Κεφάλαιο 7

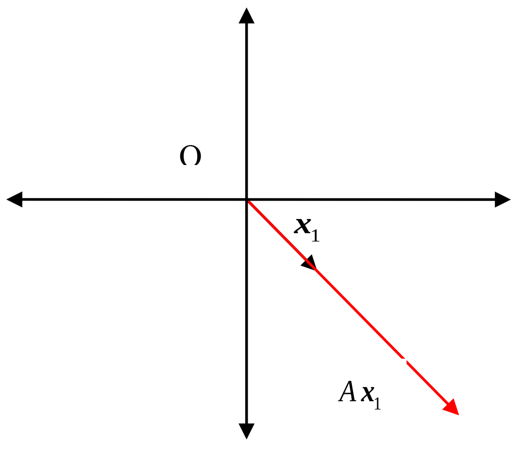
Χ Α Ρ Α Κ Τ Η Ρ Ι Σ Τ Ι Κ Α Π Ο Σ Α

Αρκετά προβλήματα των Μαθηματικών, της Φυσικής, των Οικονομικών εφαρμογών αντιμετωπίζονται ευκολότερα με τη θεωρία των ιδιοποσών, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε βασικές ιδιότητες των χαρακτηριστικών ποσών, τις πληροφορίες που προκύπτουν από τα χαρακτηριστικά ποσά των πινάκων ειδικής μορφής, τη δυνατότητα απλοποίησης πολυωνυμικών πινάκων με τη χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.

7.1 Βασικοί Ορισμοί

Γενικά, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ο μετασχηματισμός $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ μπορεί να μετακινήσει τα διανύσματα $\boldsymbol{x}$ σε ποικίλες διευθύνσεις, συχνά όμως παρουσιάζονται κάποια διανύσματα που η δράση του πίνακα πάνω τους είναι πολύ απλή, τα αναγκάζει να κινηθούν στην ίδια διεύθυνση, να είναι συγγραμμικά.

Θεωρώντας τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα η δράση του πίνακα στο διάνυσμα δεν επηρεάζει τη διεύθυνσή του, μια και $A\boldsymbol{x}_1$ είναι ακριβώς $3\boldsymbol{x}_1$.



Σχήμα

Ορισμός 7.1 (ιδιοτιμή – ιδιοδιάνυσμα πίνακα)

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και ένα διάνυσμα* $\boldsymbol{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}, \quad \mu\varepsilon \;\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{7.1}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. *Το* λ *ονομάζεται* ***ιδιοτιμή*** (eigenvalue) *του πίνακα* A *και το* $\boldsymbol{x}$ ***ιδιοδιάνυσμα***(eigenvector) *του* A *αντίστοιχο της ιδιοτιμής* λ.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται ***χαρακτηριστικά ποσά*** *ή* ***ιδιοποσά*** *(ή χαρακτηριστικά μεγέθη) του* A.

Για παράδειγμα, εύκολα επαληθεύουμε ότι για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ισχύει $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, συνεπώς μια ιδιοτιμή του A είναι το 3 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι το $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Για το $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ έχουμε

$A\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\,\boldsymbol{x}_2$, συνεπώς το $\boldsymbol{x}_2$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A, επειδή το $A\boldsymbol{x}_2$ δεν είναι συγγραμμικό του $\boldsymbol{x}_2$, για καμιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{F}$, (βλέπε Παράδειγμα 7.1).

Η (7.1) γράφεται ισοδύναμα και $A\boldsymbol{x} - \lambda\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, από όπου καταλαβαίνουμε ότι αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ, είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμά της, λύνοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \text{για} \;\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}. \tag{7.2}$$

Παράδειγμα 7.0 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Αναζητώντας τα ιδιοδιανύσματά του $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ από την (7.2) καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα $\begin{matrix} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{matrix}$. Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ο πίνακας $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.8 και τα σχόλιά της το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^t$. Αλλά από τον Ορισμό 7.1 και την (7.2), ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά διανύσματα. Άρα ο A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα στο $\mathbb{R}$.

Αν όμως ενδιαφερόμαστε για μιγαδικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους, σύμφωνα με το κεφάλαιο 5 (?) το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι δύο οι $\pm i$.

Για $\lambda = i$, το σύστημα είναι

$$\left.\begin{aligned} -ix_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 - ix_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= ix_1 \\ x_1 &\in \mathbb{C} \end{aligned},$$

από όπου έχουμε ότι υπάρχουν αντίστοιχα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Από το προηγούμενο παράδειγμα, καταλαβαίνουμε ότι για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ ενός τετραγωνικού πίνακα A θα πρέπει να ισχύει η (7.2), και σύμφωνα με το κεφάλαιο 5 (Πρόταση ?) το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0. \tag{7.3}$$

Η (7.3) γράφεται πιο αναλυτικά

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{7.4}$$

δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ του πίνακα A πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (7.4), η οποία ονομάζεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του τετραγωνικού πίνακα A. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα $A-\lambda I$ στην χαρακτηριστική εξίσωση καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού, το οποίο αν πολλαπλασιάσουμε με $(-1)^n$ προκύπτει το πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A-\lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 , \qquad (7.5)$$

το οποίο ονομάζεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** του A με συντελεστές $b_j \in \mathbb{C}$, $j = 0,1,\ldots,n-1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο $\mathbb{C}$ [1] και να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i} ,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ στο $\mathbb{C}$ και $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i$ η πολλαπλότητα της κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται ***αλγεβρική πολλαπλότητά*** της . Προφανώς για έναν $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_i = n$.

Συνδυάζοντας την (7.2) με την (7.4) καταλαβαίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (7.5), οι οποίες σύμφωνα με την υποσημείωση[1] αν θεωρήσουμε τον $A \in M_n(\mathbb{F})$ ως στοιχείο του $M_n(\mathbb{R})$, τότε υπάρχουν το πολύ n ιδιοτιμές, και αν τον θεωρήσουμε ως στοιχείο του $M_n(\mathbb{C})$ υπάρχουν ακριβώς n ιδιοτιμές (όχι κατ΄ ανάγκη όλες διαφορετικές μεταξύ τους). Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A ονομάζεται ***φάσμα*** (spectrum) και συμβολίζεται με $\sigma(A)$. Αντικαθιστώντας κάθε μία διακεκριμένη ιδιοτιμή, $\lambda = \lambda_i$, στο σύστημα (7.2) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε $V(\lambda_i)$.

Ορισμός 7.2 (ιδιόχωρος – γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής)

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \left\{ \boldsymbol{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \quad : \quad (A-\lambda_i I)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

[1] Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας «Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$».

ονομάζεται ***ιδιόχωρος*** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i, η διάσταση του υποχώρου $V(\lambda_i)$ είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I),$$

ο δε αριθμός $\dim V(\lambda_i)$ ονομάζεται ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** της ιδιοτιμής λ_i, και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i.

Παρατήρηση • Επειδή η συνθήκη «*Το σύστημα* $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *έχει μη μηδενική λύση*» είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη «*Το σύστημα* $(\lambda I - A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *έχει μη μηδενική λύση*», μια και ισχύει $A-\lambda I = -(\lambda I - A)$, στον προσδιορισμό ιδιοδιανυσμάτων δεν έχει σημασία ποιό από τα δυο συστήματα χρησιμοποιούμε. Επίσης, επειδή $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det(\lambda I - A)=0$, στον προσδιορισμό ιδιοτιμών δεν έχει σημασία ποιά από τις δύο εξισώσεις χρησιμοποιούμε.

• Αποδεικνύεται ότι ισχύει $1 \le \dim V(\lambda_i) \le v_i$, και όταν οι ιδιοτιμές είναι απλές ρίζες (δηλαδή $v_i=1$) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$, έχουμε $\dim V(\lambda_i)=1$.

Παράδειγμα 7.1 Έστω $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, το οποίο υπολογίζουμε από την (7.5) και είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-5 & -2 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)-(-2)=(\lambda-3)(\lambda-4).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(\lambda)$, οι οποίες είναι $\lambda_1=3$, $\lambda_2=4$. Για κάθε μια από αυτές θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνοντας το σύστημα (7.2).

Για $\lambda_1=3$:

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-3 & 2 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Το σύστημα (7.2) έχει λύση κάθε διάνυσμα του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, δηλαδή του $V(3) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:}\ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, συνεπώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμά του είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 3$. Ως γνωστό μπορούμε να θεωρήσουμε το $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, που βρίσκεται για $x_1 = 1$, ως ιδιοδιάνυσμα του A, το οποίο είναι «ένας αντιπρόσωπος» της βάσης του $V(3)$.

Για $\lambda_2 = 4$ έχουμε

$$\left(A - \lambda_2 I \right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ -1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$, είναι της μορφής $\boldsymbol{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, δηλαδή τα μη μηδενικά στοιχεία του ιδιόχωρου $V(4) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^t \ \boldsymbol{:}\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, που βρίσκεται για $x_2 = 1$.

<u>**Σχόλια υπενθύμισης**</u> **:** Σύμφωνα με το κεφάλαιο 6, αν V είναι ένας $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$ σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ αντιστοιχεί ένας πίνακας αναπαράστασης $A \in M_n(\mathbb{F})$, έτσι ώστε $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ [1]. Συνδυάζοντας τη σχέση (6. ?) και τον Ορισμό 7.1 μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες των ιδιοποσών και για μια γραμμική απεικόνιση.

Ορισμός 7.3 (ιδιοτιμή – ιδιοδιάνυσμα γραμμικής απεικόνισης)

[1] Βλέπε τα σχόλια συμβολισμού, κεφάλαιο 8, σελ. 9.

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$ και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν υπάρχει μη μηδενικό $\boldsymbol{x} \in V$ τέτοιο ώστε $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{x}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, το λ ονομάζεται ***ιδιοτιμή*** *της f και το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα* ***ιδιοδιάνυσμα*** *της f αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ.*
Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f ονομάζονται ***χαρακτηριστικά ποσά*** *ή* ***ιδιοποσά*** *(ή χαρακτηριστικά μεγέθη) της f.*

Θεωρώντας το διανυσματικό χώρο $V \equiv \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, η «γεωμετρική» ερμηνεία του ιδιοδιανύσματος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ότι ορίζει μια διεύθυνση πάνω στην οποία όταν επιδράσει η f σε διανύσματα τα οποία βρίσκονται στη διεύθυνση αυτή, το αποτέλεσμα της δράσης της είναι διάνυσμα που διατηρείται επάνω στον ίδιο φορέα, απλά είναι πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό λ, δηλαδή είναι συγγραμμικό του αρχικού διανύσματος.

Από τα παραπάνω σχόλια υπενθύμισης και τον Ορισμό 7.3 φαίνεται ότι οι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης f είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα αναπαράστασης[1] A της f. Στα επόμενα, όποτε καλούμαστε να μελετήσουμε προβλήματα που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά ποσά μιας γραμμικής απεικόνισης f, θα υπολογίζουμε τον πίνακα αναπαράστασής της ως προς οποιαδήποτε βάση και θα ασχολούμαστε με τις ιδιοτιμές του, τα δε ιδιοδιανύσματά της θα τα υπολογίζουμε από τον Ορισμό 7.3, εκτός εάν έχουμε επιλέξει τη συνήθη βάση για να υπολογίσουμε τον πίνακα αναπαράστασης[2], οπότε τα ιδιοδιανύσματα της f είναι ακριβώς αυτά του πίνακα αναπαράστασης.

Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (5x + 2y,\ -x + 2y)$, υπολογίζοντας τον πίνακα αναπαράστασής της ως προς τη συνήθη[2] (κανονική) βάση του $\mathbb{R}^2$, βρίσκουμε ότι είναι ο $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι ο πίνακας του Παραδείγματος 7.1.

Επομένως τα ιδιοποσά της f είναι αυτά του πίνακα A, δηλαδή, η γραμμική

[1] Ο πίνακας αναπαράστασης έχει σχέση με την επιλογή της βάσης στο διανυσματικό χώρο. Οι πίνακες αναπαράστασης που προκύπτουν είναι μεταξύ τους όμοιοι. Οι όμοιοι πίνακες έχουν μόνο ίδιες ιδιοτιμές, όχι ίδια ιδιοδιανύσματα (Πρόταση 7.9), γι΄ αυτό οι ιδιοτιμές είναι ίδιες.

[2] Όταν ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ο μοναδιαίος (άρα έχουμε επιλέξει την συνήθη βάση του χώρου $V \equiv \mathbb{F}^n$) τα ιδιοδιανύσματα όλων των ομοίων πινάκων είναι τα ίδια (Πρόταση 7.9).

απεικόνιση f έχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$ και $\lambda_2 = 4$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}^t$.

7.2 Βασικές ιδιότητες χαρακτηριστικών ποσών

Πρόταση 7.2 (ορίζουσα – ιδιοτιμές)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, *με* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *ιδιοτιμές*[1] *ισχύει*

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^n b_0, \tag{7.6}$$

όπου b_0, *είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στην (7.5).*

Απόδειξη Αν θέσουμε στην (7.5) $\lambda = 0$ έχουμε $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A) = b_0$, ή πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με $(-1)^n$ παίρνουμε ισοδύναμα

$$\det(A) = (-1)^n b_0 . \tag{*}$$

Επίσης από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε ότι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου σχετίζονται με τους συντελεστές τους και μάλιστα ισχύει

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^n b_0 . \tag{**}$$

Από (*) και (**) η απόδειξη είναι πλήρης. ◆◆◆

Από την προηγούμενη πρόταση καταλαβαίνουμε ότι αν κάποια ιδιοτιμή είναι $\lambda_i = 0$, τότε $\det A = 0$, οπότε από την Πρόταση 2.7 οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και βέβαια ισχύει και το αντίστροφο. Έτσι αποδεικνύεται το εξής:

Πόρισμα 7.3 (ιδιοτιμές – αντιστρέψιμος πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* ***δεν*** *έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή.*

Συνδυάζοντας την Πρόταση 7.2, το Πόρισμα 7.3 και την (7.5) καταλήγουμε στο επόμενο συμπέρασμα.

---

[1] Οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες, στην ορίζουσα υπολογίζεται κάθε ιδιοτιμή με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Πόρισμα 7.4 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο – αντιστρέψιμος πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι διάφορος του μηδενός.*

Πρόταση 7.5 (ιδιοτιμές αναστρόφου πίνακα)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, *ισχύει*

$$\sigma(A) = \sigma(A^t)$$

δηλαδή, ο ανάστροφος πίνακας A^t *έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα* A.

Απόδειξη Σύμφωνα με τις ιδιότητες $(A+B)^t = A^t + B^t$ (Πρόταση 1.2ii) και $\det(A^t) = \det A$ (Πρόταση 2.3i), για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^t μπορούμε διαδοχικά να πάρουμε τα εξής:

$$\chi_{A^t}(\lambda) = \det(\lambda I - A^t) = \det(\lambda I - A)^t = \det(\lambda I - A) = \chi_A(\lambda).$$

Συνεπώς οι δύο πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα, άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. ◆◆◆

Πρόταση 7.6 (ιδιοτιμές δυνάμεων πίνακα)

Αν λ, $\boldsymbol{x}$ *είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός* $A \in M_n(\mathbb{F})$, *τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα* A^k *είναι* λ^k *και* $\boldsymbol{x}$, *όπου* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Θεωρώντας ότι λ είναι ιδιοτιμή και $\boldsymbol{x}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, ισχύει η (7.1), $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Πολλαπλασιάζοντας την (7.1) αριστερά επί A παίρνουμε

$$A^2\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}) \overset{(7.1)}{=} \lambda(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}. \tag{*}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη (*) επί A παίρνουμε

$$A^3\boldsymbol{x} = \lambda^2(A\boldsymbol{x}) \overset{(7.1)}{=} \lambda^2(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^3\boldsymbol{x}.$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο k ισχύει $A^{k-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{k-1}\boldsymbol{x}$, πολλαπλασιάζοντας και την τελευταία σχέση αριστερά επί A έχουμε

$$A^k\boldsymbol{x} = \lambda^{k-1}(A\boldsymbol{x}) \overset{(7.1)}{=} \lambda^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^k\boldsymbol{x},$$

έτσι με επαγωγή διαπιστώνουμε το ζητούμενο, για κάθε k φυσικό αριθμό. ◆◆◆

Παράδειγμα 7.7 Έστω $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $B=A^3-4A^2+2I$, χωρίς να τον βρούμε, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2 αρκεί να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του B, οι οποίες υπολογίζονται εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.6. Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)-2\cdot 2=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda-6)$$

επομένως οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=6$.

Αν λ, $\boldsymbol{x}$ τα ιδιοποσά του A, τότε από την Πρόταση 7.6 παίρνουμε

$$B\,\boldsymbol{x}=\left(A^3-4A^2+2I\right)\boldsymbol{x}=\lambda^3\,\boldsymbol{x}-4\lambda^2\,\boldsymbol{x}+2\,\boldsymbol{x}=\left(\lambda^3-4\lambda^2+2\right)\boldsymbol{x},$$

δηλαδή $\lambda^3-4\lambda^2+2$, $\boldsymbol{x}$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα B.

Για $\lambda_1=1$, η ιδιοτιμή του B είναι $\lambda_1(B)=1^3-4\cdot 1^2+2=-1$, και όταν $\lambda_2=6$, η άλλη ιδιοτιμή του B είναι $\lambda_2(B)=6^3-4\cdot 6^2+2=74$.

Συνεπώς από την Πρόταση 7.2 έχουμε $\det B=\lambda_1(B)\cdot\lambda_2(B)=-72$. ◆◆◆

Πόρισμα 7.8 (ιδιοτιμές αντίστροφου πίνακα)

Αν λ, $\boldsymbol{x}$ είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$, τότε λ^{-k} και $\boldsymbol{x}$ είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-k}, όπου $k\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος ισχύει $A^{-1}A=I$ και επιπλέον από Πόρισμα 7.3 όλες οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda\neq 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.1), $A\,\boldsymbol{x}=\lambda\,\boldsymbol{x}$, έχουμε

$$\lambda^{-1}\,\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}(I\,\boldsymbol{x})=\lambda^{-1}\left(A^{-1}A\right)\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}A^{-1}(A\,\boldsymbol{x})\overset{(7.1)}{=}A^{-1}\left(\lambda^{-1}\lambda\,\boldsymbol{x}\right)=A^{-1}\,\boldsymbol{x}, \qquad (*)$$

δηλαδή για $k=1$ έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Επίσης από τη σχέση (*) και την Πρόταση 7.6 μπορούμε να γράψουμε για κάθε φυσικό αριθμό k,

$$A^{-k}\,\boldsymbol{x}=\left(A^{-1}\right)^k\boldsymbol{x}=\left(A^k\right)^{-1}\boldsymbol{x}\underset{(*)}{\overset{\text{Πρ. }7.6}{=}}\left(\lambda^k\right)^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-k}\,\boldsymbol{x}.$$ ◆◆◆

Για παράδειγμα, για να ελέγξουμε αν ο Ερμιτιανός πίνακας[1] $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A^{-2} και A^3, σύμφωνα με το Πόρισμα 7.3, το Πόρισμα 7.8 και την Πρόταση 7.6, χρειάζεται να βρούμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -2-2i \\ -2+2i & \lambda-1 \end{pmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5),$$

οι ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ είναι οι ιδιοτιμές του A, συνεπώς $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=5$. Συνεπώς ο πίνακας αντιστρέφεται, επειδή το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A, ο πίνακας A^{-2} έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1^{-2}=(-1)^{-2}=1$ και $\lambda_2^{-2}=5^{-2}=\dfrac{1}{25}$ (Πόρισμα 7.8), τέλος ο πίνακας A^3 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1^3=(-1)^3=-1$ και $\lambda_2^3=5^3=125$ (Πρόταση 7.6).

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.?, οι πίνακες $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε $B=P^{-1}AP$. Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται η σχέση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά ποσά δύο ομοίων πινάκων.

Πρόταση 7.9 (ιδιοποσά ομοίων πινάκων)

Οι όμοιοι πίνακες $A\in M_n(\mathbb{F})$ και $B=P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αν λ, $\mathbf{x}$ είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του A, τότε λ και $P^{-1}\mathbf{x}$ είναι τα ιδιοποσά του B.

Απόδειξη Αξιοποιώντας την ισότητα $1=\det I=\det\left(P^{-1}P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\cdot\det P$ (από τον Ορισμό 2.1c και την ιδιότητα γινόμενο οριζουσών της Πρότασης 2.3ii), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B ταυτίζεται με αυτό του A, επειδή μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda)&=\det(\lambda I-B)=\det\left(\lambda I-P^{-1}AP\right)=\det\left(\lambda P^{-1}IP-P^{-1}AP\right)\\&=\det\left(P^{-1}(\lambda I-A)P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I-A)\det P=\det\left(P^{-1}P\right)\det(\lambda I-A)\\&=\det(\lambda I-A)=\chi_A(\lambda).\end{aligned}$$

[1] Ισχύει $A=A^*$, βλέπε Ορισμό 1.2.

Συνεπώς οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, άρα τις ίδιες ιδιοτιμές.

