0 \\ -2x_3 + 8 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Η λύση του συστήματος

είναι $x_1 = x_2 = \dfrac{2}{3}, \quad x_3 = -\dfrac{4}{3}, \quad \lambda_1 = -\dfrac{32}{3}$. Ο πίνακας από (9.19) είναι

$$\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n=3$, $m=1$, χρειάζεται να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)$, η οποία είναι $\det\left(\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)\right)=-12<0$ και η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τη διαγραφή της 1ης στήλης και 1ης γραμμής του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)$, που είναι

$\det\left(D_2\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{32}{3}\right)\right)=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4>0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8 ii υποπερίπτωση β συμπεραίνουμε ότι στο σημείο $\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange. Για τη συνάρτηση $f=f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-2\right)^2+3\left(x_2-1\right)^2-2\left(x_1-4\right)\left(x_2+1\right)$, θεωρούμε τις συναρτήσεις των περιορισμών $g_1\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1+2x_2$, $g_2\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_1+2x_3$

και σύμφωνα με την (9.18) ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange να είναι

$$F\left(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(x_1-2\right)^2+3\left(x_2-1\right)^2-2\left(x_1-4\right)\left(x_2+1\right)+\lambda_1\left(3x_1+2x_2\right)+\lambda_2\left(4x_1+2x_3\right)$$

Για να υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης f πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$\dfrac{\partial F\left(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2\right)}{\partial x_i}=0$, και $\dfrac{\partial F\left(x_1,x_2,x_2,\lambda_1,\lambda_2\right)}{\partial \lambda_j}=0$, για κάθε $i=1,2,3$, $j=1,2$.

Έτσι δημιουργείται το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1}&=0\\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2}&=0\\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3}&=0\\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}&=0\\
\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}&=0
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
&2x_1-2x_2-6+3\lambda_1+4\lambda_2=0\\
&-2x_1+6x_2+2+2\lambda_1=0\\
&2\lambda_2=0\\
&3x_1+2x_2=0\\
&4x_1+2x_3=0
\end{aligned}\right\}$$

Η λύση του συστήματος

είναι $x_1=\frac{18}{43},\quad x_2=-\frac{27}{43},\quad x_3=-\frac{36}{43},\quad \lambda_1=\frac{56}{43},\quad \lambda_2=0$. Ο πίνακας από (9.19) είναι

$$\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right)=\begin{pmatrix}2&-2&0&3&4\\-2&6&0&2&0\\0&0&0&0&2\\3&2&0&0&0\\4&0&2&0&0\end{pmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα έχουμε $n=3$, $m=2$, χρειάζεται να υπολογισθεί μόνο η ορίζουσα του πίνακα $\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right)$, η οποία είναι $\det\left(\Delta_1\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43},\frac{56}{43},0\right)\right)=344>0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.8 i υποπερίπτωση α συμπεραίνουμε ότι στο σημείο $\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)=\left(\frac{18}{43},-\frac{27}{43},-\frac{36}{43}\right)$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. ♦♦♦

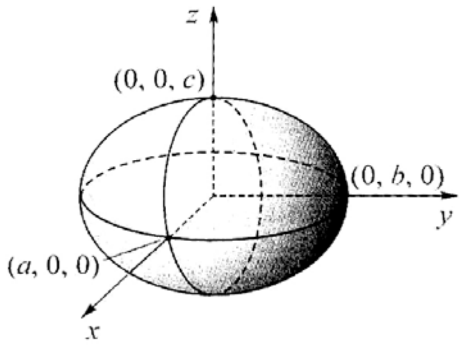
Εφαρμογή 9.25 Ο αριθμός που δείχνει «πόσο κοντά» είναι ένας τετραγωνικός πίνακας στο να μην είναι αντιστρέψιμος ονομάζεται **δείκτης** ή **αριθμός κατάστασης** (condition number). Ο δείκτης κατάστασης του μοναδιαίου πίνακα είναι 1, ενώ ενός μη αντιστρέψιμου είναι πολύ μεγάλος αριθμός.

