ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ –Κανονικές μορφές

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι,

i) οι πίνακες A και $I-A$ είναι ταυτοδύναμοι(*)

ii) ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Να υπολογίσετε τους βαθμούς των πινάκων A και A^2

iii) ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Να γράψετε τη διαγώνια μορφή του A, αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης P.

iv) Να αποδείξετε ότι $A^{2007}-3A^{2004}=-2A$.

2. Έστω ο πίνακας

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Να βρείτε τον πίνακα A.

ii) Να εξηγήσετε γιατί ο πίνακας A διαγωνοποιείται και να γράψετε τη διαγώνια μορφή του A, αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης P.

iii) Να αποδείξετε ότι $A^5+2A^2=9A-6I$.

3. i) Να εξετάσετε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται.

ii) Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα $A^{2006}+6A^{20}$.

(*) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται ταυτοδύναμος, όταν ισχύει $A^2=A$.

4. Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A^n διαγωνοποιείται για κάθε φυσικό αριθμό n.

iii) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $\left(AB\right)^{2008}$, όταν $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

iv) Να αποδείξετε ότι ισχύει $A^{2009}(A-6I)^{2008}=5^{2008}A$.

5. Έστω ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

i) Να αποδείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται. Ποια είναι η διαγώνια μορφή του;

ii) Να υπολογίσετε τον A^k, $k\in\mathbb{N}^*$ και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίσετε τον πίνακα $I+A+A^2+\cdots+A^{2006}$.

iii) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τις ιδιοτιμές του A^{-4} και απλοποιείστε την παράσταση $A^{-4}+2A^{-1}-3I$.

6. Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ και $\lambda=3$ μία ιδιοτιμή του πίνακα. Να αποδείξετε ότι,

i) ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται

ii) ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Να γράψετε τη διαγώνια μορφή του A, αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης P.

iii) Να αποδείξετε ότι $A^{2007}-3A^{2005}=2\cdot 3^{2005}A$.

iv) Αν $a=b$, να βρείτε ορθογώνιο πίνακα U τέτοιον ώστε ο πίνακας $U^{\mathrm{T}}AU$ να είναι διαγώνιος.

7. Έστω

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A και A^{-1}, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

ii) Οι πίνακες A και A^3 διαγωνοποιούνται; Δικαιολογείστε την απάντησή σας γράφοντας τη διαγώνια μορφή του A.

iii) Να υπολογισθεί ο πίνακας $B = A^6 - 16A^2 + A - I$ και στη συνέχεια χωρίς υπολογισμούς βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B και B^{-1}, καθώς και τις ορίζουσες των πινάκων B, B^{-1} και AB^{-1}.

8. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

i) Να εξετάσετε αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ii) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Δικαιολογείστε την απάντησή σας και σε περίπτωση θετικής απάντησης γράψτε και τη διαγώνια μορφή του.

iii) Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^7 - 6A^6 + 8A^5 + 4A^4 - 16A^3 + 3A + 4I$.

9. Έστω $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$.

i) Να υπολογίσετε τον πίνακα $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t$ και να εξετάσετε αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ii) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

iii) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

iv) Αν x είναι διάνυσμα 4×1, να βρείτε το διανυσματικό χώρο λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$.

v) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος.

vi) Να υπολογίσετε τον πίνακα $M = I + A$ και να εξετάσετε αν οι γραμμές του M είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

vii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιόχωρους του πίνακα M.

viii) Αν λ_i είναι ιδιοτιμή του M, τότε $\lambda_i - 1$ είναι ιδιοτιμή του A, για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του A; Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας συγκριτικά με το (ii).

ix) Να εξετάσετε αν ο πίνακας M διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε να ισχύει $M = PDP^{-1}$, όπου D κατάλληλος διαγώνιος πίνακας.

x) Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας Q και ένας διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε να ισχύει $M = Q^T DQ$.

xi) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton να βρεθεί ο αντίστροφος του M , αν υπάρχει.

xii) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού k ο πίνακας $N = I - kA$ είναι ορθογώνιος;

10. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν 8 διαφορετικοί πραγματικοί πίνακες B με $B^2 = A$, δώστε τη μορφή αυτών των πινάκων και κατόπιν υπολογίστε έναν από αυτούς.

11. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \qquad , \\ x_3'(t) &= -x_1(t) - 2x_3(t) \end{aligned}$$

όταν με $x'(t)$ συμβολίζεται η παράγωγος του πίνακα $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{pmatrix}^t$.

12. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Εξετάστε αν ο A διαγωνοποιείται, σε περίπτωση θετικής απάντησης γράψτε τη διαγώνια μορφή του.

ii) Για κάθε θετικό ακέραιο n υπολογίστε τον πίνακα $2A^{n+2} + 3I$.

13. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

i) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα U που διαγωνοποιεί τον A και γράψτε τη διαγώνια μορφή του.

ii) Υπολογίστε τους πίνακες

$$B=\left(\frac{1}{2}A-I\right)^{100}, \qquad \Gamma=e^{At}, \qquad \Delta=\sqrt{A}\,.$$

Δίνεται ότι για έναν $n\times n$ πίνακα A ορίζεται: $e^{A}=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots$

iii) Βρείτε το είδος της καμπύλης $q=3x^2+3y^2-2xy$ και μετασχηματίσατε αυτή στην κανονική της μορφή.