Θεωρώντας ότι λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}$, έχουμε $A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$, την οποία πολλαπλασιάζουμε αριστερά με P^{-1} και παίρνουμε

$$P^{-1}A\,\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\,\boldsymbol{x}\,. \tag{*}$$

Πολλαπλασιάζοντας δεξιά τη σχέση ομοιότητας με $P^{-1}\,\boldsymbol{x}$ και συνδυάζοντάς τη με την (*) καταλήγουμε στο ζητούμενο διότι,

$$BP^{-1}\,\boldsymbol{x} = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}\,\boldsymbol{x} = P^{-1}A\,\boldsymbol{x} \overset{(*)}{=} \lambda P^{-1}\,\boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; B\left(P^{-1}\,\boldsymbol{x}\right) = \lambda\left(P^{-1}\,\boldsymbol{x}\right).$$ ♦♦♦

Πρόταση 7.10 (ιδιοδιανύσματα σε διακεκριμένες ιδιοτιμές)

Αν $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ *είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *του* $A \in M_n(\mathbb{F})$*, τότε αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη Αν τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε υπάρχει κάποιος δείκτης $m < r$ τέτοιος ώστε το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}_{m+1}$ να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$a_1\,\boldsymbol{x}_1 + a_2\,\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\,\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_{m+1}\,. \tag{7.7}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό (7.1) έχουμε

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{x}_i\,, \text{ με } \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}, \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{7.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριστερά επί A την (7.7) και συνδυάζοντάς τη με την (7.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_1A\boldsymbol{x}_1 + a_2A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_mA\boldsymbol{x}_m &= A\boldsymbol{x}_{m+1} \\ a_1\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\,\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\lambda_m\,\boldsymbol{x}_m &= \lambda_{m+1}\,\boldsymbol{x}_{m+1} \end{aligned} \tag{7.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (7.7) επί λ_{m+1} και αφαιρώντας τη από την (7.9) καταλήγουμε

$$a_1\left(\lambda_1 - \lambda_{m+1}\right)\boldsymbol{x}_1 + a_2\left(\lambda_2 - \lambda_{m+1}\right)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\left(\lambda_m - \lambda_{m+1}\right)\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}\,.$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές $a_1\left(\lambda_1 - \lambda_{m+1}\right) = a_2\left(\lambda_2 - \lambda_{m+1}\right) = \ldots = a_m\left(\lambda_m - \lambda_{m+1}\right) = 0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα $\lambda_{m+1} \neq \lambda_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, επομένως οι συντελεστές $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, με αντικατάσταση αυτών των συντελεστών στην (7.7), συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{x}_{m+1} = \mathbf{0}$, το οποίο είναι αδύνατο, διότι είναι ιδιοδιάνυσμα. Επομένως δεν μπορεί τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ να είναι γραμμικά εξαρτημένα, πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. ◆◆◆

Πρόταση 7.11 (ιδιοτιμές Ερμιτιανού πίνακα)

Οι ιδιοτιμές Ερμιτιανού (ή συμμετρικού) πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

Απόδειξη Έστω ότι ο Ερμιτιανός πίνακας

$$A = A^* \tag{*}$$

έχει το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}$ αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ, δηλαδή ισχύει η (7.1), $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Εφαρμόζοντας αναστροφοσυζυγία στην (7.1) έχουμε

$$\boldsymbol{x}^* A^* = \left(A\boldsymbol{x}\right)^* = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*. \tag{7.10}$$

Στην (7.10) αντικαθιστούμε την (*) και στη συνέχεια την πολλαπλασιάζουμε από δεξιά επί $\boldsymbol{x}$, οπότε καταλήγουμε στην

$$\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}^*\lambda\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, η τελευταία ισότητα δίνει $\lambda = \bar{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μια επιπλέον ιδιοτιμή $\mu \neq \lambda$ του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, οπότε

$$A\boldsymbol{y} = \mu\,\boldsymbol{y}. \tag{7.11}$$

Όμως χρησιμοποιώντας τις (*), (7.10) και (7.11), καθώς και το προηγούμενο αποτέλεσμα $\lambda = \bar{\lambda}$, οδηγούμαστε στην επόμενη ισότητα

$$0 \overset{(*)}{=} \boldsymbol{x}^*\left(A^* - A\right)\boldsymbol{y} \underset{(7.11)}{\overset{(7.10)}{=}} \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} - \mu\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} = \left(\lambda - \mu\right)\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}.$$

Επειδή υποθέσαμε $\mu \neq \lambda$, και τα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ είναι προφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν, άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα. ◆◆◆

Πρόταση 7.12 (ιδιοτιμές αντιερμιτιανού πίνακα)

Οι ιδιοτιμές αντιερμιτιανού (ή αντισυμμετρικού) πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

Απόδειξη Έστω ότι για τον αντιερμιτιανό πίνακα

$$-A = A^* \qquad (*)$$

ισχύει η (7.1), δηλαδή $A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$. Η αναστροφοσυζυγία της (7.1) και η (*) δίνουν την

$$-\boldsymbol{x}^* A = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^* . \qquad (**)$$

Πολλαπλασιάζουμε από δεξιά επί $\boldsymbol{x}$ την (**), οπότε καταλήγουμε στην

$$-\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} \overset{(7.1)}{\Leftrightarrow} -\boldsymbol{x}^*\lambda\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \left(\lambda + \bar{\lambda}\right)\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = 0 .$$

Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, η τελευταία ισότητα δίνει $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, δηλαδή ο πίνακας A έχει φανταστικούς αριθμούς ως ιδιοτιμές.

Θεωρούμε μια επιπλέον ιδιοτιμή $\mu \neq \lambda$ του A, όπως στην (7.11).

Από την (*), (**) και (7.11) έχουμε

$$0 = \boldsymbol{x}^*\left(A^* + A\right)\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{y} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} + \mu\,\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} = \left(\bar{\lambda} + \mu\right)\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} . \qquad (***)$$

Από το πρώτο στάδιο της απόδειξης, οι ιδιοτιμές είναι φανταστικοί αριθμοί, οπότε $\mu \neq \lambda = -\bar{\lambda} \Rightarrow \mu + \bar{\lambda} \neq 0$, ακόμη τα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, επομένως από την (***) έχουμε $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y} = 0$, άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα. ♦♦♦

Παράδειγμα 7.13 Ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός, (επειδή ισχύει $-A = A^t$). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές[1], οπότε έχει τρεις ρίζες[2], που σύμφωνα με την Πρόταση 7.12 πρέπει να είναι φανταστικοί αριθμοί. Συνεπώς, οι δύο ιδιοτιμές του A θα έχουν συζυγείς τιμές και η τρίτη είναι το μηδέν. Πράγματι, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

[1] Θεώρημα άλγεβρας «Μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές αν έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό z_0, τότε έχει ρίζα και τον συζυγή του $\bar{z}_0$».

[2] Θεμελιώδες θεώρημα άλγεβρας «Ένα πολυώνυμο n βαθμού έχει ακριβώς n το πλήθος ρίζες στο $\mathbb{C}$».

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda & -2 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ -1 & 2 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^3+9\lambda=\lambda(\lambda+3i)(\lambda-3i)=0.$$

Άρα, ο A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$ και $\lambda_3=0$, οπότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα.

Το ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_1=3i$ υπολογίζεται από τη λύση του ομογενούς συστήματος (7.2), συγκεκριμένα του $(A-3iI)\,\boldsymbol{x_1}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3i & 2 & -1\\ -2 & -3i & 2\\ 1 & -2 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Στον πίνακα του συστήματος κάνοντας τις γραμμοπράξεις $r_3\leftrightarrow r_1$, $r_2\to 2r_1+r_2$, $r_3\to 3ir_1+r_3$, βρίσκουμε $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3i\\ 0 & -4-3i & 2-6i\\ 0 & 2-6i & 8\end{pmatrix}$ και συνεχίζοντας με $r_2\leftrightarrow r_3$, $r_2\to\dfrac{1}{2-6i}r_2$, $r_3\to\dfrac{1}{-4-3i}r_3$, $r_3\to -r_2+r_3$ καταλήγουμε στον πίνακα $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3i\\ 0 & 1 & 8/(2-6i)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Οπότε ο ιδιόχωρος υπολογίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned}x_1-2x_2-3ix_3&=0\\ x_2+\frac{8}{2-6i}x_3&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{1+3i}{1-3i}x_3\\ x_2&=-\frac{4}{1-3i}x_3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}(1+3i)/(1-3i)\\ -4/(1-3i)\\ 1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{C},$$

ο οποίος έχει ως βάση το διάνυσμα $\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix}1+3i\\ -4\\ 1-3i\end{pmatrix}$, που βρίσκεται για $x_3=1-3i$.

Όμοια υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_2=-3i$ και είναι το $\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}1-3i\\ -4\\ 1+3i\end{pmatrix}$.

Τέλος, για $\lambda_3=0$ το ομογενές σύστημα είναι $A\boldsymbol{x_3}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, στον πίνακα του οποίου αν εφαρμόσουμε τις γραμμοπράξεις $r_3 \leftrightarrow r_1$, $r_2 \to 2r_1 + r_2$, $r_3 \to \frac{1}{2}r_2 + r_3$ παίρνουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Οπότε ο ιδιόχωρος $V(0)$ είναι η λύση του συστήματος

$\left.\begin{matrix} x_1 - 2x_2 \quad = 0 \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{matrix}\right\}$, δηλαδή είναι όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$. Μπορούμε για $x_2 = 1$, να επιλέξουμε ως ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της $\lambda_3 = 0$ το $\boldsymbol{x_3} = (2 \quad 1 \quad 2)^t$.

Τα εσωτερικά γινόμενα $\boldsymbol{x_1} \circ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_1} \circ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{x}_3 = 0$, το αποτέλεσμα αποδεικνύει την καθετότητα των ιδιοχώρων και επαληθεύει την Πρόταση 7.12.

Μπορούμε επίσης να απαντήσουμε ότι ο πραγματικός αντισυμμετρικός 3×3 πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, επειδή εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.4 ή το Πόρισμα 7.3 έχουμε $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$, και γενικά μπορούμε να έχουμε το επόμενο συμπέρασμα. ◆◆◆

Πόρισμα 7.14 (πραγματικοί αντισυμμετρικοί πίνακες)

*Κάθε πραγματικός αντισυμμετρικός πίνακας τύπου $(2n+1)\times(2n+1)$ έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή και **δεν** είναι αντιστρέψιμος.*

Πρόταση 7.15 (ιδιοτιμές ορθομοναδιαίου πίνακα)

Οι ιδιοτιμές ορθομοναδιαίου[1] (ή ορθογώνιου[2]) πίνακα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.

Απόδειξη Έστω ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$,

---

[1] Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθομοναδιαίος**(unitary), όταν ισχύει $UU^* = U^*U = I$

[2] Ένας **ορθογώνιος** πίνακας είναι ορθομοναδιαίος πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, άρα ισχύει $UU^t = U^tU = I$.

$$A^* A = AA^* = I \qquad (*)$$

για τον οποίο ισχύει η (7.1), δηλαδή $A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$. Εφαρμόζοντας αναστροφοσυζυγία στην (7.1) έχουμε

$$\boldsymbol{x}^*\,A^* = \left(A\,\boldsymbol{x}\right)^* = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*. \qquad (**)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τη (**) από δεξιά επί $A\boldsymbol{x}$ και αντικαθιστούμε σε αυτήν την (*), οπότε παίρνουμε

$$\boldsymbol{x}^*\,A^*A\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\left(A\,\boldsymbol{x}\right) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}^*\,I\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\,\lambda\,\boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; \left(1-\lambda\bar{\lambda}\right)\boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{x} = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, από την τελευταία ισότητα παίρνουμε $\lambda\bar{\lambda} = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Θεωρούμε μια επιπλέον ιδιοτιμή $\mu \neq \lambda$ του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, οπότε ισχύει η (7.11), δηλαδή $A\,\boldsymbol{y} = \mu\,\boldsymbol{y}$.