Για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ο δείκτης κατάστασης ορίζεται να είναι $\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(A^t A)}{\lambda_{\min}(A^t A)}}$ και συμβολίζεται $c.n(A)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.5, οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^t A$ είναι οι ιδιάζουσες του πίνακα A, συνεπώς ο δείκτης κατάστασης ισούται με $c.n(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το δείκτη κατάστασης του A .

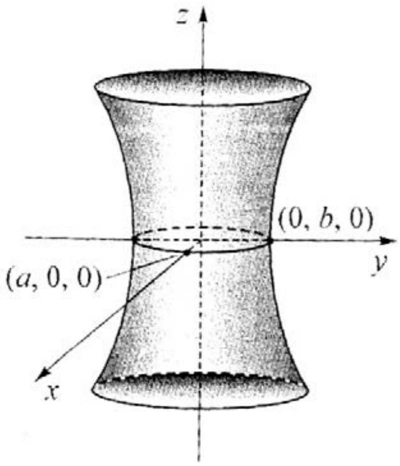
Απόδειξη : Ο συμμετρικός πίνακας $A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, επομένως οι ιδιάζουσες τιμές είναι $\sigma_1(A) = \sqrt{3}$ και $\sigma_1(A) = \sqrt{2}$. Συνεπώς ο δείκτης κατάστασης είναι $c.n(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = 1{,}2247$. ♦♦♦

Επιφάνειες $2^{ου}$ βαθμού



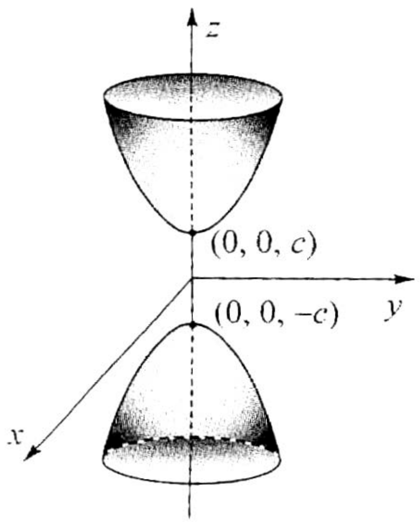
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ελλειψοειδές



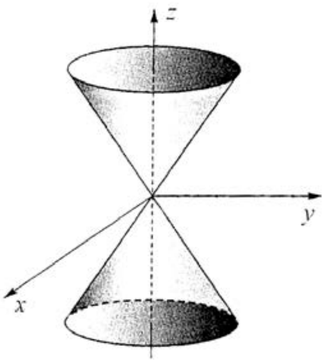
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

μονόχωνο υπερβολοειδές



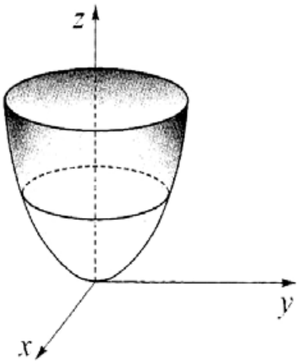
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

δίχωνο υπερβολοειδές



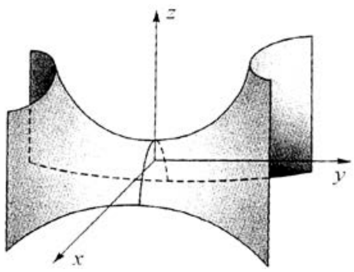
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

κώνος



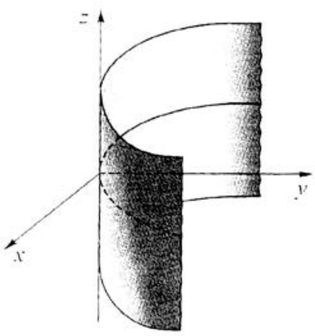
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

ελλειπτικό παραβολοειδές



$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

υπερβολικό παραβολοειδές



$$x^2=ay\,,\quad a>0$$

παραβολικός κύλινδρος