Κεφάλαιο 8

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ – ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

Μια από τις πιο απλές μορφές πινάκων είναι οι διαγώνιοι ή οι τριγωνικοί πίνακες. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται κριτήρια και μεθοδολογία που μας πληροφορούν αν ο τετραγωνικός πίνακας ενός προβλήματος ανάγεται σε διαγώνια μορφή. Παρουσιάζονται αρκετές ενδιαφέρουσες εφαρμογές της διαγωνοποίησης, μελετάται η διαγωνοποίηση ειδικών κατηγοριών πινάκων. Επίσης αναπτύσσονται ικανές συνθήκες και μέθοδοι ώστε να μετασχηματισθεί ένας τετραγωνικός πίνακας σε απλή μορφή, όπως είναι αυτή ενός τριγωνικού ή ενός διαγώνιου πίνακα.

8.1 Διαγωνοποίηση πίνακα

Ορισμός 8.1 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας)

*Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** στο $\mathbb{F}$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.*

Αν ισχύει ο ορισμός τότε λέμε ότι εφαρμόζεται μια διαγωνοποίηση στον A και γράφουμε

$$\text{(i)} \quad \Delta = P^{-1}AP \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad \text{(ii)} \quad A = P\Delta P^{-1} \tag{8.1}$$

όπου $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ ο διαγώνιος πίνακας. Προφανώς η (8.1) (i) είναι ο ορισμός ομοιότητας των πινάκων A, Δ, γι΄ αυτό και συχνά χρησιμοποιούμε αυτόν ως ορισμό διαγωνοποίησης πίνακα, ο δε πίνακας P ονομάζεται ***πίνακας ομοιότητας***.

Ισοδύναμος ορισμός : *Ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.*

Παράδειγμα 8.1 • Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, διότι υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\-5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

- Ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{F}$.

Πράγματι, αν είναι διαγωνοποιήσιμος σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1, πρέπει να υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας, έστω $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{F})$, για τον οποίο να ισχύει η (8.1).

Ο P^{-1} υπολογίζεται από την Εφαρμογή 1.9, οπότε οι πράξεις των πινάκων δίνουν

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}P=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad+cd-bc&d^2\\-c^2&ad-cb-cd\end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο στην περίπτωση $d=c=0$, αλλά τότε $\det P=0$, που είναι αδύνατο, επειδή θεωρήσαμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος.
Μια άλλη απόδειξη, μπορούμε να δούμε στην Εφαρμογή 8.24 iv.

- Θεωρούμε τον πίνακα $E=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Ο πίνακας **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος όταν θεωρηθεί στοιχείο του $M_2(\mathbb{R})$. Πράγματι, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αν θεωρήσουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, από την (8.1) προκύπτει

$$P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}P=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad+cd&b^2+d^2\\-a^2-c^2&-ab-cd\end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο στην περίπτωση $a=b=c=d=0$, αλλά τότε $\det P=0$, που είναι αδύνατο, επειδή θεωρήσαμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος.
(Στα επόμενα αποδεικνύεται ότι η διαγωνοποίηση ενός πίνακα σχετίζεται με τα ιδιοδιανύσματά του, και όπως έχει αναφερθεί στο Παράδειγμα 7.0, ο πίνακας E δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα επί του $\mathbb{R}$, το οποίο είναι άλλη μια απόδειξη γιατί δε διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$).
Ενώ ο πίνακας E **διαγωνοποιείται** αν θεωρηθεί ως στοιχείο του $M_2(\mathbb{C})$. Πράγματι, εύκολα επαληθεύεται η σχέση $P^{-1}EP=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$, όπου $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$.

Ένα εύλογο ερώτημα που τίθενται είναι πως σκεπτόμαστε και κατασκευάζουμε το συγκεκριμένο πίνακα P, ώστε να είναι αντιστρέψιμος και να επαληθεύει την (8.1). Την απάντηση την δίνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.2 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας – ιδιοδιανύσματα)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Ισοδύναμα, ένας $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα Δ αν και μόνο αν ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1} \cong \mathbb{F}^n$ έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη Θέτουμε P τον $n \times n$ πίνακα με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ και Δ το $n \times n$ διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του πίνακα A. Παρατηρούμε ότι

$$AP = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

και

$$P\Delta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, άρα υπάρχει P αντιστρέψιμος, έτσι ώστε να ισχύει η (8.1) (ii), $A = P\Delta P^{-1}$, και πολλαπλασιάζοντάς την επί P καταλήγουμε $AP = P\Delta$, η οποία φανερώνει ισότητα των πινάκων στα πρώτα μέλη των (8.2), (8.3). Συνεπώς ισχύει

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Από την (8.4) προκύπτει

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i, \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.5}$$

Επειδή P είναι αντιστρέψιμος τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 5.12) και μη μηδενικά. Συνεπώς η (8.5) φανερώνει ότι $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ είναι ιδιοδιανύσματα των $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ αντίστοιχων ιδιοτιμών του πίνακα A.

Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ είναι γραμμικά ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας P, που κατασκευάζεται με στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 5.12), και επιπλέον ισχύει η (8.5) ή η ισοδύναμη ισότητα (8.4). Επειδή ισχύει η (8.4) συμπεραίνουμε ότι τα πρώτα μέλη των (8.2) και (8.3) είναι ίσα, συνεπώς

$$AP = P\Delta \overset{P^{-1}}{\Rightarrow} A = P\Delta P^{-1}.$$ ◆◆◆

Η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης στηρίζεται στην κατασκευή ενός πίνακα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A και ενός διαγώνιου πίνακα $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ με στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές (λαμβάνεται υπόψη η αλγεβρική πολλαπλότητα). Αυτή είναι και η βασική ιδέα του επόμενου αλγορίθμου τον οποίο εφαρμόζουμε όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε μια διαγωνοποίηση του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Αλγόριθμος διαγωνοποίησης του $A \in M_n(\mathbb{F})$

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, οπότε οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, υπολογίζουμε μία βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
3. Θεωρούμε το σύνολο $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$, το οποίο συγκεντρώνει όλα τα στοιχεία των βάσεων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2.
   - Αν $r \neq n$, τότε ο A δε διαγωνοποιείται.
   - Αν $r = n$, τότε ο A διαγωνοποιείται. Ορίζοντας P να είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, έχουμε

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_i$, $1 \le i \le n$.

Για παράδειγμα, για να εξετάσουμε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, με βάση τον Ορισμό 8.1 και την απόδειξη της Πρότασης 8.2, αρκεί να βρούμε έναν κατάλληλο πίνακα $P \in M_2(\mathbb{R})$, τέτοιον ώστε $\Delta = P^{-1}AP$.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές θα προσδιορίσουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, έχουμε το σύστημα

$$(A - 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από το οποίο προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ x_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Οι μη μηδενικές λύσεις του ιδιοχώρου $V(2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 2$, για $x_1 = 1$ επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = (1 \quad -1)^t$.

Για $\lambda_2 = 3$, έχουμε

$$(A - 3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{2}x_1 \\ x_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ και για $x_1 = 2$, επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2 = (2 \quad 3)^t$.

Ο P κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, οπότε θέτοντας $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ υπολογίζουμε $\det P = 5 \neq 0$, το οποίο δείχνει ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα ο A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.2) και επιπλέον ότι υπάρχει ο $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε κάνοντας πράξεις την (8.1) (i) $P^{-1}AP = \varDelta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Για περισσότερα παραδείγματα εφαρμογής αυτού του αλγορίθμου παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 8.23.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A ήταν διακεκριμένες, όσες και το μέγεθός του και αποδείξαμε ότι ο πίνακας διαγωνοποιήθηκε. Αυτό δεν είναι τυχαίο, συμβαίνει πάντα, διότι ο πίνακας P, που κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, είναι πάντοτε αντιστρέψιμος μια και έχει στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (κεφάλαιο 4). Επομένως στην ειδική περίπτωση όπου όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι διακεκριμένες μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για τη διαγωνοποίηση του πίνακα χωρίς να αναζητήσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.3 (διαγωνοποίηση – διακεκριμένες ιδιοτιμές)

Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Απόδειξη Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A με $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.10 αυτά τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως ο A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.2). ◆◆◆

Σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης ενός πίνακα είναι ο υπολογισμός των δυνάμεών του.

Πρόταση 8.4 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας – δυνάμεις πινάκων)

Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε*

$$A^k = Pdiag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)P^{-1}, \tag{8.6}$$

για κάθε φυσικό αριθμό k.

Αν $\lambda_i \neq 0$, *τότε* $A^{-k} = Pdiag\left(\lambda_1^{-k}, \lambda_2^{-k}, \ldots, \lambda_n^{-k}\right)P^{-1}$, *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, οπότε παραγοντοποιείται στη μορφή (ii) της (8.1), $A = P\Delta P^{-1}$, από έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και έναν $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A, (υπολογίζεται η αλγεβρική πολλαπλότητα). Τότε να γράψουμε

$$A^k = \left(P\Delta P^{-1}\right)^k = \underbrace{P\Delta P^{-1} \cdot P\Delta P^{-1} \cdot \cdots \cdot P\Delta P^{-1}}_{k-\text{φορές}} = P\Delta^k P^{-1} = Pdiag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)P^{-1}.$$

Στην περίπτωση που ο A έχει $\lambda_i \neq 0$, τότε είναι αντιστρέψιμος (Πόρισμα 7.3), συνεπώς ορίζεται ο A^{-1}, ο οποίος έχει ιδιοτιμές λ_i^{-1} και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους $\boldsymbol{x}_i$ είναι ίδια με αυτά που αντιστοιχούν στις λ_i του A, (Πόρισμα 7.8), άρα υπάρχει P αντιστρέψιμος, ο ίδιος με αυτόν που διαγωνοποιεί τον A, τέτοιος ώστε $A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$. Όμοια με προηγούμενα αποδεικνύεται

$$A^{-k} = P\Delta^{-k}P^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

♦♦♦

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον $A^{2008} - 2A^{-8}$, όταν $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$, οπότε οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ και $\lambda_3 = i$, άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται στο $\mathbb{C}$ (Πρόταση 8.3) και είναι και αντιστρέψιμος.

Από την (8.6) παίρνουμε $A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^k & 0 \\ 0 & 0 & i^k \end{pmatrix}P^{-1}$, οπότε κάνοντας αντικατάσταση

- για $k=2008$ έχουμε $A^{2008}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-i)^{2008}&0\\0&0&i^{2008}\end{pmatrix}P^{-1}=PIP^{-1}=I$,
- για $k=-8$, $A^{-8}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-i)^{-8}&0\\0&0&i^{-8}\end{pmatrix}P^{-1}=PIP^{-1}=I$,

άρα $A^{2008}-2A^{-8}=-I$.