Όμως χρησιμοποιώντας την (*), (**) και (7.11) καταλήγουμε στην ισότητα

$$0 = \boldsymbol{x}^*\left(I - A^*A\right)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{y} - \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\,A\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{y} - \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}^*\,\mu\,\boldsymbol{y} = \left(1-\bar{\lambda}\mu\right)\boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{y}, \qquad (***)$$

από την οποία αν θεωρήσουμε ότι ισχύει $1-\bar{\lambda}\mu = 0$, πολλαπλασιάζοντας επί λ, εξαιτίας $|\lambda| = 1$, προκύπτει $\lambda = \lambda\bar{\lambda}\mu \;\Leftrightarrow\; \lambda = |\lambda|^2\,\mu \;\Leftrightarrow\; \lambda = \mu$, το οποίο είναι αδύνατο, αφού υποθέσαμε $\mu \neq \lambda$. Επομένως στην (***) απομένει $\boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{y} = 0$, που σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ είναι κάθετα. ◆◆◆

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ονομάζεται **κανονικός πίνακας** (normal matrix) αν ισχύει

$$AA^* = A^*A. \qquad (7.12)$$

Είναι φανερό από την (7.12) ότι ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A^* είναι κανονικός. Συνδυάζοντας τους ορισμούς των Ερμιτιανών, συμμετρικών, αντιερμιτιανών, αντισυμμετρικών, ορθομοναδιαίων, ορθογωνίων με τον (7.12), είναι φανερό ότι οι πίνακες αυτοί είναι κανονικοί.

Πρόταση 7.16 (ιδιοτιμές κανονικού πίνακα)

Για κάθε κανονικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύει*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A^*\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x},$$

δηλαδή, οι κανονικοί πίνακες A *και* A^* *έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα σε συζυγείς ιδιοτιμές.*

Επιπλέον, αν $\lambda = a + ib$, *τότε* $a \in \sigma\left(\dfrac{A+A^*}{2}\right)$ *και* $b \in \sigma\left(\dfrac{A-A^*}{2i}\right)$

Απόδειξη Έστω A κανονικός πίνακας, ο $A - \lambda I$ είναι επίσης κανονικός, διότι

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) &\overset{\text{Πρ.}1.2}{=} (A^* - \bar{\lambda} I)(A-\lambda I) = A^*A - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \bar{\lambda}\lambda I \\ &= AA^* - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + \lambda\bar{\lambda} I = (A-\lambda I)(A-\lambda I)^*. \end{aligned} \tag{*}$$

Από τον ορισμό της νόρμας (κεφάλαιο 5) και από την (*) έχουμε

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda I)\boldsymbol{x}\|^2 &= \left((A-\lambda I)\boldsymbol{x}\right)^*(A-\lambda I)\boldsymbol{x} \overset{\text{Πρ.}1.3\text{vi}}{=} \boldsymbol{x}^*(A-\lambda I)^*(A-\lambda I)\boldsymbol{x} \\ &\overset{(*)}{=} \boldsymbol{x}^*(A-\lambda I)(A-\lambda I)^*\boldsymbol{x} = \left((A-\lambda I)^*\boldsymbol{x}\right)^*(A-\lambda I)^*\boldsymbol{x} \\ &= \left\|(A-\lambda I)^*\boldsymbol{x}\right\|^2 .\end{aligned}$$

Αν λ μια ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, από την $A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$, η παραπάνω ισότητα των νορμών γίνεται

$$\left\|(A-\lambda I)^*\boldsymbol{x}\right\| = \left\|(A-\lambda I)\boldsymbol{x}\right\| = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $(A-\lambda I)^*\boldsymbol{x} = 0 \iff A^*\,\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\,\boldsymbol{x}$.

Αντικαθιστώντας τα $A\boldsymbol{x}$, $A^*\,\boldsymbol{x}$ και $\lambda = a + ib$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(A+A^*\right)\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}A\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}A^*\,\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\lambda\,\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\,\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\left(\lambda+\bar{\lambda}\right)\boldsymbol{x} = a\,\boldsymbol{x},$$

$$\frac{1}{2i}\left(A-A^*\right)\boldsymbol{x} = \frac{1}{2i}\lambda\,\boldsymbol{x} - \frac{1}{2i}\bar{\lambda}\,\boldsymbol{x} = \frac{1}{2i}\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)\boldsymbol{x} = b\,\boldsymbol{x},$$

δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί a και b είναι ιδιοτιμές των Ερμιτιανών πινάκων $\dfrac{1}{2}\left(A+A^*\right)$ και $\dfrac{1}{2i}\left(A-A^*\right)$ αντιστοίχως. ◆◆◆

7.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ένα βαθμωτό πολυώνυμο βαθμού k με συντελεστές από το $\mathbb{F}$,

$$p(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad \text{με} \quad a_k \neq 0 .$$

Σύμφωνα με τις πράξεις των πινάκων μπορεί να οριστεί ο πίνακας

$$p(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I \tag{7.13}$$

που ονομάζεται **πολυωνυμικός πίνακας** του A ή **πολυώνυμο του πίνακα** A.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$, επειδή $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$, τότε ο πολυωνυμικός πίνακας του A είναι

$$p(A) = A^2 - 3A - 4I = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4I = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Επειδή κάθε τετραγωνικός πίνακας αντιμετατίθενται με τον εαυτό του, οι γνωστές πράξεις των πολυωνύμων και οι ιδιότητές τους μεταφέρονται και στους πολυωνυμικούς πίνακες του ιδίου πίνακα, δηλαδή, αν θεωρήσουμε τα πολυώνυμα $p(\lambda)$ και $g(\lambda)$ οι πράξεις πολυωνύμων ορίζονται

$$p(\lambda) + g(\lambda) = f(\lambda), \qquad p(\lambda)\cdot g(\lambda) = h(\lambda),$$

$$p(\lambda) = g(\lambda)\cdot\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda), \quad \text{με βαθμό } \upsilon(\lambda) < \text{βαθμό } g(\lambda) \tag{7.14}$$

επομένως για τον πολυωνυμικό πίνακα του A θα έχουμε τις αντίστοιχες πράξεις

$$p(A) + g(A) = f(A), \qquad p(A)\cdot g(A) = h(A),$$

$$p(A) = g(A)\cdot\pi(A) + \upsilon(A), \quad \text{με δύναμη } \upsilon(A) < \text{δύναμη } g(A). \tag{7.15}$$

Για ένα βαθμωτό πολυώνυμο $p(\lambda)$ λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι **ρίζα** του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα, αν ισχύει $p(A) = \mathbb{O}$.

Το γνωστό θεώρημα της άλγεβρας[1] δεν ισχύει για έναν πολυωνυμικό πίνακα.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το βαθμωτό πολυώνυμο $p_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$, το οποίο έχει ρίζες το -3 και 1, σύμφωνα με την αντιστοιχία που υπάρχει με τα βαθμωτά πολυώνυμα και τους πολυωνυμικούς πίνακες, οι πίνακες $-3I$, I είναι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα,

[1] Θεμελιώδες θεώρημα «Κάθε πολυώνυμο k-οστού βαθμού έχει k ρίζες στο $\mathbb{C}$.»

πράγματι $p_1(-3I)=(-3I)^2+2(-3I)-3I=\mathbb{O}$, και $p_1(I)=I^2+2I-3I=\mathbb{O}$, αλλά δεν είναι μόνο αυτές οι ρίζες του πολυωνυμικού πίνακα, επειδή για τον πίνακα $X=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$, κάνοντας αντικατάσταση παίρνουμε

$$p_1(X)=X^2+2X-3I=\begin{pmatrix}9 & 0\\ -2z & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}-3I=\mathbb{O},$$

επομένως ο X είναι άλλη μία ρίζα του πολυωνυμικού πίνακα.

Το ερώτημα που τίθενται αρκετές φορές είναι, αν για κάποιον δοθέντα πίνακα A υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας που να έχει ως ρίζα τον πίνακα A και αν η απάντηση είναι θετική ποια είναι τα πολυώνυμα που έχουν αυτή την ιδιότητα;

Παράδειγμα 7.17 Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ για το βαθμωτό πολυώνυμο $p_1(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$, οι ρίζες του είναι -1, 5, επομένως οι πίνακες $-I$, $5I$ είναι ρίζες του πολυωνυμικού πίνακα, (επαληθεύσατε ότι $p_1(-I)=\mathbb{O}$ και $p_1(5I)=\mathbb{O}$), επίσης ο A είναι ρίζα του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα, αφού

$$p_1(A)=A^3-3A^2-9A-5I=\begin{pmatrix}41 & 42 & 42\\ 42 & 41 & 42\\ 42 & 42 & 41\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}-5I=\mathbb{O}.$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε το βαθμωτό πολυώνυμο $p_2(\lambda)=\lambda^2-4\lambda-5$, ο αντίστοιχος πολυωνυμικός πίνακας του A είναι

$$p_2(A)=A^2-4A-5I=\begin{pmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}-5I=\mathbb{O},$$

δηλαδή υπάρχει βαθμωτό πολυώνυμο για το οποίο ο A είναι ρίζα του αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα και μάλιστα υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια πολυώνυμα.

Όπως διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα αυτό ισχύει πάντοτε για ένα γνωστό και σημαντικό πολυώνυμο, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $p_1(\lambda)\equiv\chi_A(\lambda)$. Επίσης το ίδιο ισχύει και για το ελάχιστο πολυώνυμο του A, όπως θα διαπιστώσουμε στην επόμενη παράγραφο 7.4, εδώ είναι $p_2(\lambda) \equiv m_A(\lambda)$.

Θεώρημα 7.18 (Cayley-Hamilton)

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

$$\chi_A(A) = \mathbb{O},$$

όπου $\chi_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, δηλαδή ο πίνακας A επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Απόδειξη Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $B = adj(\lambda I - A)$ ο προσαρτημένος πίνακας του $\lambda I - A$, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3, ο B έχει τη μορφή

$$B = adj(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{21}(\lambda) & \cdots & p_{n1}(\lambda) \\ p_{12}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & & p_{n2}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{1n}(\lambda) & p_{2n}(\lambda) & \cdots & p_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

όπου $p_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ είναι βαθμωτά πολυώνυμα του λ βαθμού το πολύ $n-1$. Επομένως μπορούμε να διασπάσουμε τον B και να τον γράψουμε στη μορφή

$$B = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0, \qquad (*)$$

με $B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots, B_1, B_0 \in M_n(\mathbb{F})$. Από τον ορισμό (7.5) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A, έχουμε ότι ισχύει

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0,$$

επίσης ισχύει η σχέση $(\lambda I - A) \cdot adj(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) \cdot I_n$ από Πρόταση 2.6 ii.

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις και αντικαθιστώντας σε αυτήν την (*) προκύπτει

$$(\lambda I - A) \cdot adj(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) \cdot I_n \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A) \cdot B = \chi_A(\lambda) \cdot I_n \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$(\lambda I - A) \cdot \left(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0\right) = \left(\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0\right) I_n \quad (7.16)$$

Η (7.16) ισχύει για όλα τα $\lambda \in \mathbb{F}$, επομένως τα δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν οι αντίστοιχοι ομοβάθμιοι συντελεστές τους είναι ίσοι, έτσι καταλήγουμε

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= b_{n-1}I \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= b_{n-2}I \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ B_0 - AB_1 &= b_1 I \\ -AB_0 &= b_0 I \end{aligned} \tag{7.17}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες (7.17), την πρώτη επί A^n, τη δεύτερη επί A^{n-1}, …, την προτελευταία επί A και την τελευταία επί I και στη συνέχεια τις προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή

$$\mathbb{O} = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} \cdots + b_1 A + b_0 I \equiv \chi_A(A).$$ ◆◆◆

Το θεώρημα Cayley-Hamilton έχει αρκετές εφαρμογές τόσο στον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα,(αν υπάρχει), όσο και στην απλοποίηση πολυωνυμικών πινάκων.