14. Έστω

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

i) Να υπολογισθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και A^{-1}, εφόσον ο πίνακας A αντιστρέφεται;

ii) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Αν ναι, να υπολογισθούν ένας πίνακας P και ένας διαγώνιος πίνακας D, τέτοιοι ώστε να ισχύει $A=PDP^{-1}$.

iii) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, να υπολογισθούν οι πίνακες

$$A^{-1} \qquad \text{και} \qquad A^{2010}+7A^{2009}+3I$$

15. Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 8 & i\end{pmatrix}$

i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A και A^{-1} (εφόσον ορίζεται).

ii) Να εξετάσετε αν οι πίνακες A, A^{-1} διαγωνοποιούνται; Σε περίπτωση καταφατικής απάντησης να υπολογίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και δύο διαγώνιους πίνακες Δ_1,Δ_2 τέτοιους ώστε $\Delta_1=P^{-1}AP$ και $\Delta_2=P^{-1}A^{-1}P$.

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $A^{2011}=A^{-1}$.

16. Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

i) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ορίζουσας να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

ii) Διαγωνοποιείται ο πίνακας A; Απαντήστε σύντομα, χωρίς υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων.

iii) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

iv) Να βρεθούν διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας U, έτσι ώστε $A = UDU^T$.

v) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $B = 2A^{2011} - 4A^{2010} + 2I$. Είναι ο B διαγωνοποιήσιμος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Είναι ο B^2 αντιστρέψιμος; Σε περίπτωση θετικής απάντησης υπολογίστε τον B^{-2}.

17. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Αφού υπολογίσετε την ορίζουσα του $A - I_3$, να δικαιολογήσετε ότι το 1 είναι μια ιδιοτιμή του A;

ii) Αφού βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.

iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται και, αν ναι, να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας D.

iv) Αφού υπολογίσετε τον πίνακα A^k για κάθε ακέραιο k, στη συνέχεια να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα $A^{2012} + A^{-2013} - 5I_3$.

v) Να βρείτε έναν πίνακα X έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$AXA^T + A^T A = 2I_3.$$

18. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

iv) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

v) Να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A^{-1}, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

vi) Διαγωνοποιείται ο πίνακας A; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

vii) Να υπολογιστεί ο πίνακας $B = A^4 - 12A^3$. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα B; Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος; Να υπολογιστούν οι τιμές $\det B^3$ και $\det(-AB^T)$.

19. Έστω $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ το σύνολο των 2×2 πραγματικών πινάκων και W ο διανυσματικός υπόχωρος του $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ με στοιχεία συμμετρικούς πίνακες. Να βρείτε μία βάση του υποχώρου W καθώς και τη διάστασή του.

20. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα A είναι 1, στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.

ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και ένα διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$.

iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον A^{-1}.

iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να βρείτε τις ιδοτιμές, και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B = A^3 - 16A^{-2} - 4I$.

21. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα A είναι 1, στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.

ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και ένα διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$.

iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον A^{-1}.

iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα να βρείτε τις ιδοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B = A^{2012} - 2A^9 - 4I$.

v) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B^{-1} (εφόσον ορίζεται).

vi) Να βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων AB, AB^2, $-2B^2$, $3B^T$ και $4B^{-2}$.

22. Έστω $\boldsymbol{a} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ μοναδιαίο διάνυσμα, $k \in \mathbb{R}$ θετικός αριθμός και H ο πίνακας

$$H = kI + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t .$$

i) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.

ii) Αν λ_i είναι ιδιοτιμή του $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t$, τότε $k + \lambda_i$ είναι ιδιοτιμή του H, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

iii) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να αποδείξετε ότι ο πίνακας H είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος, αντιστρέψιμος και διαγωνοποιήσιμος πίνακας.

iv) Θεωρώντας ότι $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$ και $k = 2$ να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα $H^{2012} - 3H^{2011}$, αφού πρώτα υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t$.

23. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A καθώς και τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1. Να εξετάσετε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται και, αν ναι, να προσδιορίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας D.

ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^k για κάθε ακέραιο k.

iii) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να βρείτε τις ιδοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και την ορίζουσα του πίνακα $B = A^4 + A^{-2} - 4A^{2013} - I$.

24. Έστω $x'(t)$ η παράγωγος του πίνακα $x(t) = \left(x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; x_3(t) \;\; x_4(t) \right)^t$.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t) \\
x_2'(t) &= \phantom{x_1(t) + {}} 2x_2(t) + 4x_3(t) + x_4(t) \\
x_3'(t) &= \phantom{x_1(t) + 2x_2(t) + {}} -3x_3(t) + x_4(t) \\
x_4'(t) &= \phantom{x_1(t) + 2x_2(t) + {}} -6x_3(t) + 2x_4(t)
\end{aligned}$$

25. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον A^{-1}.

ii) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα A είναι 1. Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.

iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και ένα διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$.

iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B = A^{2014} - 4A^{2013} + 2I$.

v) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B.

vi) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα B^{-1} (εφόσον ορίζεται) και στη συνέχεια να βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων $-2AB^2A^T$ και $4B^{-2}$.