Η μορφή του ελαχίστου πολυωνύμου δίνει ένα άλλο χρήσιμο κριτήριο για τη διαγωνοποίηση ή όχι ενός πίνακα όπως αναφέρεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 8.5 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας – ελάχιστο πολυώνυμο)

Ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A, $m_A(\lambda)$, είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k) \qquad (8.7)$$

όπου οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ είναι ανά δυο διαφορετικές.

Αν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι της μορφής (8.7), από τον Ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου 7.4b καταλήγουμε

$$m_A(A)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_k I)=\mathbb{O}.$$

Επομένως για να ελέγξουμε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αρκεί να εξετάσουμε αν επαληθεύεται η ισότητα

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_k I)=\mathbb{O}, \qquad (8.8)$$

όπου $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&4&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ **δε** διαγωνοποιείται. Πράγματι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$, συνεπώς οι διακεκριμένες (διαφορετικές) ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ (η δεύτερη ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2), και η (8.8) δεν επαληθεύεται, διότι

$$(A-3I)(A+I) = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 8.6 • Η διαγωνοποίηση ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ που έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές επιτυγχάνεται πάντοτε (Πρόταση 8.3), αν χρειάζεται να γνωρίζουμε τη διαγωνοποίηση είναι απαραίτητος ο αντιστρέψιμος πίνακας P, τον οποίο βρίσκουμε σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης.

• Η διαγωνοποίηση ενός πίνακα A του οποίου οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν αλγεβρική πολλαπλότητα διαφορετική της μονάδας, η εφαρμογή της Πρότασης 8.5 ή ισοδύναμα η σχέση (8.8) είναι το συντομότερο κριτήριο για να αποφανθούμε για τη διαγωνοποίηση ή όχι του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν η διαγωνοποίηση είναι εφικτή ο αντιστρέψιμος πίνακας P, υπολογίζεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, χρειάζεται να αναφερθούμε και στην έννοια της διαγωνοποίησης των γραμμικών απεικονίσεων, καθώς επίσης και στα ανάλογα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για αυτήν.

Σχόλια συμβολισμού : Τα ιδιοδιανύσματα του $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι στοιχεία του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ δηλαδή είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Για συντομία θα γράφουμε $\mathbb{F}^{n\times 1}$ στη θέση του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Όπως είπαμε και στο κεφάλαιο 4, ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{F}^n$ με τη μόνη διαφορά ότι γράφοντας $\mathbb{F}^{n\times 1}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία σε στήλες $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ενώ γράφοντας $\mathbb{F}^n$ χρησιμοποιούμε γραμμές $(x_1,\dots,x_n)$ Ακριβέστερα η απεικόνιση $f:\mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^n$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1,\dots,x_n)$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Μέσω αυτού πολλές φορές ταυτίζουμε το $\mathbb{F}^{n\times 1}$ με το $\mathbb{F}^n$, συμβολισμό τον οποίο υιοθετούμε στα επόμενα.

Ορισμός 8.2 (διαγωνοποιήσιμη γραμμικής απεικόνισης)

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμη** αν υπάρχει μια βάση του V ως προς την οποία ο αντίστοιχος πίνακας αναπαράστασης της απεικόνισης είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Από τον Ορισμό 8.2 προκύπτει ότι το πρόβλημα της διαγωνοποίησης μιας γραμμικής απεικόνισης είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα διαγωνοποίησης ενός πίνακα αναπαράστασής της, το οποίο μελετήσαμε αναλυτικά. Ωστόσο αξίζει να αναφέρουμε τις ακόλουθες προτάσεις οι οποίες είναι ανάλογες των Προτάσεων 8.3 και 8.5 για γραμμικές απεικονίσεις.

Πόρισμα 8.7 (διαγωνοποίση γραμμικής απεικόνισης - διακεκριμένες ιδιοτιμές)

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(x+y,\ 5x-3y)$, χρησιμοποιώντας την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$, υπολογίσουμε τον πίνακα αναπαράστασης $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Όπως αναφέρθηκε και στο Παράδειγμα 8.1, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος[1], οπότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2. Μια άλλη απόδειξη είναι αυτή των διακεκριμένων ιδιοτιμών (Πόρισμα 8.7), οι οποίες είναι ίδιες με αυτές του πίνακα αναπαράστασής της, δηλαδή, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=2$ [1].

---

[1] Πράγματι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda+4)(\lambda-2)$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του είναι διακεκριμένες και εφαρμόζουμε την Πρόταση 8.3.

Πόρισμα 8.8 (διαγωνοποίηση γραμμικής – ελάχιστο πολυώνυμο)

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Η f είναι διαγωνοποιήσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παράδειγμα 8.9 • Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$f(x,y,z)=(3x+y+z,\,2x+4y+2z,\,x+y+3z),$$

είναι διαγωνοποιήσιμη. Ο πίνακας αναπαράστασής της, ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του, το οποίο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^3-10\lambda^2+28\lambda-36=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=2$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2=6$. Η (8.8) επαληθεύεται, διότι κάνοντας πράξεις έχουμε $(A-2I)(A-6I)=\mathbb{O}$, επομένως $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-6)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A, το οποίο ταυτίζεται με αυτό της απεικόνισης f και αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες, άρα η f διαγωνοποιείται (Πόρισμα 8.8).

• Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$f(x,y,z)=(y,\,-4x+4y,\,-2x+y+2z),$$

δεν είναι διαγωνοποιήσιμη. Ο πίνακας αναπαράστασής της, ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$. Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, που είναι $\chi_B(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$, όπως στο Παράδειγμα 7.23, βρίσκουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_B(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$, το οποίο ταυτίζεται με αυτό της απεικόνισης f και επειδή το $m_B(\lambda)$ **δεν** αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες, η f **δε** διαγωνοποιείται (Πόρισμα 8.8).

8.2 Τριγωνοποίηση

Ορισμός 8.3 (τριγωνοποιήσιμος πίνακας)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι* ***τριγωνοποιήσιμος*** *στο* $\mathbb{F}$ *αν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* $S \in M_n(\mathbb{F})$ *τέτοιος ώστε ο πίνακας*

$$S^{-1}AS = T \tag{8.9}$$

να είναι άνω τριγωνικός.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, επειδή για τον αντιστρέψιμο πίνακα $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ισχύει

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ του Παραδείγματος 8.1 **δεν** είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$, όμως στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνοποιήσιμος, διότι κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι τριγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$ σύμφωνα με τα επόμενα αποτελέσματα (Πόρισμα 8.12).

Στον Ορισμό 8.3, αν ο πίνακας $S \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ορθομοναδιαίος [1] λέμε ότι ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος**, και τότε ισχύει

$$S^{*}AS = T \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = STS^{*} \tag{8.10}$$

Πρόταση 8.10 (θεώρημα Schur)

Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα* $T \in M_n(\mathbb{F})$*, ο οποίος έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του* A.

Απόδειξη Η πρόταση αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς τον τύπο n του πίνακα A. Για $n=1$ ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για οποιονδήποτε πίνακα τύπου

---

[1] Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθομοναδιαίος** όταν ισχύει $UU^{*} = U^{*}U = I$, όπου $U^{*} = \overline{U}^{t}$. Είναι προφανές από τον ορισμό ότι ισχύει $U^{*} = U^{-1}$.

$(n-1)\times(n-1)$. Θεωρούμε ότι λ_1, $\boldsymbol{x}_1$ είναι τα ιδιοποσά του A και μάλιστα το ιδιοδιάνυσμα το διαλέγουμε να είναι μοναδιαίο, $\|\boldsymbol{x}_1\|=1$. Επιλέγουμε διανύσματα $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n$ και μαζί με το $\boldsymbol{x}_1$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{x}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_n\}$ του $\mathbb{F}^n$ και σχηματίζουμε τον πίνακα $U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \dots & \hat{\boldsymbol{x}}_n \end{pmatrix}$. Ο πίνακας U_1 είναι ορθομοναδιαίος, τον οποίο διαμερίζουμε $U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & U_2 \end{pmatrix}$.

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & AU_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^* A \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^* AU_2 \\ U_2^* A \boldsymbol{x}_1 & U_2^* AU_2 \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A_1 = U_2^* AU_2$ είναι τύπου $(n-1)\times(n-1)$, άρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας T_1 και ορθομοναδιαίος πίνακας U_3, έτσι ώστε $U_3^* A_1 U_3 = U_3^* U_2^* AU_2 U_3 = T_1 \Leftrightarrow A_1 \equiv U_2^* AU_2 = U_3 T_1 U_3^*$.

Από τα ιδιοποσά του A έχουμε $\boldsymbol{x}_1^* A \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^* \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \|\boldsymbol{x}_1\|^2 = \lambda_1$, και $\boldsymbol{x}_1^* U_2 = \mathbf{0}$, από την καθετότητα των διανυσμάτων, οπότε $U_2^* A \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 U_2^* \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \left(\boldsymbol{x}_1^* U_2\right)^* = \mathbf{0}$.

Τα παραπάνω τα αντικαθιστούμε στον τελευταίο πίνακα της (8.11) και έχουμε

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* AU_2 \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* AU_2 \\ \mathbf{0} & U_3 T_1 U_3^* \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Θέτουμε τον $n\times n$ ορθομοναδιαίο πίνακα $U_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3 \end{pmatrix}$ και με αυτόν πολλαπλασιάζουμε την (8.12), οπότε προκύπτει

$$U_4^* U_1^* A U_1 U_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* AU_2 \\ \mathbf{0} & U_3 T_1 U_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{x}_1^* AU_2 U_3 \\ \mathbf{0} & T_1 \end{pmatrix} = T, \tag{8.13}$$

όπου ο T είναι άνω τριγωνικός πίνακας και αν θέσουμε $U = U_1 U_4$ η (8.13) γράφεται $U^* AU = T$, δηλαδή ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα.

Επιπλέον, από την Πρόταση 7.9 προκύπτει ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο των πινάκων A και T ταυτίζονται, επομένως

$$\chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ διαγώνια στοιχεία του T (Εφαρμογή 7.29 i) και $\lambda_i \in \sigma(A)$. ◆◆◆

Σχόλια : • Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για κάτω τριγωνικό πίνακα.