Εφαρμογή 7.19 (υπολογισμός αντίστροφου)

Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει :

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}\left(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} \cdots + b_1 I\right), \tag{7.18}$$

όταν $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Απόδειξη Σύμφωνα με το Πόρισμα 7.4, επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, για το σταθερό όρο του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, όπως αυτό ορίζεται στην (7.5), $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$, ισχύει $b_0 \neq 0$, επομένως από το θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει

$$\begin{aligned} & A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I = \mathbb{O} \Leftrightarrow \\ & \left(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \cdots + b_1 I\right)A = -b_0 I \Leftrightarrow \\ & -\frac{1}{b_0}\left(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + b_{n-2}A^{n-3} + \cdots + b_1 I\right)A = I, \end{aligned}$$

και από τον Ορισμό 1.9 και τη σχέση (1.1) καταλήγουμε στη μορφή του A^{-1}. ◆◆◆

Πολλές φορές προκειμένου να υπολογίσουμε έναν πολυωνυμικό πίνακα του A, $p(A)$, και μάλιστα αρκετά μεγάλου βαθμού, χρησιμοποιούμε την (7.14) και (7.15) και στη θέση του $g(\lambda)$ αντικαθιστούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, οπότε με βάση το θεώρημα Cayley-Hamilton και την (7.15) προκύπτει

$$p(A)=\cancel{\chi_A(A)}\cdot\pi(A)+\upsilon(A) \quad\Leftrightarrow\quad p(A)=\mathbb{O}\cdot\pi(A)+\upsilon(A)=\upsilon(A).$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου $\upsilon(\lambda)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $\chi_A(\lambda)$, είναι φανερό ότι ο πολυωνυμικός πίνακας

$$p(A)=\upsilon(A) \tag{7.19}$$

είναι αρκετά πιο απλοποιημένος και «εύχρηστος» από τον αρχικό.

Παράδειγμα 7.20 Να υπολογισθεί ο πίνακας $B=3A^{2005}-6A+I$, όπου

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\3&0&-4\end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda&0\\-3&0&\lambda+4\end{pmatrix}=\lambda\cdot\det\begin{pmatrix}\lambda-1&2\\-3&\lambda+4\end{pmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda.$$

Αν θεωρήσουμε $p(\lambda)=3\lambda^{2005}-6\lambda+1$, σύμφωνα με την (7.14) υπάρχει βαθμωτό πολυώνυμο $\upsilon(\lambda)$, τέτοιο ώστε

$$p(\lambda)=\chi_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda)+\upsilon(\lambda), \quad \text{με } \upsilon(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c, \quad a,b,c\in\mathbb{R},$$

επειδή απαιτείται ο βαθμός $\upsilon(\lambda)$ < βαθμό $\chi_A(\lambda)$.

Κατά συνέπεια, για τις διάφορες ιδιοτιμές του πίνακα A από την ισότητα

$$3\lambda^{2005}-6\lambda+1=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot\pi(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$$

θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές του $\upsilon(\lambda)$. Αντικαθιστώντας διαδοχικά $\lambda=0$, $\lambda=-1$ και $\lambda=-2$ προκύπτει το σύστημα

$$c=1, \qquad a-b+c=4, \qquad 4a-2b+c=-3\cdot 2^{2005}+13,$$

το οποίο έχει μοναδική λύση $a=3-3\cdot 2^{2004}$, $b=-3\cdot 2^{2004}$ και $c=1$, και άρα

$$\upsilon(\lambda)=\left(3-3\cdot 2^{2004}\right)\lambda^2-3\cdot 2^{2004}\lambda+1,$$

επομένως από την (7.19) έχουμε

$$B = p(A) = \upsilon(A) = \left(3 - 3\cdot 2^{2004}\right)A^2 - 3\cdot 2^{2004} A + I$$

$$= \left(3 - 3\cdot 2^{2004}\right)\begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix} - 3\cdot 2^{2004}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + I$$

$$= \begin{pmatrix} 12\cdot 2^{2004} - 14 & 0 & -12\cdot 2^{2004} + 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18\cdot 2^{2004} - 27 & 0 & -18\cdot 2^{2004} + 31 \end{pmatrix}.$$

7.4 Ελάχιστο πολυώνυμο

Όπως έχουμε διαπιστώσει με το Παράδειγμα 7.17, εκτός από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που ικανοποιεί την ισότητα $\chi_A(A)=\mathbb{O}$, υπάρχουν και άλλα πολυώνυμα που έχουν ρίζα τον πίνακα A.

Ορισμός 7.4 (ελάχιστο πολυώνυμο)

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$. Το πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

a. *ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μονάδα*

b. $m_A(A)=\mathbb{O}$

c. *είναι μικροτέρου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα που έχουν τις δύο προηγούμενες ιδιότητες,*

*ονομάζεται **ελάχιστο πολυώνυμο** του πίνακα A.*

Για να προσδιορίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα A, χρειάζεται να γνωρίζουμε και ορισμένες επιπλέον ιδιότητες που αυτό ικανοποιεί, οι οποίες περιγράφονται και αποδεικνύονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.21 (ιδιότητες ελαχίστου πολυωνύμου)

i) *Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ του πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι μοναδικό.*

ii) *Για το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ του $A\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει*

$$\chi_A(\lambda)=m_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda),$$

όπου $\pi(\lambda)$ είναι το πολυώνυμο που προκύπτει από τη διαίρεση του $\chi_A(\lambda)$ με το $m_A(\lambda)$. Ισοδύναμα, το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

iii) *Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.*

Απόδειξη i) Έστω ότι εκτός από το ελάχιστο πολυώνυμο του A, $m_A(\lambda)=\lambda^k+c_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$, υπάρχει και άλλο ένα πολυώνυμο

$\mu(\lambda)=\lambda^k+d_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$ τέτοιο ώστε $\mu(A)=\mathbb{O}$. Τότε για το πολυώνυμο $\nu(\lambda)$, όπου

$\nu(\lambda)=m_A(\lambda)-\mu(\lambda)=(c_{k-1}-d_{k-1})\lambda^{k-1}+(c_{k-2}-d_{k-2})\lambda^{k-2}+\cdots+(c_1-d_1)\lambda+c_0-d_0$,

προφανώς ισχύει

$$\nu(A)=m_A(A)-\mu(A)=\mathbb{O}.$$

Επομένως, κατασκευάσαμε ένα τρίτο πολυώνυμο $\nu(\lambda)$ που ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 7.4 και είναι βαθμού $k-1$, δηλαδή μικρότερου βαθμού από αυτό που θεωρήσαμε ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$, το οποίο είναι αδύνατο.

ii) Επειδή ο βαθμός του $m_A(\lambda)$ είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, από την (7.14) υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(\lambda)$ και $\upsilon(\lambda)$ τέτοια ώστε

$$\chi_A(\lambda)=m_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda)+\upsilon(\lambda),\text{ με βαθμό } \upsilon(\lambda) < \text{βαθμό } m_A(\lambda). \qquad (*)$$

Από την (*) παίρνουμε τους αντίστοιχους πολυωνυμικούς πίνακες, στους οποίους αντικαθιστούμε $\chi_A(A)=\mathbb{O}$, από το θεώρημα 7.19, και $m_A(A)=\mathbb{O}$ από την b ιδιότητα του Ορισμού 7.4, οπότε

$$\cancel{\chi_A(A)}=\cancel{m_A(A)}\cdot\pi(A)+\upsilon(A) \Rightarrow \mathbb{O}=\upsilon(A).$$

Επιπλέον από την (*) ο βαθμός $\upsilon(\lambda)$ πρέπει να είναι μικρότερος από το βαθμό $m_A(\lambda)$, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν $\upsilon(\lambda)=0$, διότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A υποθέσαμε ότι είναι το $m_A(\lambda)$, οπότε η (*) γράφεται $\chi_A(\lambda)=m_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda)$.

iii) Από το ii είναι φανερό ότι κάθε ρίζα του $m_A(\lambda)$ είναι και ρίζα του $\chi_A(\lambda)$. Απομένει να δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή, αν θεωρήσουμε $\lambda_0\in\sigma(A)$, τότε λ_0 είναι ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$.

Υποθέτουμε ότι για τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_0 ισχύει

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\cdot\pi(\lambda)+\nu,\text{ όπου } \nu\neq 0, \qquad (**)$$

για κάποιο κατάλληλο πολυώνυμο $\pi(\lambda)$. Επειδή πρέπει να ισχύει $m_A(A)=\mathbb{O}$, έχουμε

$$\mathbb{O}=m_A(A)=(A-\lambda_0 I)\cdot\pi(A)+\nu I,$$

και από την τελευταία ισότητα προκύπτει

$$\left(A-\lambda_0 I\right)\cdot\pi\left(A\right)=-\nu I \quad \overset{\nu\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \left(A-\lambda_0 I\right)\cdot\left(-\frac{\pi\left(A\right)}{\nu}\right)=I\,.$$

Εφαρμόζοντας ορίζουσα στα δύο μέρη της τελευταίας σχέσης, επειδή υποθέσαμε $\lambda_0\in\sigma\left(A\right) \;\Rightarrow\; \det\left(A-\lambda_0 I\right)=0$, έχουμε $0=1$, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως $\nu=0$, και έτσι $m_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-\lambda_0\right)\cdot\pi\left(\lambda\right)$, οπότε λ_0 είναι ρίζα του $m_A\left(\lambda\right)$. ◆◆◆

Χρησιμοποιώντας από το Παράδειγμα 7.17 το βαθμωτό πολυώνυμο $p_2\left(\lambda\right)=\lambda^2-4\lambda-5=\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-5\right)$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 7.4, άρα αυτό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A, $p_2\left(\lambda\right)\equiv m_A\left(\lambda\right)$. Επιπλέον μπορούμε να επαληθεύσουμε την Πρόταση 7.21 iii, διότι οι ρίζες $-1,5$ του $m_A\left(\lambda\right)$ είναι ίδιες με του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A $\chi_A\left(\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda-5\right)$, διαφέρουν μόνο στην αλγεβρική πολλαπλότητα.

Από την τελευταία παρατήρηση και από την Πρόταση 7.21 συμπεραίνουμε ότι :

Πρόταση 7.22 (σχέση ή μορφή χαρακτηριστικού πολυωνύμου και ελάχιστου)

Αν για τον του πίνακα $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι*

$$\chi_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{\nu_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\lambda-\lambda_s\right)^{\nu_s},$$

τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$$m_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{k_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{k_2}\cdots\left(\lambda-\lambda_s\right)^{k_s},\ \text{όπου } 1\le k_j\le\nu_j,\ j=1,2,\ldots,s\,.$$

Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα είναι το $\chi_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-3\right)^2\left(\lambda+2\right)$, τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_1\left(\lambda\right)=\left(\lambda-3\right)\left(\lambda+2\right)$ ή $m_2\left(\lambda\right)=\left(\lambda-3\right)^2\left(\lambda+2\right)$, διότι αυτό πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει ακριβώς τις ίδιες ρίζες με αυτό. Για να επιλέξουμε τελικά, χρειάζεται να γνωρίζουμε τον A και να εξετάσουμε αν ισχύει $m_1\left(A\right)=\mathbb{O}$, οπότε τότε το ελάχιστο είναι το $m_1\left(\lambda\right)$, διαφορετικά το ελάχιστο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, μια και γι΄ αυτό ισχύει πάντοτε το θεώρημα Cayley-Hamilton, το οποίο εξασφαλίζει την δεύτερη ιδιότητα του Ορισμού 7.4.

Συμπέρασμα : Το ελάχιστο πολυώνυμο το αναζητούμε ανάμεσα στα πολυώνυμα που έχουν όλες τις ιδιοτιμές του A ως ρίζες, ικανοποιούν την ιδιότητα ii του Ορισμού 7.4 και είναι ελαχίστου βαθμού, γι΄ αυτό ξεκινούμε από τα μικρότερου βαθμού.

Παράδειγμα 7.23 Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3=(\lambda+1)^2(\lambda-3)$.

Το πολυώνυμο $m_1(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και είναι μικρότερου βαθμού. Εξετάζοντας τη δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 7.4 διαπιστώνουμε ότι

$$m_1(A)=(A+I)(A-3I)=\begin{pmatrix}2&-3&4\\4&-6&8\\6&-7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3&4\\4&-10&8\\6&-7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-4&0\\16&-8&0\\8&-4&0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O},$$

επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το ίδιο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, $m_A(\lambda)\equiv\chi_A(\lambda)$, για το οποίο ισχύει $\chi_A(A)=\mathbb{O}$ από θεώρημα 7.18.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι $\chi_B(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα είναι $m_1(\lambda)=\lambda-2$ ή $m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2$ ή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Όμως,

$$m_1(B)=B-2I=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}-2I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\neq\mathbb{O},$$

$$m_2(B)=(B-2I)^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}=\mathbb{O},$$

επομένως ελάχιστο πολυώνυμο του B είναι $m_B(\lambda)\equiv m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2=\lambda^2-4\lambda+4$.

Στην Πρόταση 7.22, αν $\nu_j = 1$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, i$, προφανώς $k_j = 1$, οπότε συμπεραίνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πόρισμα 7.24 (χαρακτηριστικό πολυωνύμου με διακεκριμένες ρίζες - ελάχιστο)
Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα.*

7.5 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 7.25 Έστω $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 7 & a & 1\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$.

i) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A.

ii) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε τη γεωμετρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Απόδειξη i) Επειδή το $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A από τον Ορισμό 7.1 για κάποιο λ ισχύει $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. Κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 7 & a-\lambda & 1\\ 6 & -6 & 2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3-\lambda-1=0\\ 7+(a-\lambda)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ a=-5\end{cases}.$$

Άρα $a=-5$.

ii) Για $a=-5$, ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix}$, και είδαμε πριν ότι το $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=2$. Ο ιδιόχωρος που περιέχει το $\boldsymbol{x}$ είναι ο $V(2)$. Από τον Ορισμό 7.2 της γεωμετρικής πολλαπλότητας ξέρουμε ότι $\dim V(2)=3-r(A-2I)$, όπου $A-2I=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$. Η τάξη του πίνακα $A-2I$ υπολογίζεται από την κλιμακωτή του μορφή, κάνοντας τις σημειούμενες γραμμοπράξεις $r_2 \to -7r_1+r_2$, $r_3 \to -6r_1+r_3$ και $r_3 \to r_3-r_2$ η κλιμακωτή μορφή είναι $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, συνεπώς $r(A-2I)=2$. Άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=2$ είναι $\dim V(2)=1$. ◆◆◆

Παράδειγμα 7.26 Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Να υπολογισθούν

i) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A

ii) οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A, η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής

iii) το ελάχιστο πολυώνυμο του A

iv) είναι αντιστρέψιμος ο A; Αν ναι, υπολογίστε τον A^{-1}.

Απόδειξη i) Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$, γι΄ αυτό το λόγο θα δίνεται το πολυώνυμο και σε παραγοντοποιημένη μορφή. Από την (7.5) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{pmatrix}=\lambda^3-7\lambda^2+15\lambda-9=(\lambda-1)(\lambda-3)^2.$$

ii) Οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(\lambda)$, οι οποίες είναι $\lambda_1=1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας 1, $\lambda_2=3$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 2. Για κάθε μια από τις ιδιοτιμές θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνοντας το σύστημα (7.2).

Για $\lambda_1=1$ έχουμε $(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, ο πίνακας του συστήματος μετά από τις διαδοχικές γραμμοπράξεις $r_1\leftrightarrow r_2$, $r_3\to r_1+r_3$ και $r_3\to r_2-r_3$ δίνει τον κλιμακωτό πίνακα $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, από τον οποίο έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_2+2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_3\\ -x_3\\ x_3\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι κάθε διάνυσμα του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$, δηλαδή του $V(1)=\left\{x_3\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}^t : x_3\in\mathbb{R}\right\}$, συνεπώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμά του είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1=1$, ως γνωστόν μπορούμε να θεωρήσουμε το $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$, που βρίσκεται για $x_3 = 1$, η δε γεωμετρική πολλαπλότητα του αντίστοιχου ιδιόχωρου είναι $\dim V(1) = 1$.

Για $\lambda_2 = 3$ έχουμε $(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ο πίνακας του συστήματος μετά από τις διαδοχικές γραμμοπράξεις $r_1 \leftrightarrow r_2$, $r_2 \to 2r_1 + r_2$ και $r_3 \to r_1 + r_3$ δίνει τον κλιμακωτό πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, από τον οποίο έχουμε τη μοναδική εξίσωση $x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα της βάσης του ιδιόχωρου

$$V(3) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \ : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $V(3)$, επειδή $\begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα συγκροτούν μία βάση του $V(3)$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως ιδιοδιανύσματα τα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Προφανώς η γεωμετρική πολλαπλότητα του αντίστοιχου ιδιόχωρου είναι $\dim V(3) = 2$.

iii) Το ελάχιστο πολυώνυμο του A, από την Πρόταση 7.22, πρέπει να αναζητηθεί ανάμεσα στα πολυώνυμα που έχουν ρίζες τις ιδιοτιμές του A, και μάλιστα με πολλαπλότητα μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής. Επομένως τα πιθανά πολυώνυμα πρέπει να έχουν ρίζα $\lambda_1 = 1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας 1, και $\lambda_2 = 3$ με πολλαπλότητα έως 2, δηλαδή είτε $m_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$, είτε το ίδιο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Επειδή οι πράξεις πινάκων δίνουν

$$m_1(A)=(A-I)(A-3I)=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&2\\1&-1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\mathbb{O},$$

επαληθεύονται οι συνθήκες του Ορισμού 7.4, επομένως $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$.

iv) Σύμφωνα με το Πόρισμα 7.4, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος διότι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι διάφορος του μηδενός, και από την Εφαρμογή 7.19, σχέση (7.18), έχουμε

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\left(A^2-7A+15I\right)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&8&8\\4&5&-4\\-4&4&13\end{pmatrix}-\frac{7}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{pmatrix}+\frac{15}{9}I=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&-6&-6\\-3&6&3\\3&-3&0\end{pmatrix}$$ ♦♦♦

Παράδειγμα 7.27 Έστω ο πίνακας $A\in M_3(\mathbb{F})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$.

i) Να εκφραστούν οι πίνακες A^{-4} και A^8 συναρτήσει των πινάκων A^2, A, I και να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές τους.

ii) Να απλοποιηθεί ο πολυωνυμικός πίνακας $B=A^{17}+2A^{15}-3A^2+2I$.

Απόδειξη i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=(\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=-1$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $\lambda_2=1$. Επειδή ο σταθερός όρος του $\chi_A(\lambda)$ είναι διάφορος του μηδενός (Πόρισμα 7.4), ο A είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς υπάρχει ο A^{-1}, τον οποίο υπολογίζουμε από την (7.18) της Εφαρμογής 7.19 και είναι

$$A^{-1}=A^2+A-I \qquad (*)$$

Η αντιστρεψιμότητα του A εξασφαλίζει την ύπαρξη του A^{-4}, ο οποίος υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας επί A^{-1} διαδοχικά την (*) και τις επόμενες δυνάμεις του

$$A^{-1}=A^2+A-I \Leftrightarrow$$

$$A^{-2}=A^{-1}\left(A^2+A-I\right)=A+I-A^{-1}\overset{(*)}{=}A+I-\left(A^2+A-I\right)=-A^2+2I \Leftrightarrow$$

$$A^{-3}=A^{-1}\left(-A^2+2I\right)=-A+2A^{-1}\overset{(*)}{=}2A^2+A-2I \Leftrightarrow$$

$$A^{-4}=A^{-1}\left(2A^2+A-2I\right)=2A+I-2A^{-1}\overset{(*)}{=}-2A^2+3I$$

οπότε $A^{-4} = -2A^2 + 3I$.

Για τον επόμενο πίνακα θεωρούμε το βαθμωτό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^8$. Αναζητούμε πολυώνυμα $\pi(\lambda)$ και $\upsilon(\lambda)$, τέτοια ώστε να ισχύει η (7.14), δηλαδή

$$p(\lambda) = \chi_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda), \text{ με βαθμό } \upsilon(\lambda) < \text{ βαθμό } \chi_A(\lambda).$$

Επειδή οι βαθμοί των πολυωνύμων, $p(\lambda)$ και $\chi_A(\lambda)$ είναι σχετικά μικροί, είναι εφικτή η διαίρεση τους, από την οποία βρίσκουμε

$\pi(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 3$ και υπόλοιπο $\upsilon(\lambda) = 4\lambda^2 - 3$. Οπότε, όπως και στην (7.19), οι αντίστοιχοι πολυωνυμικοί πίνακες δίνουν

$$A^8 = p(A) = \cancel{\chi_A(A)}\cdot\pi(A) + \upsilon(A) = \mathbb{O}\cdot\pi(A) + \upsilon(A) = \upsilon(A) = 4A^2 + 3I .$$

Οι πίνακες A^{-4}, A^8 έχουν μοναδική ιδιοτιμή τη μονάδα, διότι οι ιδιοτιμές του είναι λ_i^{-4} και λ_i^8 (Πόρισμα 7.8, Πρόταση 7.6, αντίστοιχα), συνεπώς $\lambda_1^{-4} = \dfrac{1}{\lambda_1^4} = 1$ και $\lambda_2^{-4} = \dfrac{1}{\lambda_2^4} = 1$, καθώς και $\lambda_1^8 = \lambda_2^8 = 1$.