• Όπως παρατηρούμε στην (8.13), ο πίνακας T εξαρτάται από την επιλογή του ορθομοναδιαίου πίνακα U_2, ο οποίος επιλέχθηκε αυθαίρετα αρκεί τα διανύσματα (που είναι οι στήλες του U_2) να αποτελούν μαζί με το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_1 ορθοκανονική βάση. Συνεπώς ο πίνακας T δεν είναι μοναδικός, άρα η τριγωνοποίηση ενός πίνακα δεν έχει μοναδική μορφή.

• Στην απόδειξη του θεωρήματος Schur παρουσιάζεται η μέθοδος για την τριγωνοποίηση ενός πίνακα, την οποία ακολουθούμε στο επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας ακριβώς τον ίδιο συμβολισμό.

Παράδειγμα 8.11 Για τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ να βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας U ώστε ο U^*AU να είναι άνω τριγωνικός. Ο πίνακας A είναι ο πίνακας B του Παραδείγματος 8.9 και εκεί είχαμε αποδείξει ότι ο πίνακας δεν ήταν διαγωνοποιήσιμος με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$ και με μοναδική ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ (τριπλή ρίζα). Η λύση του συστήματος $(A-2I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_1(1 \quad 2 \quad 0)^t + x_3(0 \quad 0 \quad 1)^t \ : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$. Ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=2$ είναι το $\boldsymbol{x}_1=(0 \quad 0 \quad 1)^t$. Θεωρώ τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_2=(1 \quad 0 \quad 0)^t$, $\boldsymbol{x}_3=(1 \quad 1 \quad 0)^t$ και τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, (επειδή $\det(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3)=1\neq 0$), άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Με τη μέθοδο Gram-Schmidt ορθοκανονικοποιούμε τα στοιχεία της βάσης (τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ είναι ορθομοναδιαία, οπότε ασχολούμαστε μόνο με το $\boldsymbol{x}_3$ για το οποίο $\hat{\boldsymbol{x}}_3=(1 \quad 1 \quad 0)^t-(1 \quad 0 \quad 0)^t=(0 \quad 1 \quad 0)^t$) και έτσι έχουμε $U_1=(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.

Η (8.11) δίνει

$$U_1^*AU_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^*A\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^*AU_2 \\ U_2^*A\boldsymbol{x}_1 & U_2^*AU_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:cc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right), \qquad (*)$$

όπου ο πίνακας $A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A_1}(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$, άρα έχει ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ (διπλή ρίζα) και εδώ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με προηγούμενα για τον πίνακα A_1. Η λύση του συστήματος $(A_1-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:}\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$ και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\boldsymbol{y}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t$. Μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ με πρώτο διάνυσμα το $\boldsymbol{y}_1$ είναι $\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\}$ όπου $\boldsymbol{y}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}^t$ (ελέγξτε την γραμμική τους ανεξαρτησία και την καθετότητα των μοναδιαίων διανυσμάτων).

Θέτουμε $U_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, οπότε $U_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

Στην (8.13) αντικαθιστώντας την (*) προκύπτει ο τριγωνικός πίνακας T

$$U_4^*U_1^*AU_1U_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 4/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5}\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=T,$$

και ο ζητούμενος ορθομοναδιαίος (εδώ είναι ορθογώνιος) πίνακας U είναι

$$U=U_1U_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Όπως αναφέραμε στα σχόλια, καθώς καταλαβαίνουμε από την απόδειξη και από το προηγούμενο παράδειγμα, η επιλογή των διανυσμάτων της βάσης επηρεάζει τον ορθομοναδιαίο πίνακα U, καθώς και τον τριγωνικό πίνακα T, εκτός βέβαια από τα διαγώνια στοιχεία του που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Γι΄ αυτό αν δεν αναζητούμε τη μορφή του τριγωνικού πίνακα αλλά απλά χρειάζεται να αποφανθούμε για την τριγωνοποίηση ή όχι έχουμε ένα εύχρηστο κριτήριο που στηρίζεται μόνο στις ιδιοτιμές του πίνακα, δηλαδή στο χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του A. Από το θεώρημα Schur και το θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας είναι φανερό πως ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι τριγωνήσιμος στο $\mathbb{C}$, μια και το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$ υπολογισμένης και της πολλαπλότητάς τους.

Πόρισμα 8.12(τριγωνοποίηση πίνακα-χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

- *Ένας $A \in M_n(\mathbb{F})$ τριγωνοποιείται αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}$.*
- *Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ τριγωνοποιείται.*

Στο Παράδειγμα 8.11, το $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ του πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μια τριγωνοποίησή του.

Αξιοποιώντας το θεώρημα Schur μπορούμε να αποδείξουμε μια σημαντική ιδιότητα που σχετίζεται με τις ιδιοτιμές και το ίχνος[1] ενός πίνακα.

Πρόταση 8.13(ίχνος – ιδιοτιμές πίνακα)

Σε κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{8.14}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A (υπολογισμένης και της αλγεβρικής πολλαπλότητάς τους).

Απόδειξη Επειδή κάθε πίνακας είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τριγωνικό πίνακα με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, άρα ισχύει η (8.10), και επιπλέον από την τον ορισμό και την ιδιότητα του ίχνους $tr(AB) = tr(BA)$ (Εφαρμογή 1.16, iii), προκύπτει

[1] Βλέπε Ορισμό, σελ. 4, Κεφάλαιο 1, $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, όπου $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$$trA = tr\left(STS^*\right) = tr\left(TS^*S\right) = trT = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ .$$ ◆◆◆

Για παράδειγμα, έστω ένας πίνακας $A \in M_4(\mathbb{C})$ με $\lambda_1 = -4+5i$, $\det A = 82$ και $trA = -5$, όπου το $\chi_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές. Για να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του A, χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι το $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -4-5i$ είναι ιδιοτιμή διότι το $\chi_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές. Έστω λ_3, λ_4 οι άλλες ιδιοτιμές του A. Τότε από την Πρόταση 7.2 και την Πρόταση 8.13 έχουμε τις επόμενες σχέσεις

$$(-4+5i)(-4-5i)\lambda_3\lambda_4 = \det A = 82, \ (-4+5i)+(-4-5i)+\lambda_3+\lambda_4 = trA = -5$$

οι οποίες καταλήγουν στο σύστημα $\lambda_3\lambda_4 = 2$ και $\lambda_3 + \lambda_4 = 3$.

Η λύση του συστήματος είναι $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$ ή $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$.

8.3 Διαγωνοποίηση πινάκων ειδικής μορφής

Η ειδική μορφή διαγωνοποίησης των Ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών πινάκων είναι ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές. Αφενός όπως αποδείξαμε στην Πρόταση 7.11, ένας Ερμιτιανός ή ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, άρα αν διαγωνοποιείται ο διαγώνιος θα είναι πραγματικός πίνακας, αφετέρου στην ίδια Πρόταση 7.11 αποδείξαμε ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, πληροφορία η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί στην κατασκευή του αντιστρέψιμου πίνακα P.

Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι **ορθομοναδιαία διαγωνοποιήσιμος** αν υπάρχει ορθομοναδιαίος[1] πίνακας που τον διαγωνοποιεί. Αν υπάρχει, δηλαδή, ορθομοναδιαίος πίνακας U, ο οποίος έχει την ιδιότητα $U^* = U^{-1}$, έτσι ώστε να ισχύει η (8.1),

$$U^{-1}AU = \Delta \Leftrightarrow U^*AU = \Delta \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = U\Delta U^{-1} \;\Leftrightarrow\; A = U\Delta U^* \tag{8.15}$$

Αν εξετάζουμε την περίπτωση στους πραγματικούς αριθμούς τότε λέμε ότι ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι **ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος** και συμβολίζουμε τον πραγματικό αντιστρέψιμο πίνακα της διαγωνοποίησης με $P \in M_n(\mathbb{R})$, ο οποίος είναι ορθογώνιος[2] οπότε έχει την ιδιότητα $P^t = P^{-1}$, και η ανάλογη της (8.15) είναι

$$P^{-1}AP = \Delta \Leftrightarrow P^tAP = \Delta \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad A = P\Delta P^{-1} \;\Leftrightarrow\; A = P\Delta P^t. \tag{8.16}$$

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 17\lambda^2 + 90\lambda - 144 = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-8)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 8$. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $i = 1,2,3$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, και από το σύστημα

$$(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

---

[1] Βλέπε, ορισμό σελ. 12, πριν τη σχέση (8.10)

[2] Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνιος**, αν ισχύει $UU^t = U^tU = I$, από όπου προκύπτει η ιδιότητα $U^t = U^{-1}$.

από το οποίο προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(3)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t \ : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=6$, έχουμε από τη λύση του συστήματος $(A-6I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(6)=\left\{x_2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}^t \ : x_2\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}^t$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=8$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(8)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t \ : x_2\in\mathbb{R}\right\}$ και επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$.

Από την Πρόταση 7.11 επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, οπότε αν διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, και τα τοποθετήσουμε ως στήλες στον P, αυτός θα είναι ορθογώνιος.

Έτσι κατασκευάζουμε,

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t,\ \boldsymbol{p}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}^t,\ \boldsymbol{p}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$$

και παίρνουμε τον

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}$$ που είναι ορθογώνιος, οπότε $P^{-1}=P^t$.

Από Πρόταση 8.3 έχουμε ότι ο A διαγωνοποιείται και εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε μετά από πράξεις ότι ισχύει η (8.16),

$$P^tAP=\Delta=diag(3,6,8),$$

συνεπώς υπάρχει διαγωνοποίηση του συμμετρικού πίνακα A χρησιμοποιώντας έναν πίνακα P, ο οποίος δεν είναι μόνο αντιστρέψιμος, όπως απαιτεί η διαγωνοποίηση ενός τυχαίου πίνακα, αλλά είναι και ορθογώνιος.

Το ερώτημα που μας απασχολεί εδώ είναι αν αυτό γενικεύεται, αν δηλαδή, οι Ερμιτιανοί ή πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται πάντοτε, και μάλιστα χρησιμοποιώντας έναν πίνακα ειδικής μορφής (ορθομοναδιαίο ή ορθογώνιο). Την απάντηση τη δίνει το φασματικό θεώρημα.