ii) Θεωρούμε το βαθμωτό πολυώνυμο $r(\lambda) = \lambda^{17} + 2\lambda^{15} - 3\lambda^2 + 2$. Όπως και προηγούμενα, χρειαζόμαστε πολυώνυμα $\pi(\lambda)$ και $\upsilon(\lambda)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$r(\lambda) = \chi_A(\lambda)\cdot\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda), \qquad (*)$$

όπου $\upsilon(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. Επειδή η διαίρεση των πολυωνύμων, $r(\lambda)$, $\chi_A(\lambda)$ είναι κοπιαστική, υπολογίζουμε τους συντελεστές του $\upsilon(\lambda)$ αν θέσουμε στην (*) τις ιδιοτιμές, οι οποίες μηδενίζουν το $\chi_A(\lambda)$. Έτσι,

- για $\lambda = \lambda_1 = -1$, προκύπτει η εξίσωση, $a - b + c = -4$, (ε_1)
- για $\lambda = \lambda_2 = 1$, προκύπτει $a + b + c = 2$, (ε_2)

Χρειαζόμαστε ακόμη μια εξίσωση για να προσδιορίσουμε τους $a,b,c \in \mathbb{R}$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζα διπλή, $\lambda_1 = -1$, αυτή είναι και ρίζα της παραγώγου του, συνεπώς αν υπολογίσουμε την παράγωγο της (*) παίρνουμε την ισότητα

$$17\lambda^{16} + 30\lambda^{14} - 6\lambda = \chi_A'(\lambda)\cdot\pi(\lambda) + \chi_A(\lambda)\cdot\pi'(\lambda) + 2a\lambda + b,$$

στην οποία αν θέσουμε $\lambda = \lambda_1 = -1$, καταλήγουμε στην εξίσωση $-2a + b = 53$, (ε_3).

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (ε_1), (ε_2),(ε_3) είναι

$$a=-25, \qquad b=3, \qquad c=24,$$

επομένως $\upsilon(\lambda)=-25\lambda^2+3\lambda+24$, οπότε από (7.19) καταλήγουμε

$$B=r(A)=\upsilon(A)=-25A^2+3A+24I\,.$$

◆◆◆

Παράδειγμα 7.28 Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f(-2,1)=(-2,1)$, $f(1,1)=(7,7)$.

i) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f.

ii) Να βρεθεί το διάνυσμα $f(x,y)$.

iii) Είναι η f αντιστρέψιμη; Αν ναι, υπολογίστε την $f^{-1}(x,y)$.

iv) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές της απεικόνισης $f^{-3}(x,y)$ καθώς και η απεικόνιση;

Απόδειξη i) Επειδή $f(-2,1)=(-2,1)=1\cdot(-2,1)=\lambda_1\cdot(-2,1)$ και $f(1,1)=(7,7)=7\cdot(1,1)=\lambda_2\cdot(1,1)$, προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές της f είναι $\lambda_1=1$, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}_1=(-2 \quad 1)^t$, και $\lambda_2=7$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}_2=(1 \quad 1)^t$ (Ορισμός 7.3).

ii) Έστω ότι υπάρχουν $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $f(x,y)=(ax+by,\ cx+dy)$.

Από την υπόθεση προκύπτει

$$f(-2,1)=(-2a+b,\ -2c+d)=(-2,1) \quad \text{και} \quad f(1,1)=(a+b,\ c+d)=(7,7),$$

οπότε διαμορφώνονται τα συστήματα

$$\begin{aligned}-2a+b&=-2\\ a+b&=7\end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned}-2c+d&=1\\ c+d&=7\end{aligned}$$

τα οποία έχουν λύση $a=3$, $b=4$, $c=2$ και $d=5$.

Συνεπώς το διάνυσμα είναι $f(x,y)=(3x+4y,\ 2x+5y)$.

iii) Ακολουθώντας τη διαδικασία του κεφαλαίου 6, βρίσκουμε τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ και μέσω αυτού θα απαντήσουμε στα επόμενα ερωτήματα. Ο πίνακας αναπαράστασης της f είναι

$A=\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές της f είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του πίνακά της A, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-8\lambda+7=(\lambda-1)(\lambda-7)$ συνεπώς $\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2=7\neq 0$ (Πρόταση 7.2), άρα ο A είναι αντιστρέψιμος, οπότε και η f είναι αντιστρέψιμη. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 7.19, σχέση (7.18) υπολογίζεται ο αντίστροφος πίνακας

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}(A-8I)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-4\\-2&3\end{pmatrix}, \qquad (*)$$

επομένως $A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-4\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5x-4y\\-2x+3y\end{pmatrix}$, η αντίστοιχη απεικόνιση είναι

$$f^{-1}(x,y)=\frac{1}{7}(5x-4y,\ -2x+3y).$$

iv) Από το προηγούμενο ερώτημα ο A είναι αντιστρέψιμος, επομένως υπάρχει ο πίνακας A^{-3}, ο οποίος έχει ιδιοτιμές τις λ_i^{-3}, $i=1,2$ (Πρόταση 7.8), συνεπώς οι ιδιοτιμές της απεικόνισης $f^{-3}(x,y)$ είναι 1 και $\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$.

Για τον υπολογισμό του A^{-3}, όπως και στο Παράδειγμα 7.27, πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά επί A^{-1} την (*) έχουμε

$$\begin{aligned}
A^{-1}&=-\frac{1}{7}(A-8I)\Leftrightarrow\\
A^{-2}&=-\frac{1}{7}\left(I-8A^{-1}\right)\overset{(*)}{=}-\frac{1}{7}\left(I+\frac{8}{7}(A-8I)\right)=-\frac{1}{7^2}(-57I+8A)\Leftrightarrow\\
A^{-3}&=-\frac{1}{7^2}\left(-57A^{-1}+8I\right)\overset{(*)}{=}-\frac{1}{7^3}(57A-400I)=-\frac{1}{7^3}\begin{pmatrix}-229&228\\114&-115\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

οπότε η ζητούμενη γραμμική απεικόνιση έχει τύπο

$$f^{-3}(x,y)=\frac{1}{7^3}(229x-228y,\ -114x+115y).$$

◆◆◆

Εφαρμογή 7.29 i) Αποδείξατε ότι οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

ii) Να βρεθεί η διάσταση του μοναδικού ιδιοχώρου του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

iii) Αποδείξατε ότι η διάσταση του μοναδικού ιδιοχώρου του πίνακα[1]

$$J_{\lambda_1,n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & \lambda_1 & 1\\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

είναι 1.

iv) Να υπολογισθούν το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Απόδειξη i) Στην Εφαρμογή 2.1 αποδείξαμε ότι για την ορίζουσα τριγωνικού πίνακα ισχύει $\det A=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι άνω τριγωνικός, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ 0 & \lambda-a_{22} & & -a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του

$$\sigma(A)=\{a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\}.$$

ii) Επειδή ο A είναι άνω τριγωνικός πίνακας και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι 1, από το i) προκύπτει ότι η μοναδική ιδιοτιμή είναι $\lambda=1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας n, οπότε το ζητούμενο είναι η διάσταση του $V(1)$. Από τον Ορισμό 7.2 της γεωμετρικής πολλαπλότητας έχουμε ότι $\dim V(1)=n-r(A-I)$.

[1] Ο πίνακας $J_{\lambda_1,n}$ ονομάζεται **στοιχειώδης πίνακας Jordan** αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ_1, σχετικά αναφέρονται στο κεφάλαιο 8, παράγραφος 8.4, γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

Παρατηρούμε ότι $A-I=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $a=0$, τότε $r(A-I)=0$ και $\dim V(1)=n$.
- Αν $a\neq 0$, τότε $r(A-I)=n-1$ και τότε $\dim V(1)=1$.

iii) Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι φανερό ότι ο $J_{\lambda_1,n}\in M_n(\mathbb{F})$ έχει μοναδική ιδιοτιμή τη λ_1 με αλγεβρική πολλαπλότητα n. Επίσης ο πίνακας

$J_{\lambda_1,n}-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει $r\left(J_{\lambda_1,n}-\lambda_1 I\right)=n-1$, συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της μοναδικής ιδιοτιμής λ_1, δηλαδή η διάσταση του μοναδικού ιδιοχώρου $V(\lambda_1)$, είναι $\dim V(\lambda_1)=n-r\left(J_{\lambda_1,n}-\lambda_1 I\right)=n-(n-1)=1$.

iv) Ο πίνακας $\lambda I-B$ γράφεται

$$\lambda I-B=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B, χρειάζεται να κάνουμε ορισμένες γραμμοπράξεις στην ορίζουσα του πίνακα $\lambda I-B$, οι οποίες την αφήνουν αναλλοίωτη(Πρόταση 2.2 vi).

Προσθέτοντας στην πρώτη στήλη του τελευταίου πίνακα κάθε άλλη στήλη προκύπτει ο πίνακας $-\begin{pmatrix} n-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}$, οπότε

$$\det(\lambda I - B) = \det\left(-\begin{pmatrix} n-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \underset{(ii),(iv)}{\overset{\text{Πρ.2.2}}{=}} (-1)^n (n-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Στον τελευταίο πίνακα, αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη παίρνουμε

$$\det(\lambda I - B) = (-1)^n (n-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{=} (-1)^n (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1},$$

μια και ο τελευταίος πίνακας είναι τριγωνικός. Τελικά

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \lambda^{n-1}(\lambda - n),$$

άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = n$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $n-1$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο του B, πρέπει να αναζητηθεί ανάμεσα στα πολυώνυμα που έχουν ρίζες τις ιδιοτιμές του B, με πολλαπλότητα μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής (Πρόταση 7.22). Επομένως τα πιθανά πολυώνυμα πρέπει να είναι $m_r(\lambda) = \lambda^r(\lambda - n)$, όπου $1 \le r \le n-1$. Για $r = 1$ το πολυώνυμο είναι $m_1(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$ και οι πράξεις στον αντίστοιχο πολυωνυμικό πίνακα δίνουν

$$m_1(A) = B(B - nI) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-n+1\cdot(n-1) & 1-n+1\cdot(n-1) & \dots & 1-n+1\cdot(n-1) \\ 1-n+1\cdot(n-1) & 1-n+1\cdot(n-1) & \cdots & 1-n+1\cdot(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-n+1\cdot(n-1) & 1-n+1\cdot(n-1) & \cdots & 1-n+1\cdot(n-1) \end{pmatrix} = \mathbb{O},$$

επαληθεύοντας τη b. συνθήκη του Ορισμού 7.4[1] (οι άλλες συνθήκες του Ορισμού προφανώς ικανοποιούνται από το $m_1(\lambda)$), επομένως $m_B(\lambda) = \lambda(\lambda - nI)$. ◆◆◆

[1] Ο μεγιστοβάθμιος όρος έχει συντελεστή τη μονάδα και το πολυώνυμο είναι μικροτέρου δυνατού βαθμού έχοντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Εφαρμογή 7.30 i) Αν ο $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι της μορφής $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & A_k \end{pmatrix}$,