Πρόταση 8.14 (Φασματικό θεώρημα)

Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι Ερμιτιανός*[1] *(πραγματικός συμμετρικός) πίνακας αν και μόνο αν είναι ορθομοναδιαία (ορθογώνια) όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα.*

Ισοδύναμα, κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι Ερμιτιανός (πραγματικός συμμετρικός) πίνακας αν και μόνο αν υπάρχει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας* U *(* P *), τέτοιος ώστε ο* U^*AU *(* P^tAP *) να είναι πραγματικός διαγώνιος.*

Απόδειξη Έστω ότι ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός, από το θεώρημα Schur (Πρόταση 8.10) υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε να ισχύει η (8.15)

$$A = UTU^*, \tag{8.17}$$

όπου T άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου του τις ιδιοτιμές του A, οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί (Πρόταση 7.11).

Επειδή ισχύει $A^* = A$ χρησιμοποιώντας και την (8.17) καταλήγουμε

$$UT^*U^* = \left(UTU^*\right)^* = A^* = A = UTU^*,$$

από όπου προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει $T^* = T$, το οποίο ισχύει μόνο αν ο T είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε να ισχύει $A = Udiag(a_1, a_2, \ldots, a_n)U^*$, όπου $diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι πραγματικός πίνακας.

Τότε

$$A^* = \left(U\,diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)U^*\right)^* = U\,diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)U^* = A,$$

δηλαδή ο A είναι Ερμιτιανός.

Στην περίπτωση των πραγματικών συμμετρικών πινάκων η απόδειξη είναι ίδια, μόνο που αντικαθίστανται η αναστροφοσυζυγία με την αναστροφή. ◆◆◆

Σχόλια : • Σύμφωνα με την Πρόταση 8.14, στην περίπτωση ενός Ερμιτιανού (ή πραγματικού συμμετρικού) πίνακα A, μπορούμε να επιλέξουμε τον U (αντίστοιχα τον P) να είναι ορθομοναδιαίος (αντίστοιχα ορθογώνιος) πίνακας. Στην πράξη

---

[1] Ο $H \in M_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται **Ερμιτιανός**, όταν ισχύει $H^* = H$.

Ο $H \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **πραγματικός συμμετρικός**, όταν ισχύει $H^t = H$.

συνήθως κατασκευάζουμε έναν τέτοιο πίνακα U (ή P) με τη μέθοδο Gram-Schmidt. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι ανά δύο κάθετα (Πρόταση 7.11), εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο ανάμεσα στα ιδιοδανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή.

- Το Φασματικό θεώρημα αποδεικνύεται γενικότερα για έναν κανονικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, (Εφαρμογή 8.27).

Παράδειγμα 8.15 Ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα. Ο ορθογώνιος πίνακας P βρίσκεται από τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία πρέπει να είναι κάθετα μεταξύ τους και μοναδιαία. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = (\lambda+2)(\lambda-7)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 7$ (διπλή ρίζα).

Η λύση του συστήματος $(A+2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-2) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:} \ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ επομένως για $\lambda_1 = -2$ επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t$.

Η λύση του συστήματος $(A-7I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(7) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:} \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ επομένως για $\lambda_2 = 7$ επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t$ και $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = -9 \neq 0$ (Πρόταση 5.12 ή Πόρισμα 4.4), άρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον πίνακα με στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα και να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A. Αυτό επιτυγχάνεται με το να θεωρήσουμε $P_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και να υπολογίσουμε τον $P_1^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, οπότε κάνοντας τις πράξεις επαληθεύουμε ότι ισχύει η (i) της (8.1), δηλαδή υπάρχει μια διαγωνοποίηση του A που είναι

$$P_1^{-1} A P_1 = diag(-2, 7, 7).$$

Όμως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε (βρίσκοντας το εσωτερικό τους γινόμενο) ότι τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ και $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ είναι κάθετα, (Πρόταση 7.11), και σύμφωνα με τα προηγούμενα σχόλια υπάρχει και άλλος πίνακας P, που είναι ορθογώνιος, με τον οποίο επιτυγχάνεται η διαγωνοποίηση του A. Για να κατασκευάσουμε αυτόν τον ορθογώνιο πίνακα P χρειάζεται να εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο στα $\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$. Βρίσκουμε

$\hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{\boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}^t$ και κάνοντας και μοναδιαία όλα τα διανύσματα έχουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{x}}_2\|}\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{5}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο ορθογώνιος πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$,

και η ορθογώνια διαγωνοποίηση του A είναι $P^t A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Περισσότερα παραδείγματα για ορθογώνια διαγωνοποίηση μπορούμε να δούμε στην παράγραφο τετραγωνικές μορφές.

8.5 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 8.16 Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } E=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ -5 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ και $\lambda_3=4$, οι οποίες είναι διακεκριμένες, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.3).

Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές θα προσδιορίσουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, λύνοντας το σύστημα $(A-\lambda_i I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $i=1,2,3$, θα επιλέξουμε τις μη μηδενικές λύσεις του ως κάποιο ιδιοδιάνυσμα, το οποίο θα πρέπει να τοποθετήσουμε ως στήλη στον πίνακα P.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$, έχουμε το σύστημα

$$(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από το οποίο προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0 \\ 5x_1+x_2+2x_3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1&=0 \\ x_2&=-2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R},$$

οπότε ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(2)=\left\{x_3\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t \ : x_3\in\mathbb{R}\right\}$, από τον οποίο επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=2$ το $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=3$ έχουμε

$$\left(A-3I\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου η λύση του συστήματος δίνεται από τον ιδιόχωρο $V\left(3\right)=\left\{x_2\left(0 \quad 1 \quad 0\right)^t \ \ \boldsymbol{:} \ x_2\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε για $\lambda_2=3$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\left(0 \quad 1 \quad 0\right)^t$.

Τέλος, για $\lambda_3=4$ έχουμε το σύστημα $\left(A-4I\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

και η λύση του είναι τα διανύσματα του $V\left(4\right)=\left\{x_1\left(1 \quad 3 \quad -1\right)^t \ \ \boldsymbol{:} \ x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε το επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3=4$ το $\boldsymbol{x}_3=\left(1 \quad 3 \quad -1\right)^t$.

Τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 7. 10) και θα αποτελέσουν στήλες του $P=\left(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, με $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Από την (i) (8.1) μια διαγωνοποίηση του A είναι

$$P^{-1}AP=\varDelta=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι $B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Όπως στο Παράδειγμα 7.23 ο πίνακας B έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_B\left(\lambda\right)=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)^2$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$ (διπλή ρίζα). Επειδή, όπως αναφέρθηκε και στην Παρατήρηση 8.6, στην περίπτωση της πολλαπλής ιδιοτιμής η διαγωνοποίηση του πίνακα εξαρτάται από την επαλήθευση ή όχι της (8.8), εδώ έχουμε

$$\left(B-I\right)\left(B-2I\right)=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\mathbb{O},$$

συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_B(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$, το οποίο αποτελείται από διακεκριμένους πρωτοβάθμιους παράγοντες, οπότε ο πίνακας B διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.5). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα P χρειάζεται να βρούμε και τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(B-\lambda_i I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $i=1,2$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=1$, έχουμε το σύστημα

$$(B-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και η λύση του είναι τα διανύσματα του ιδιοχώρου

$V(1)=\left\{x_3\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}^t \;:\, x_3\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$ ως ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3=4$.

Για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ έχουμε

$$(B-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου η λύση του συστήματος δίνεται από τον ιδιόχωρο

$V(2)=\left\{x_2\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^t + x_3\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^t \;:\, x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε για $\lambda_2=2$ επιλέγουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$ και $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^t$.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης κατασκευάζουμε τον πίνακα $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και επειδή $\det P=-1\neq 0$, τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 5.12). Προφανώς ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ και από την (i) (8.1) μια διαγωνοποίηση του B είναι

$$P^{-1}BP=\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ, που είναι $\chi_{\Gamma}(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2-4=(\lambda+2)^2(\lambda-1)$, επειδή η μια ιδιοτιμή είναι πολλαπλή ακολουθώντας τα σχόλια της Παρατήρησης 8.6, βρίσκουμε ότι δεν ισχύει η (8.8), επειδή $(\Gamma+2I)(\Gamma-I)=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq \mathbb{O}$, επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$m_{\Gamma}(\lambda)=\chi_{\Gamma}(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-1)$, το οποίο προφανώς δεν αποτελείται από πρωτοβάθμιους παράγοντες, συνεπώς δεν ισχύει η Πρόταση 8.5, άρα ο πίνακας Γ **δε** διαγωνοποιείται.

Παρατήρηση : Εδώ θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης. Πράγματι, υπολογίζοντας τα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν για κάθε ιδιοτιμή έχουμε

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$, λύνοντας το σύστημα $(\Gamma+2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(-2)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t \ : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε για ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$, λύνοντας το σύστημα $(\Gamma-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t \ : x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε για ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$.

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα που βρίσκουμε είναι λιγότερα από το μέγεθος του πίνακα Γ, δεν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας P, επομένως ο Γ **δε** διαγωνοποιείται.

iv) Ο πίνακας E έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_E(\lambda)=(\lambda-5)^3$. Πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα πρέπει να έχουν τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ο πίνακας να τα μηδενίζει και να είναι και μικροτέρου δυνατού βαθμού (Πρόταση 7.22 και συμπεράσματά της). Όμως εδώ έχουμε $E-5I=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}$, $(E-5I)^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}$ και μόνο $(E-5I)^3=\mathbb{O}$,

οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_E(\lambda)=\chi_E(\lambda)=(\lambda-5)^2$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διακεκριμένων παραγόντων, ο πίνακας E **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.5). ◆◆◆

Παράδειγμα 8.17 Εξετάστε αν οι επόμενες γραμμικές απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ είναι διαγωνοποιήσιμες :

i) $f(x,y,z,w)=(4x+2y+z-w,\ 3x+5y-z+4w,\ 2z+5w,\ 2w)$

ii) $f(x,y,z,w)=(-6x+4y+9w,\ -3x+z+6w,\ -x-2y+z,\ -4x+4y+7w)$

Απόδειξη Επειδή η διαγωνοποίηση μιας γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από τη διαγωνοποίηση του αντίστοιχου πίνακα αναπαράστασής της (Ορισμός 8.2), για κάθε γραμμική απεικόνιση αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστοιχο πίνακα αναπαράστασής της και στη συνέχεια να εξετάσουμε τη διαγωνοποίηση του.

i) Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι

$A=\begin{pmatrix}4&2&1&-1\\3&5&-1&4\\0&0&2&5\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. Επειδή ο πίνακας είναι της μορφής $\begin{pmatrix}A_1&A_3\\\mathbb{O}&A_2\end{pmatrix}$, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)$ (Εφαρμογή 7.30).

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_1 είναι

$$\chi_{A_1}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-4&-2\\-3&\lambda-5\end{pmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14=(\lambda-2)(\lambda-7)$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_2 είναι

$$\chi_{A_2}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-5\\0&\lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2$$

συμπεραίνουμε ότι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-7)(\lambda-2)^3$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=7$ και $\lambda_2=2$ (τριπλή ρίζα). Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές για να υπολογίσουμε την (8.8) έχουμε

$$(A-7I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&-5&16\\0&0&5&-16\\0&0&0&-25\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O},$$

συνεπώς ο A **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμος, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) \equiv \chi_A(\lambda) = (\lambda-7)(\lambda-2)^3$, μια και ισχύουν

$$(A-7I)(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}, \text{ ενώ } (A-7I)(A-2I)^3 = \mathbb{O}.$$

Κατά συνέπεια και η f **δεν** είναι διαγωνοποιήσιμη μια και το ελάχιστο πολυώνυμό της δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

ii) Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι

$B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+6 & -4 & 0 & -9 \\ 3 & \lambda & -1 & -6 \\ 1 & 2 & \lambda-1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & \lambda-7 \end{pmatrix},$$

κάνοντας την γραμμοπράξη $r_3 \to (\lambda-1)r_2 + r_3$ έχουμε

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+6 & -4 & 0 & -9 \\ 3 & \lambda & -1 & -6 \\ 3\lambda-2 & \lambda(\lambda-1)+2 & 0 & -6\lambda+6 \\ 4 & -4 & 0 & \lambda-7 \end{pmatrix}$$

και αναπτύσσοντας ως προς την $3^{η}$ στήλη προκύπτει

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+6 & -4 & -9 \\ 3\lambda-2 & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6 \\ 4 & -4 & \lambda-7 \end{pmatrix}$$

Στην τελευταία ορίζουσα προσθέτουμε τη $2^{η}$ στήλη στην πρώτη και δημιουργείται στην $1^{η}$ στήλη κοινός παράγοντας $(\lambda+2)$, δηλαδή

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & -4 & -9 \\ \lambda(\lambda+2) & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6 \\ 0 & -4 & \lambda-7 \end{pmatrix} = (\lambda+2)\det \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ \lambda & \lambda(\lambda-1)+2 & -6\lambda+6 \\ 0 & -4 & \lambda-7 \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του τελευταίου πίνακα ως προς την $1^{η}$ στήλη παίρνουμε $\chi_B(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10) = (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ και $\lambda_3 = -2$ (διπλή ρίζα). Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές για να υπολογίσουμε την (8.8) έχουμε

$$(B-I)(B-5I)(B+2I) = \mathbb{O}, \tag{*}$$

συνεπώς ο B είναι διαγωνοποιήσιμος, διότι από την (*) προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2)$ και είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, κατά συνέπεια και η f είναι διαγωνοποιήσιμη. ◆◆◆

Εφαρμογή 8.18 i) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $qA + rI$, $q, r \in \mathbb{F}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, όταν $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

ii) Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & \cdots & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{F}$, και αν η απάντηση είναι θετική δώστε τη διαγώνια μορφή του.

Απόδειξη i) Επειδή ο πίνακας A διαγωνοποιείται στο $\mathbb{F}$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{F})$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση του Ορισμού 8.1, δηλαδή,

$$A = P\Delta P^{-1}. \tag{*}$$

Ο πίνακας $qA + rI$ χρησιμοποιώντας και την (*) γράφεται

$$\begin{aligned} qA + rI &= qP\Delta P^{-1} + rPP^{-1} = P(q\Delta + rI)P^{-1} \\ &= Pdiag(q\lambda_1 + r, q\lambda_2 + r, \ldots, q\lambda_n + r)P^{-1} \end{aligned}. \tag{**}$$

Από την (**) καταλήγουμε ότι υπάρχει ο ίδιος αντιστρέψιμος πίνακας ομοιότητας P ο οποίος διαγωνοποιεί τον $qA + rI$.

ii) Παρατηρούμε ότι ο B γράφεται $B = bA + (a-b)I$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.29 iv, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ (αλγεβρικής πολλαπλότητας $n-1$) και $\lambda_2 = n$ και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$. Οπότε ο πίνακας A έχει πρωτοβάθμιους παράγοντες διακεκριμένους στο $m_A(\lambda)$, άρα είναι διαγωνοποιήσιμος, (Πρόταση 8.5), έστω ότι υπάρχει P τέτοιος ώστε $A = Pdiag(0,0,\dots,0,n)P^{-1}$. Από το προηγούμενο ερώτημα και τη γραφή του πίνακα B προκύπτει ότι και ο B είναι διαγωνοποιήσιμος και μάλιστα από (**) γράφουμε

$$B = bA + (a-b)I = Pdiag\big((a-b),(a-b),\dots,(a-b),\ nb+a-b\big)P^{-1}. \qquad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Εφαρμογή 8.19 Δίνεται ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2-a & a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Απόδειξη Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & \lambda-(2-a) & -(a-1) & -(a+1) \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} \lambda-(2-a) & -(a-1) & -(a+1) \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)\left(\lambda^2-(4-a)\lambda+3-3a\right) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1+a) \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ και $\lambda_4 = 1-a$.

- Στην περίπτωση όπου $a \neq 0$, $a \neq -1$ και $a \neq -2$ οι ιδιοτιμές είναι όλες διακεκριμένες, επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.3).

- Για $a = 0$, ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)$. Χρησιμοποιώντας μόνο τις διακεκριμένες ιδιοτιμές για να υπολογίσουμε την (8.8) παρατηρούμε ότι αυτή επαληθεύεται μια και ισχύει $(A-I)(A-2I)(A-3I) = \mathbb{O}$, συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι για $a=0$, ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.5).

- Εξετάζοντας την περίπτωση $a=-1$, ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, το

χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-3)$ και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_2=2$, $\lambda_3=3$

Επειδή $(A-I)(A-2I)(A-3I)\neq\mathbb{O}$, δεν ισχύει η (8.8), άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)$, συνεπώς δεν επαληθεύεται η Πρόταση 8.5, άρα ο A **δε** διαγωνοποιείται.

- Για $a=-2$, ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό

πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-1)(\lambda-2)$ και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_3=2$.

Επειδή $(A-I)(A-2I)(A-3I)\neq\mathbb{O}$, δεν ισχύει η (8.8), άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)$, συνεπώς δεν επαληθεύεται η Πρόταση 8.5, άρα ο A **δε** διαγωνοποιείται. ♦♦♦

Εφαρμογή 8.20 Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -5 & b & a \\ -4 & 2 & a \\ -4 & b & 0 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι $\lambda_1=-1$ είναι ιδιοτιμή του A με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_1=3$, τότε

i) να υπολογίσετε τις τιμές του $a,b\in\mathbb{R}$.

Για τις τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ που υπολογίσθηκαν στο i) να υπολογίσετε

ii) το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να αποδείξετε ότι $A^3=3A+2I$ και $A^4=-4A-3I$.

Απόδειξη i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda+5 & -b & -a\\ 4 & \lambda-2 & -a\\ 4 & -b & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2+(4a+4b-ab-10)\lambda+3ab-8a\,.$$

Επειδή $\lambda_1=-1$ είναι ρίζα του $\chi_A(\lambda)$ έχουμε

$$\chi_A(-1)=0\Leftrightarrow 12-12a-4b+4ab=0\Leftrightarrow(3-b)(1-a)=0\,, \qquad (*)$$

επιπλέον η ρίζα του $\chi_A(\lambda)$ είναι τριπλή, άρα μηδενίζει και τις επόμενης τάξης παραγώγους του, δηλαδή

$$\chi_A'(\lambda_1)=0\Leftrightarrow 3\lambda_1^2+6\lambda_1+4a+4b-ab-10=0\Leftrightarrow 4a+4b-ab-13=0\,. \qquad (**)$$

Από τη λύση του συστήματος των (*) και (**) προκύπτει $a=1$ και $b=3$.

ii) Αντικαθιστώντας τις τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ από i) ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ -4 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix}$,

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)^3$ με $\nu_1=3$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και είναι το πολυώνυμο μικροτέρου βαθμού που επαληθεύει ο A, επομένως το αναζητούμε ανάμεσα στα $m_1(\lambda)=\lambda+1,\ m_2(\lambda)=(\lambda+1)^2$ και στο $\chi_A(\lambda)$.

Επειδή $A+I=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ -4 & 3 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\neq\mathbb{O}$, ενώ $(A+I)^2=\mathbb{O}$ είναι $m_A(\lambda)=(\lambda+1)^2$.

Επίσης, $m_A(A)=\mathbb{O}\Leftrightarrow(A+I)^2=\mathbb{O}\Leftrightarrow A^2+2A+I=\mathbb{O}\Leftrightarrow A^2=-2A-I$ (*).

Εφαρμόζοντας στο θεώρημα Cayley-Hamilton, $\chi_A(A)=\mathbb{O}$, την (*) έχουμε

$$(A+I)^3=\mathbb{O}\Leftrightarrow A^3+3A^2+3A+I=\mathbb{O}\Leftrightarrow A^3=-3(-2A-I)-3A-I=3A+2I\,.$$

Ακόμη από την (*) προκύπτει

$$A^4=\left(A^2\right)^2=(-2A-I)^2=4A^2+4A+I\overset{(*)}{=}4(-2A-I)+4A+I=-4A-3I\,.$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 8.21 (γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων)

i) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας και το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t),$$

όπου $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}^t$, με $t \in \mathbb{R}$ και $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.

ii) Να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t) \\
x_2'(t) &= \phantom{x_1(t) + {}} 2x_2(t) + 4x_3(t) + x_4(t) \\
x_3'(t) &= - 3x_3(t) + x_4(t) \\
x_4'(t) &= - 6x_3(t) + 2x_4(t)
\end{aligned}$$

όπου $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $t \in \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις.

Απόδειξη i) Για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $i \in \mathbb{N}$ είναι γνωστό ότι η γενική λύση τους είναι της μορφής

$$x_i(t) = c e^{\lambda_i t}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{8.31}$$

Το σύστημα που δόθηκε γράφεται με τη μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

όπου $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $A = P\Delta P^{-1}$, με $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τις ιδιοτιμές του πίνακα A (Ορισμός 8.1), και τότε το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = P\Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

Θέτουμε

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \tag{8.33}$$

οπότε με αντικατάσταση της (8.33) στην (8.32) προκύπτει

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}$$

Η τελευταία ισότητα των πινάκων μέσω της (8.31) δίνει τις λύσεις των y_i για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οι οποίες είναι $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$, όπου $c_i \in \mathbb{R}$ σταθερές.