όπου $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i=1,2,\ldots,k$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, τότε

$$\chi_A(\lambda)=\chi_{A_1}(\lambda)\cdot\chi_{A_2}(\lambda)\cdots\chi_{A_k}(\lambda).$$

ii) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ -2 & -3 & a & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη i) Για $i=1,2$, ο πίνακας που δόθηκε είναι σύνθετος της μορφής $A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$, οπότε χρησιμοποιώντας σε αυτόν τα αποτελέσματα της Εφαρμογής 2.16 έχουμε ότι $\det A=\det A_1\cdot\det A_2$. Αποδεικνύεται με επαγωγή ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται και για σύνθετο πίνακα όπως αυτόν της υπόθεσης, και τότε ισχύει

$$\det A=\det A_1\cdot\det A_2\cdots\det A_k. \qquad (*)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda I_{n_1}-A_1 & & & \\ & \lambda I_{n_2}-A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda I_{n_k}-A_k \end{pmatrix}$$

και από την (*) έχουμε

$$\chi_A(\lambda)=\det\left(\lambda I_{n_1}-A_1\right)\cdot\det\left(\lambda I_{n_2}-A_2\right)\cdots\det\left(\lambda I_{n_k}-A_k\right)=\chi_{A_1}(\lambda)\cdot\chi_{A_2}(\lambda)\cdots\chi_{A_k}(\lambda).$$

ii) Θεωρώντας ότι $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, τότε $A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$, οπότε από (i) $\chi_A(\lambda)=\chi_{A_1}(\lambda)\cdot\chi_{A_2}(\lambda)$. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων A_1, A_2 ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{C})$ είναι :

$$\chi_{A_1}(\lambda)=\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 \\ 2 & \lambda+3 \end{pmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i)$$

$$\chi_{A_2}(\lambda)=\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{pmatrix}=\lambda^2+4\lambda-21=(\lambda+7)(\lambda-3)$$

Άρα $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i)(\lambda+7)(\lambda-3)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=-1+2i$, $\lambda_2=-1-2i$, $\lambda_3=-7$, $\lambda_4=3$.

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες το ελάχιστο πολυώνυμο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό (Πόρισμα 7.24), οπότε

$$m_A(\lambda)\equiv\chi_A(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+5)(\lambda^2+4\lambda-21).$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 7.31 Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i) Αν ένας 3×3 πίνακας έχει ιδιοτιμές τις $1,1,2$, τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

ii) Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $-1,1,2$, τότε $\det(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{t}}=-\frac{1}{2}$.

iii) Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A\in M_3(\mathbb{R})$ με μόνη μη μηδενική ιδιοτιμή το -2 και με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$. Οι πληροφορίες που δίνονται δεν αρκούν για να υπολογισθούν τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A.

iv) Αν ο A είναι ένας 3×3 ορθομοναδιαίος πίνακας, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t$ τέτοιο ώστε $A^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

v) Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -13 & -5\end{pmatrix}$, τότε $A^{2008}+A^{2006}+A^{2004}=I$.

Απόδειξη i) Σωστή, γιατί σύμφωνα με την Πρόταση 7.2 για έναν πίνακα A ισχύει $\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=1\cdot 1\cdot 2=2\neq 0$.

ii) Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε την αλγεβρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών $-1,2$. Γενικά για έναν $A\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

$$\det\left(A^{-1}\right)^t=\det\left(A^{-1}\right)=\underbrace{\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{-1}}_{\nu_1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1}}_{\nu_2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}}_{\nu_3}=\frac{(-1)^{\nu_1}}{2^{\nu_3}},$$

όπου $\nu_1+\nu_2+\nu_3=n$.

iii) Λάθος. Από τον τύπο του πίνακα καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν 3 ιδιοτιμές και επειδή η μόνη μη μηδενική είναι το -2, υποχρεωτικά οι άλλες είναι το μηδέν με πολλαπλότητα 2. Από την Πρόταση 7.11 γνωρίζουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα, επομένως τα ιδιοδιανύσματα

$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ που αντιστοιχούν στην $\lambda = 0$ πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = 0$, από όπου προκύπτει $-y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = y_1$.

Άρα $\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_1 \quad y_3)^t = y_1 (1 \quad 1 \quad 0)^t + y_3 (0 \quad 0 \quad 1)^t$. Συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ (διπλή ιδοτιμή) επιλέγονται να είναι $\boldsymbol{y}_1 = (1 \quad 1 \quad 0)^t$ και $\boldsymbol{y}_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^t$.

iv) Σωστή. Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε λ^2 είναι ιδιοτιμή του A^2, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}$ (Πρόταση 7.6). Επίσης ο A είναι ορθομοναδιαίος, άρα ισχύει $|\lambda| = 1$ (Πρόταση 7.15), και επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού, μία από τις ιδιοτιμές είναι πραγματική, συνεπώς για την πραγματική αυτή ιδιοτιμή ισχύει $\lambda^2 = |\lambda|^2 = 1$, οπότε $A^2 \boldsymbol{x} = \lambda^2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

v) Σωστή. Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1$ και την Πρόταση 7.18 (θεώρημα Cayley-Hamilton) προκύπτει $\chi_A(A) = \mathbb{O} \Leftrightarrow A^2 = -I$ (*). Οπότε

$$A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = (A^2)^{1004} + (A^2)^{1003} + (A^2)^{1002} \overset{(*)}{=} (-I)^{1004} + (-I)^{1003} + (-I)^{1002} = I .$$

◆◆◆

Εφαρμογή 7.32 Αν για έναν πίνακα A ισχύει $A^3 = A$, δείξτε ότι $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$.

Απόδειξη Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, ισχύει $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ (*), και σύμφωνα με την Πρόταση 7.6, λ^3 και $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοποσά του A^3, δηλαδή $A^3 \boldsymbol{x} = \lambda^3 \boldsymbol{x}$ (**). Πολλαπλασιάζοντας τη δοσμένη σχέση δεξιά επί $\boldsymbol{x}$ και κάνοντας αντικατάσταση με τις (*) και (**) παίρνουμε

$$A^3 = A \Rightarrow A^3 \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \Rightarrow \lambda^3 x = \lambda x \Rightarrow (\lambda^3 - \lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

από όπου είναι φανερό ότι $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$, άρα $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$. ◆◆◆

Εφαρμογή 7.33 (μηδενοδύναμος πίνακας)

Αν ο πίνακας A είναι **μηδενοδύναμος**[1], δείξτε ότι $\sigma(A)=\{0\}$.

Απόδειξη Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, αν λ είναι ιδιοτιμή του A και $\boldsymbol{x}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, τότε $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. Επιπλέον ισχύει και η Πρόταση 7.6, οπότε λ^k και $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοποσά του A^k, δηλαδή, $A^k\boldsymbol{x}=\lambda^k\boldsymbol{x}$. Συνδυάζοντας την προηγούμενη σχέση και την ιδιότητα του μηδενοδύναμου πίνακα έχουμε

$$\mathbf{0}=A^k\boldsymbol{x}=\lambda^k\boldsymbol{x}$$

από όπου προκύπτει ότι $\lambda^k=0 \ \Rightarrow\ \lambda=0$. ◆◆◆

Εφαρμογή 7.34 (συνοδεύων πίνακας)

Σε κάθε πολυώνυμο $c(\lambda)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$, $c_i\in\mathbb{F}$, αντιστοιχεί ένας πίνακας[2]

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Αποδείξατε ότι:

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $C\in M_n(\mathbb{F})$ είναι το $c(\lambda)$.

ii) Το ελάχιστο πολυώνυμο του $C\in M_n(\mathbb{F})$ είναι το $c(\lambda)$.

iii) Αν η λ_i ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 (απλή), τότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1}\end{pmatrix}^t$, $i=1,2,\ldots,n$.

Απόδειξη i) Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του C είναι

$$\chi_C(\lambda)=\det(\lambda I-C)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda & -1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & \lambda+c_{n-1} \end{vmatrix},$$

---

[1] Ένας τετραγωνικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται ***μηδενοδύναμος*** (nilpotent), όταν υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός k, τέτοιος ώστε $A^k=\mathbb{O}$.

[2] Ο πίνακας C ονομάζεται **συνοδός** ή **συνοδεύων πίνακας** (companion matrix) του $c(\lambda)$.

πολλαπλασιάζοντας τη 2η στήλη επί λ, την 3η στήλη επί λ^2, … και την τελευταία στήλη επί λ^{n-1} και προσθέτοντας όλες στην 1η στήλη προκύπτει

$$\chi_C(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \lambda & -1 \\ c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n & c_1 & \cdots & c_{n-2} & \lambda+c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την 1η στήλη και στη συνέχεια την ορίζουσα του $(n-1)\times(n-1)$ κάτω τριγωνικού πίνακα που απομένει , έχουμε

$$\chi_C(\lambda)=(-1)^{n+1}\left(c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n\right)\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}c(\lambda)(-1)^{n-1}=c(\lambda).$$

ii) Ας υποθέσουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του C είναι μικροτέρου βαθμού από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω $m_C(\lambda)=a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, με $a_{n-1}\neq 0$. Το $m_C(\lambda)$ θα πρέπει να επαληθεύει το b του Ορισμού 7.4, συνεπώς

$$m_C(C)=\mathbb{O} \Leftrightarrow a_{n-1}C^{n-1}+a_{n-2}C^{n-2}+\cdots+a_1C+a_0I=\mathbb{O}. \qquad (*)$$

Θεωρώντας τα διανύσματα

$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0\quad 1\quad 0\quad \cdots\quad 0)$, …, $\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 1)$

και κάνοντας πράξεις με τον C διαπιστώνουμε τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1C,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_2C=\boldsymbol{\varepsilon}_1C^2,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_3C=\boldsymbol{\varepsilon}_2C^2=\boldsymbol{\varepsilon}_1C^3,\ \ldots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{\varepsilon}_1C^{n-1} \qquad (**)$$

Πολλαπλασιάζοντας (αριστερά) επί $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ την (*) και κάνοντας αντικατάσταση από (**) προκύπτει

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1\left(a_{n-1}C^{n-1}+a_{n-2}C^{n-2}+\cdots+a_1C+a_0I\right)=\mathbf{0} \Rightarrow a_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n+a_{n-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_0\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathbf{0}.$$

Επειδή τα $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι $a_{n-1}=a_{n-2}=\ldots=a_1=a_0=0$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο που υποθέσαμε είναι το μηδενικό πολυώνυμο (όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν), $m_C(\lambda)=0$, το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι n βαθμού πολυώνυμο, δηλαδή $m_C(\lambda)\equiv\chi_C(\lambda)$.

iii) Επειδή λ_i είναι ρίζα του $\chi_C(\lambda) \equiv c(\lambda)$ ισχύει

$$c(\lambda_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_i^n = -c_{n-1}\lambda_i^{n-1} - \cdots - c_1\lambda_i - c_0 . \qquad (***)$$

Προφανώς το $\boldsymbol{x}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και κάνοντας πράξεις έχουμε

$$C\,\boldsymbol{x} = C\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \vdots \\ -c_0 - c_1\lambda_i - \cdots - c_{n-1}\lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} \overset{(***)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \vdots \\ \lambda_i^n \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda_i\,\boldsymbol{x},$$

από όπου επαληθεύεται ο Ορισμός 7.1, συνεπώς το $\boldsymbol{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της απλής ιδιοτιμής λ_i για τον πίνακα C. ◆◆◆