Πολλαπλασιάζοντας την (8.33) αριστερά επί P και αντικαθιστώντας τις λύσεις y_i προκύπτει η γενική λύση του διαφορικού συστήματος που είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \tag{8.34}$$

η οποία εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα A και τον πίνακα διαγωνοποίησης του.

ii) Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι σύνθετος της μορφής $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.30 το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)$, όπου

$$\chi_{A_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2), \quad \chi_{A_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 1),$$

συνεπώς $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ και $\lambda_4 = 2$, όλες διακεκριμένες, επομένως ο A είναι διαγωνοποιήσιμος (Πρόταση 8.3). Για να υπολογίσουμε τις

$x_i(t)$, $i=1,2,3,4$, $t\in\mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις, σύμφωνα με την (8.34) χρειάζεται να βρούμε και τον πίνακα P , άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παραπάνω ιδιοτιμών.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$, λύνοντας το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(0)=\left\{x_3\begin{pmatrix}-8 & -7 & 2 & 6\end{pmatrix}^t \ :\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-8 & -7 & 2 & 6\end{pmatrix}^t$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$, λύνοντας το σύστημα $(A+I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(-1)=\left\{x_3\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}^t \ :\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}^t$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=1$, λύνοντας το σύστημα $(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \ :\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$.
- Και τέλος, για την ιδιοτιμή $\lambda_4=2$, λύνοντας το σύστημα $(A-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, προκύπτει ο ιδιόχωρος $V(2)=\left\{x_2\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \ :\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης ο πίνακας P είναι

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2 & 1 & 2\\ -7 & -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

και από (8.34) οι $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$, είναι

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2 & 1 & 2\\ -7 & -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^0\\ c_2e^{-t}\\ c_3e^t\\ c_4e^{2t}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x_1(t)=-8c_1-2c_2e^{-t}+c_3e^t+2c_4e^{2t}\\ x_2(t)=-7c_1-2c_2e^{-t}+c_4e^{2t}\\ x_3(t)=2c_1+c_2e^{-t}\\ x_4(t)=6c_1+2c_2e^{-t}\end{matrix}\quad ,\ c_i\in\mathbb{R}\ .$$

Ο υπολογισμός των σταθερών $c_i\in\mathbb{R}$ γίνεται εφόσον δοθούν αρχικές συνθήκες στο πρόβλημα. ◆◆◆

Εφαρμογή 8.22 (Ρίζες)

i) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαγωνοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί πίνακες X οι οποίοι είναι λύση της εξίσωσης $X^2 = A$[1].

ii) Να υπολογίσετε έναν πίνακα X τέτοιον ώστε $X^2 = A$, όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Έστω $A = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$, υπολογίστε μια πραγματική λύση της εξίσωσης $X^3 = A$.

Απόδειξη i) Επειδή ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαγωνοποιείται, υπάρχει αντιστρέψιμος πραγματικός πίνακας P και διαγώνιος πραγματικός πίνακας $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, όπου οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι όλοι μη αρνητικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ο Ορισμός 8.1

$$A = P\Delta P^{-1}. \qquad (*)$$

Θέτουμε

$$Y = P^{-1}XP \qquad (8.35)$$

άρα σύμφωνα με την ιδιότητα των δυνάμεων των διαγωνοποιήσιμων πινάκων (Πρόταση 8.4) καταλήγουμε στην $Y^2 = P^{-1}X^2P$, και από την υπόθεση $X^2 = A$ έχουμε $Y^2 = P^{-1}AP \overset{(*)}{\Leftrightarrow} Y^2 = \underbrace{P^{-1}P}_{I}\Delta\underbrace{P^{-1}P}_{I} = \Delta$. Συνεπώς

Θέτοντας

$$X = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) \cdot P^{-1} \qquad (8.36)$$

διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες X είναι πραγματικοί και κάνοντας τις πράξεις

$$X^2 = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) \cdot \underbrace{P^{-1}P}_{I} \cdot diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right) P^{-1} = P\Delta P^{-1}$$

συμπεραίνουμε ότι επαληθεύεται η εξίσωση $X^2 = A$, άρα κάποιος από τους X της (8.36), αποτελεί μία τετραγωνική ρίζα του A.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (8.36) δίνει κάποιες τετραγωνικές ρίζες του A, όχι αναγκαστικά όλες.

[1] Ένας πίνακας $X \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα** του $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει $X^2 = A$.

<u>Παρατήρηση :</u> Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται όχι μόνο για τετραγωνικές ρίζες πινάκων αλλά πιο γενικά για εξισώσεις της μορφής $X^m = A$, όπου ο A διαγωνοποιείται (βλέπε κυβικές ρίζες στο iii) ερώτημα αυτής της εφαρμογής).

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$, επομένως ο A διαγωνοποιείται, επειδή έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές (Πρόταση 8.3) και μάλιστα αυτές είναι θετικοί αριθμοί. Συνεπώς εφαρμόζεται το i) της εφαρμογής.
Από τη (8.35) επιλέγουμε κάποιον από τους πίνακες

$$X = P \cdot diag\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}\right) \cdot P^{-1}.$$

Για να υπολογίσουμε ακριβώς τους πίνακες αυτούς χρειάζεται να υπολογίσουμε τον P , βρίσκοντας τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών του A.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, η λύση του συστήματος $(A-2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(2) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^t$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, η λύση του συστήματος $(A-3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(3) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Ο πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος μια και τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 7.10), άρα $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Επομένως, οι ζητούμενοι πίνακες X είναι της μορφής

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$ είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-9\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda-8)$. Οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=8$, συνεπώς ο A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.3), και σύμφωνα με Ορισμό 8.1 η διαγώνια μορφή του είναι

$$A=P\Delta P^{-1} \tag{*}$$

όπου $\Delta=diag(1,8)$ και P ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=1$, η λύση του συστήματος $(A-I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}^t \;:\; x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}^t$.
- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=8$, η λύση του συστήματος $(A-8I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ είναι ο ιδιόχωρος $V(8)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t \;:\; x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Ο πίνακας P είναι $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με $\det P=1$, άρα $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Θέτουμε $Y=P^{-1}XP$ όπως στην (8.35), άρα σύμφωνα με την ιδιότητα των δυνάμεων των διαγωνοποιήσιμων πινάκων (Πρόταση 8.4) καταλήγουμε στην $Y^3=P^{-1}X^3P$, και από την υπόθεση έχουμε $Y^3=P^{-1}AP \overset{(*)}{\Leftrightarrow} Y^3=\underbrace{P^{-1}P}_{I}\Delta\underbrace{P^{-1}P}_{I}=\Delta=diag(1,8)$.

Συνεπώς

$$Y=diag\left(1,\ \sqrt[3]{8}\right)=diag(1,2), \tag{**}$$

επειδή αναζητούμε πραγματική λύση της για την εξίσωση $X^3=A$. Πολλαπλασιάζουμε τη (8.35) δεξιά επί P^{-1} και αριστερά επί P και στην προκύπτουσα αντικαθιστούμε τη (**), οπότε σταδιακά έχουμε

$$X=PYP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 8.23 (αναδρομικές ακολουθίες)

i) Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ με $a_n + b_n = 1$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\boldsymbol{y}_n = A\,\boldsymbol{y}_{n-1}$. Αν $b_1 = 0,2$, να εκφράσετε τους όρους των ακολουθιών (a_n) και (b_n) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ii) Έστω η ακολουθία (a_n), $n = 1,2,\ldots$ που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3,4,\ldots$ με $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n.

Απόδειξη i) Υπολογίζοντας τη μορφή του $\boldsymbol{y}_n$, η δοθείσα ισότητα πινάκων $\boldsymbol{y}_n = A\,\boldsymbol{y}_{n-1}$ γράφεται και

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ισότητα διαδοχικά για τις διάφορες τιμές των n έχουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Από την (*) παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-1}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων θα μπορέσουμε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}^t$ συναρτήσει των a_1, b_1 και $n \in \mathbb{N}$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1,2\lambda + 0,2 = (\lambda - 0,2)(\lambda - 1)$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0,2$ και $\lambda_2 = 1$, ο A διαγωνοποιείται, (Πρόταση 8.3). Ο πίνακας A^{n-1} υπολογίζεται από την (8.6) της Πρότασης 8.4. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές θα προσδιορίσουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $i = 1,2$, και στη συνέχεια επιλέγοντας ως ιδιοδιανύσματα τα μη μηδενικά στοιχεία του κάθε ιδιοχώρου.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0,2$, έχουμε το σύστημα

$$(A - 0,2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

η λύση του συστήματος είναι ο ιδιόχωρος $V(0,2)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t \;:\; x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε στην ιδιοτιμή $\lambda_1=0,2$ επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

- Για $\lambda_2=1$, έχουμε $(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-0,6 & 0,2\\ 0,6 & -0,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, η λύση του οποίου είναι ο ιδιόχωρος $V(1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^t \;:\; x_1\in\mathbb{R}\right\}$, οπότε για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^t$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης θέτοντας $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, οπότε $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Από την (8.6) έχουμε

$$A^{n-1}=P\begin{pmatrix}0,2^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\cdot 0,2^{n-1}+1 & 1-0,2^{n-1}\\ 3-3\cdot 0,2^{n-1} & 3+0,2^{n-1}\end{pmatrix},$$

και από την (*) προκύπτει

$$\boldsymbol{y}_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\left(3\cdot 0,2^{n-1}+1\right)a_1+\left(1-0,2^{n-1}\right)b_1\\ \left(3-3\cdot 0,2^{n-1}\right)a_1+\left(3+0,2^{n-1}\right)b_1\end{pmatrix}\overset{a_1+b_1=1}{=}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+\left(3a_1-b_1\right)\cdot 0,2^{n-1}\\ 3+\left(-3a_1+b_1\right)\cdot 0,2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Από την αρχική τιμή $b_1=0,2$ υπολογίζεται και η $a_1=0,8$, οπότε με αντικατάστασή τους στην τελευταία ισότητα πινάκων παίρνουμε τις ακολουθίες

$$a_n=\frac{1}{4}\left(1+2,2\cdot 0,2^{n-1}\right),\quad b_n=\frac{1}{4}\left(3-2,2\cdot 0,2^{n-1}\right),\quad n\geq 1.$$

ii) Από τον αναδρομικό τύπο που δόθηκε μπορούμε να γράψουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}a_n&=2a_{n-1}+3a_{n-2}\\ a_{n-1}&=a_{n-1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix},$$

όπου αν θέσουμε $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, η προηγούμενη ισότητα πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix}. \tag{**}$$

Αν εφαρμόσουμε την (**) διαδοχικά, για τις διάφορες τιμές των n, έχουμε

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=B^2\begin{pmatrix}a_{n-2}\\ a_{n-3}\end{pmatrix}=B^3\begin{pmatrix}a_{n-3}\\ a_{n-4}\end{pmatrix}=\ldots=B^{n-2}\begin{pmatrix}a_2\\ a_1\end{pmatrix}. \tag{***}$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον B^{n-2}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων στην (***) θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τον όρο a_n

συναρτήσει των a_1, a_2 και n. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι δύο διαφορετικές (διακεκριμένες), $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$, οπότε ο B διαγωνοποιείται, (Πρόταση 8.3). Επομένως ο B^{n-2} υπολογίζεται από την (8.6), (Πρόταση 8.4).

Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές θα προσδιορίσουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, λύνοντας το σύστημα $(B - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, και επιλέγοντας ως ιδιοδιανύσματα τα μη μηδενικά στοιχεία του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ λύνοντας το σύστημα

$$(B+I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

βρίσκουμε τον ιδιόχωρο $V(-1) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t \ : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = -1$ το $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

- Για $\lambda_2 = 3$, έχουμε $(B - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, η λύση του είναι ο ιδιόχωρος $V(3) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^t \ : \ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, οπότε για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ επιλέγουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Ο πίνακας P κατασκευάζεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης θέτοντας $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, οπότε $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Από την (8.6) έχουμε

$$B^{n-2} = P\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} & -3(-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} & 3(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{pmatrix},$$

οπότε από την ισότητα πινάκων της (***) προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{ \left((-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_2 + \left(-3(-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_1 \right\}.$$

Για $a_1 = 1$ και $a_2 = 4$ έχουμε $a_n = \frac{1}{4}\left[(-1)^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-1} \right]$, $n \geq 3$. ♦♦♦

Εφαρμογή 8.24 Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i) Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται (τριγωνοποιείται), τότε ο ανάστροφός του είναι διαγωνοποιήσιμος (τριγωνοποιήσιμος).

ii) Ο πραγματικός 2×2 πίνακας A με $\det A < 0$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

iii) Υπάρχει μη μηδενικός 2×2 διαγωνοποιήσιμος πίνακας A τέτοιος ώστε $trA = \det A = 0$.

iv) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

v) Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος, τότε ο ανάστροφός του είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος.

vi) Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός, τότε $tr\left(A^*A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A)$, (όχι απαραίτητα διακεκριμένες).

Απόδειξη i) Σωστή. Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1 για τον διαγωνοποιήσιμο πίνακα A υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $A = P\Delta P^{-1}$ (*). Επιπλέον ισχύει

$$P^t\left(P^{-1}\right)^t = \left(P^{-1}P\right)^t = I^t = I \Rightarrow \left(P^{-1}\right)^t = \left(P^t\right)^{-1}, \qquad (**)$$

αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα $B^tA^t = (AB)^t$ (Πρόταση 1.3) και την αντιστρεψιμότητα του P. Η αναστροφή στην ισότητα της (*) δίνει :

$$A^t = \left(P\Delta P^{-1}\right)^t = \left(P^{-1}\right)^t \Delta^t P^t \overset{(**)}{=} \left(P^t\right)^{-1} \Delta^t P^t \overset{(P^t \equiv Q)}{=} Q^{-1}\Delta Q \Rightarrow A^t = Q^{-1}\Delta Q \overset{(R\equiv Q^{-1})}{=} R\Delta R^{-1}$$

Επομένως, ο A^t διαγωνοποιείται μέσω του αντιστρέψιμου πίνακα R.

ii) Σωστή. Θεωρούμε έναν πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, με $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Από την υπόθεση $\det A = ad - cb < 0$ (***) και από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A που είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb$ καταλαβαίνουμε ότι οι ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ πρέπει να είναι πραγματικές και διαφορετικές, μια και η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι πάντα θετική λόγω της (***). Συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι πάντα διακεκριμένες.

iii) Λάθος. Έστω ότι ο A έχει ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Από τις Προτάσεις 7.2, 8.13 και την υπόθεση $\det A = trA = 0$ προκύπτει το σύστημα $\begin{matrix} \det A = \lambda_1\lambda_2 = 0 \\ trA = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{matrix}$, η λύση του είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Αλλά τότε, αφού ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \mathbb{O}$, που σημαίνει ότι ο A πρέπει να είναι ο μηδενικός πίνακας.

iv) Λάθος. Επειδή ο πίνακας είναι τριγωνικός έχει ιδιοτιμές τα στοιχεία της διαγωνίου του (Εφαρμογή 7.29), άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda = a$ (διπλή ρίζα). Η λύση του συστήματος $(A - a\mathrm{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, δίνει $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow bx_2 = 0$ και επειδή $b \in \mathbb{R}^*$ έχουμε $x_2 = 0$, άρα $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \end{pmatrix}^t$, δηλαδή ο αντίστοιχο ιδιόχωρο είναι $V(a) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t \;\boldsymbol{:}\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, έχει διάσταση 1, επομένως σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης ο A **δε** διαγωνοποιείται.

v) Σωστή. Για έναν ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμο πίνακα A, από την (8.10), $A = STS^*$, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας S, και T άνω τριγωνικός.

Η αναστροφή στην ισότητα της (8.10) δίνει :

$$A^t = \left(STS^*\right)^t = \left(S^*\right)^t T^t S^t = \left(S^t\right)^* T^t S^t \overset{(S^t \equiv Q^*)}{=} QT^tQ^* \Rightarrow A^t = QT^tQ^* = QT_1Q^* .$$

Στην τελευταία ισότητα πινάκων, ο πίνακας Q είναι ορθομοναδιαίος, διότι

$$Q^*Q = \left(S^t\right)\left(S^t\right)^* = \left(S^t\right)\left(S^*\right)^t = \left(SS^*\right)^t = I ,$$

και ο T_1 είναι κάτω τριγωνικός. Συνεπώς ο A^t είναι ορθομοναδιαία τριγωνοποιήσιμος και μάλιστα μέσω του ορθομοναδιαίου πίνακα $Q \equiv \left(S^t\right)^* = \overline{S}$.

vi) Σωστή. Από το φασματικό θεώρημα (Πρόταση 8.14), ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα, άρα υπάρχει U ορθομοναδιαίος πίνακας ($U^*U = I$) τέτοιος ώστε $A = U\Delta U^*$, όπου Δ πραγματικός διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, δηλαδή $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Για τον A^*A από την Πρόταση 1.3vi), από το γεγονός ότι Δ είναι πραγματικός διαγώνιος έπεται $\Delta^* = \Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, και την προηγούμενη σχέση καταλήγουμε

$$A^*A = \left(U\Delta U^*\right)^* U\Delta U^* \overset{(\text{Πρ.}1.3\text{vi})}{=} U\Delta^* \underbrace{U^*U}_{I} \Delta U^* = U\Delta^*\Delta U^* = U\Delta^2 U^* .$$

Τελικά, από τον ορισμό του ίχνους και την ιδιότητά του $tr(AB)=tr(BA)$, (Εφαρμογή 1.16) έχουμε

$$tr\left(A^*A\right)=tr\left(U\Delta^2U^*\right)\overset{(\text{Εφ. }1.16\text{iii})}{=}tr\left(U^*U\Delta^2\right)=tr\left(\Delta^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 .$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 8.25 (ιδιότητες ομοίων πινάκων)

Έστω $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ όμοιοι[1] πίνακες. Αποδείξατε ότι

i) $\det A=\det B$, $trA=trB$

ii) οι πίνακες A^t και B^t είναι όμοιοι,

iii) αν ισχύει $A^2=A$, τότε $B^2=B$,

iv) οι πίνακες A^k και B^k, $k\in\mathbb{N}$ είναι όμοιοι,

v) οι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα, $\chi_A(\lambda)\equiv\chi_B(\lambda)$

vi) οι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια ελάχιστα πολυώνυμα, $m_A(\lambda)\equiv m_B(\lambda)$.

vii)δεν ισχύουν αντίστροφα οι ιδιότητες v) και vi). Δώστε κατάλληλα παραδείγματα.

Απόδειξη i) Από τον ορισμό των ομοίων πινάκων υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$A=PBP^{-1}. \qquad (*)$$

Από την αντιστρεψιμότητα του πίνακα ομοιότητας P και την ιδιότητα γινόμενο οριζουσών (Πρόταση 2.3ii) έχουμε

$$PP^{-1}=I\Leftrightarrow\det\left(PP^{-1}\right)=\det I=1\Leftrightarrow\det P\cdot\det\left(P^{-1}\right)=1. \qquad (**)$$

Άρα $\det A\overset{(*)}{=}\det\left(PBP^{-1}\right)=\det P\cdot\det B\cdot\det\left(P^{-1}\right)\overset{(**)}{=}\det B$.

Από την ιδιότητα του γινομένου του ίχνους (Εφαρμογή 1.16iii) και την (*) προκύπτει:

$$trA\overset{(*)}{=}tr\left(PBP^{-1}\right)=tr\left(BP^{-1}P\right)=trB$$

ii) Από την ιδιότητα αναστροφής γινομένου πινάκων (Πρόταση 1.3vi) και την (*) παίρνουμε

$$A^t\overset{(*)}{=}\left(PBP^{-1}\right)^t=\left(P^{-1}\right)^t\cdot B^t\cdot P^t\overset{Q^{-1}\equiv P^t}{=}Q\cdot B^t\cdot Q^{-1},$$

[1] Οι $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **όμοιοι** πίνακες, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε $A=PBP^{-1}$.

όπου Q είναι αντιστρέψιμος μια και $Q^{-1}Q = P^t\left(P^t\right)^{-1} = P^t\left(P^{-1}\right)^t = \left(P^{-1}P\right)^t = I$.

iii) Η (*) ισοδύναμα γράφεται $B = P^{-1}AP$, οπότε κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας την υπόθεση $A^2 = A$ παίρνουμε

$$B^2 \overset{(*)}{=} \left(P^{-1}AP\right)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P \overset{(Y)}{=} P^{-1}AP = B .$$

iv) Εφαρμόζοντας $k-$φορές την (*) έχουμε

$$A^k \overset{(*)}{=} \left(PBP^{-1}\right)^k = \underbrace{PB\cancel{P^{-1}}\cdot \cancel{P}B\cancel{P^{-1}}\cdot \cancel{P}B\cancel{P^{-1}}\cdots \cancel{P}BP^{-1}}_{k-\text{φορές}} = P\underbrace{BB\cdots B}_{k-\text{φορές}}P^{-1} = P\cdot B^k\cdot P^{-1}.$$

v) Η απόδειξη είναι στην Πρόταση 7.9.

vi) Έστω ότι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων A , B είναι $m_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad k \le n$ και $m_B(\lambda) = \lambda^r + b_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$, $r \le n$.

Επειδή

$$\begin{aligned} m_B(A) &= A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_1A + b_0I \\ &\overset{(iii)}{=} PB^rP^{-1} + b_{r-1}PB^{r-1}P^{-1} + \cdots + b_1PBP^{-1} + b_0I \\ &= P\left(B^r + b_{r-1}B^{r-1} + \cdots + b_1B + b_0I\right)P^{-1} \\ &= Pm_B(B)P^{-1} = \mathbb{O} \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι το $m_B(\lambda)$ διαιρεί το $m_A(\lambda)$.(α)

Επίσης, από την iii έχουμε και την ισότητα $B^k = P^{-1}A^kP$, ομοίως προκύπτει και

$$\begin{aligned} m_A(B) &= B^k + a_{k-1}B^{k-1} + \cdots + a_1B + a_0I \\ &\overset{(iii)}{=} P^{-1}A^kP + a_{k-1}P^{-1}A^{k-1}P + \cdots + a_1P^{-1}AP + a_0I \\ &= P^{-1}\left(A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1A + a_0I\right)P = P^{-1}m_A(A)P = \mathbb{O} \end{aligned}$$

Επομένως $m_A(\lambda)$ διαιρεί το $m_B(\lambda)$ (β). Συνεπώς, από (α) και (β) έχουμε $m_A(\lambda) \equiv m_B(\lambda)$.

vii) Αν θεωρήσουμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ παρατηρούμε ότι ως τριγωνικοί πίνακες έχουν $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$, $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$, και υπολογίζουμε ότι τα ελάχιστα πολυώνυμα είναι $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$, $m_B(\lambda)=\chi_B(\lambda)$, ωστόσο οι A,B δεν είναι όμοιοι διότι $m_A(\lambda)\neq m_B(\lambda)$.

Αν θεωρήσουμε $E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ παρατηρούμε ότι ως τριγωνικοί πίνακες έχουν $\chi_E(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, $\chi_D(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, και υπολογίζουμε τα ελάχιστα πολυώνυμα ότι είναι $m_E(\lambda)\equiv m_D(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$, ωστόσο οι E,D δεν είναι όμοιοι διότι $\chi_E(\lambda)\neq\chi_D(\lambda)$. ◆◆◆

Εφαρμογή 8.26 (ιδιότητες ταυτοδυνάμων πινάκων)

Αν για έναν πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ με $A\neq I$ ισχύει $A^2=A$[1] αποδείξατε ότι

i) $\sigma(A)=\{0,1\}$, $\det A=0$.

ii) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

iii) $trA=r(A)=\nu_2$, όπου $r(A)$ ο βαθμός του πίνακα A , ν_2 η αλγεβρική πολλαπλότητα της μονάδας.

iv) για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U\in M_n(\mathbb{F})$ ο U^*AU είναι ταυτοδύναμος.

Απόδειξη i) Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, ισχύει $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ (*), και σύμφωνα με την Πρόταση 7.6, λ^2 και $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοποσά του A^2, δηλαδή $A^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$ (**). Πολλαπλασιάζοντας τη δοσμένη σχέση δεξιά επί $\boldsymbol{x}$ και κάνοντας αντικατάσταση με τις (*) και (**) παίρνουμε

$$A^2=A\ \Rightarrow\ A^2\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}\ \Rightarrow\ \lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\ \Rightarrow\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}. \qquad (***)$$

Επειδή το $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα είναι μη μηδενικό διάνυσμα από (***) είναι φανερό ότι $\lambda^2-\lambda=0\ \Rightarrow\ \lambda(\lambda-1)=0$, άρα $\sigma(A)=\{\,0,1\,\}$. Από την Πρόταση 7.2 ισχύει $\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=0$, άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ii) Από την i) είναι φανερό ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^{\nu_1}(\lambda-1)^{\nu_2}$, όπου $\nu_1+\nu_2=n$. Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να αναζητηθεί ανάμεσα στα πολυώνυμα $m_i(\lambda)=\lambda^{k_1}(\lambda-1)^{k_2}$ με $k_i\leq\nu_i$. Όμως για

[1] Ο τετραγωνικός πίνακας με την ιδιότητα $A^2=A$ ονομάζεται **ταυτοδύναμος** πίνακας (idempotent matrix).

$k_1 = k_2 = 1$ και την υπόθεση έχουμε $m_1(A) = A(A-I) = A^2 - A \overset{(Y)}{=} \mathbb{O}$, οπότε επαληθεύεται η (8.8), από όπου προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$, άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 8.5).

iii) Από το ii) υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \Delta = diag\left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\nu_2},\underbrace{0,\ldots,0}_{\nu_1}\right) = diag\left(I_{\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu_1}\right),$$

όπου ν_1, ν_2 οι αλγεβρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών, όπως περιγράφονται στο $\chi_A(\lambda)$. Από ορισμό ίχνους και από ιδιότητές του (Εφαρμογή 1.16) ισχύει

$$\nu_2 = tr\left(I_{\nu_2}\right) = tr\left(P^{-1}AP\right) = tr\left(A\underbrace{PP^{-1}}_{I}\right) = trA.$$

Επειδή η διαγώνια μορφή του A είναι ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, από τον Ορισμό 3.5 για τον βαθμό του πίνακα έχουμε

$$\nu_2 = r\left(diag\left(I_{\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu_1}\right)\right) = r\left(P^{-1}AP\right) = r(A),$$

οπότε συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $trA = r(A) = \nu_2$.

iv) Αν $U \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας, τότε

$$\left(U^*AU\right)^2 = U^*A\underbrace{UU^*}_{I}AU = U^*A^2U \overset{(Y)}{=} U^*AU.$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 8.27 (κανονικοί πίνακες)

i) Αν $T \in M_n(\mathbb{F})$ είναι άνω τριγωνικός και κανονικός[1] πίνακας, τότε $T \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγώνιος.

ii) Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι κανονικός αν και μόνο αν είναι ορθομοναδιαία όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Απόδειξη

---

[1] Ο $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **κανονικός** πίνακας (normal matrix), αν ισχύει $AA^* = A^*A$.

i) Έστω $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$ ο άνω τριγωνικός πίνακας με $t_{ij} \in \mathbb{F}$, $t_{ij}=0$ για κάθε $i>j$. Από τον ορισμό του κανονικού πίνακα $TT^*=T^*T$, δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t_{12}} & \overline{t_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t_{13}} & \overline{t_{23}} & \overline{t_{33}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \overline{t_{1n}} & \overline{t_{2n}} & \overline{t_{3n}} & \dots & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t_{12}} & \overline{t_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{t_{13}} & \overline{t_{23}} & \overline{t_{33}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \overline{t_{1n}} & \overline{t_{2n}} & \overline{t_{3n}} & \dots & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

παίρνουμε, μετά από τις πράξεις και εξισώνοντας τα στοιχεία των πινάκων στις αντίστοιχες θέσεις, τις επόμενες ισότητες

από στοιχείο 1,1 θέσης $|t_{11}|^2+|t_{12}|^2+|t_{13}|^2+\dots+|t_{1n}|^2=|t_{11}|^2 \Leftrightarrow t_{12}=t_{13}=\dots=t_{1n}=0$

από στοιχείο στη $2,2$ θέση $|t_{22}|^2+|t_{23}|^2+\dots+|t_{2n}|^2=|t_{22}|^2 \Leftrightarrow t_{23}=t_{24}=\dots=t_{2n}=0$,

από στοιχείο στην $3,3$ θέση $|t_{33}|^2+|t_{34}|^2+\dots+|t_{3n}|^2=|t_{33}|^2 \Leftrightarrow t_{34}=\dots=t_{3n}=0$,

και από στοιχείο $(n-1),(n-1)$ θέσης $\left|t_{(n-1)(n-1)}\right|^2+\left|t_{(n-1)n}\right|^2=\left|t_{(n-1)(n-1)}\right|^2 \Leftrightarrow t_{(n-1)n}=0$.

Από όλες τις παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτει ότι $t_{ij}=0$ για κάθε $i\neq j$, $i<j$ με $i=1,2,\dots,n-1$, επομένως ο T είναι διαγώνιος πίνακας, $T=diag(t_{11},t_{22},\dots,t_{nn})$.

ii) Έστω A ένας κανονικός πίνακας, από το θεώρημα Schur (Πρόταση 8.10) υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε να ισχύει

$$A=UTU^*, \qquad (*)$$

όπου $T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ άνω τριγωνικός πίνακας με τις ιδιοτιμές του A ως διαγώνια στοιχεία.

Αντικαθιστώντας την (*) στην $AA^*=A^*A$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος, $UU^*=U^*U=I$, καταλήγουμε

$$UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^*=UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* \Leftrightarrow UTT^*U^*=UT^*TU^* \Leftrightarrow TT^*=T^*T,$$

δηλαδή ο T είναι και κανονικός πίνακας, το οποίο από i) σημαίνει ότι ο T είναι ο διαγώνιος πίνακας $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, λ_i όλες οι ιδιοτιμές του A.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε να ισχύει $A = U\Delta U^*$, $\Delta = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,όπου $a_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

τότε

$$AA^* = U\Delta U^* \left(U\,\Delta U^*\right)^* = U\,\Delta \underbrace{U^*U}_{I}\,\Delta^* U^* = U\Delta\Delta^* U^* \qquad (**)$$

και

$$A^*A = \left(U\,\Delta U^*\right)^* U\Delta U^* = U\,\Delta^*\,\underbrace{U^*U}_{I}\,\Delta U^* = U\,\Delta^*\Delta U^*. \qquad (***)$$

Επειδή $\Delta = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ισχύει η αντιμεταθετικότητα των πινάκων $\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta$, επομένως από την ισότητα των πινάκων στα δεύτερα μέλη των (**) και (***) προκύπτει $AA^* = A^*A$, δηλαδή ο A είναι κανονικός πίνακας. ◆◆◆