ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ –

Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Έστω $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

   i) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ με

   $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 8x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2 \ ,$$

   ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.

   ii) Να βρείτε τον πίνακα του εσωτερικού γινομένου, που ορίστηκε στο ερώτημα (i).

2. Έστω $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

   i) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ με

   $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 ,$$

   ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

   ii) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $U^{\perp}$ του υποχώρου $U = span(\boldsymbol{u})$, με $\boldsymbol{u} = (1,1,-1)$, ως προς το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$ του ερωτήματος (i).

3. Έστω $\mathbf{u}_1 = (1,2,3),\ \mathbf{u}_2 = (0,2,3)$ και U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

   i) Βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(1,1,a) \in U$. Για τις τιμές αυτές να παραστήσετε το $(1,1,a)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

   ii) Έστω $U^{/}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $(1,0,0), (1,6,9)$. Να αποδείξετε ότι $U = U^{/}$.

4. Εξετάστε ποια από τα σύνολα $U_1 = \left\{(x, y, x^2) : \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$,

   $U_2 = \left\{(x, y, x-1) : \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $\quad U_3 = \left\{(2x + y, x - y, x + y) : \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$

   είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο από τα παραπάνω είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

5. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,-1)$ ενός υποχώρου V του χώρου $\mathbb{R}^3$.

   i) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\boldsymbol{w} = (2,1,-1)$ ανήκει στο χώρο V .

   ii) Να υπολογίσετε μία βάση του V .

   iii) Αφού πρώτα εξετάσετε την ορθογωνιότητα των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, στη συνέχεια να υπολογίσετε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, που να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$.

   iv) Να υπολογίσετε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του V, $V^{\perp}$, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

6. Έστω ότι ο υπόχωρος $U \subseteq \mathbb{R}^3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,2,3),\ \boldsymbol{u}_3 = (0,1,1) \text{ και } \boldsymbol{u}_4 = (2,2,5)$$

   Να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση για τον U ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, ακολουθώντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt.

7. i) Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ η σχέση:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 10 x_2 y_2 + 4 x_3 y_3$$

   ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

   ii) Θεωρώντας το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο U που παράγεται από τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,2,3),\ \boldsymbol{u}_3 = (2,2,5),$$

   ακολουθώντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης 4;

8. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Να αποδείξετε την ισοδυναμία :

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle = 0$$

9. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$(a_1 + a_2 \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2).$$

10. Έστω $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ διανύσματα ενός Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \,,\, \rangle$ και $\dim V = n$. Να αποδείξετε ότι ***η ορίζουσα του Gram*** $\det G = 0$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, όπου

$$G = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_k \rangle \\ \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k \rangle \end{pmatrix}.$$

11. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου $U = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ του $\mathbb{R}^4$, όπου $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,5,-3,-2)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (-3,-3,5,-7)$.

12. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου $U = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ του $\mathbb{C}^3$, όπου $\boldsymbol{v}_1 = (1, i, 0)$ και $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1-i)$.

13. Στον ορθομοναδιαίο χώρο $\mathbb{C}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, να βρείτε μία ορθογώνια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $U^{\perp}$ του υποχώρου $U = span(\boldsymbol{u})$, όπου $\boldsymbol{u} = (1, i, 1+i)$.

14. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $U^{\perp}$ του υποχώρου
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0, \ y - z = 0\}.$$

15. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, να βρείτε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{v} = (1, -1, 2)$ πάνω στον υπόχωρο $U = span(\boldsymbol{u}_1)$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (0,1,1)$.

16. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, να βρείτε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{v} = (1,3,5,7)$ πάνω σε καθένα από τους υποχώρους U_1, U_2 :

    i) $U_1 = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-3,4,-2)$,

    ii) $U_2 = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3)$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,2,3,2)$.

17. Για ποιες τιμές των παραμέτρων $a, b, c, z, w \in \mathbb{R}$, ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & a \\ b & 1/3 & c \\ z & w & 1/3 \end{pmatrix}$$
είναι ορθογώνιος ;

18. Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας A με πρώτη γραμμή $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{6}(4 \quad 2 \quad 4)$.

19. Να προσδιορίσετε το σύνολο των ορθογωνίων 2×2 πινάκων.

20. Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι όμοιος με τον ορθομοναδιαίο πίνακα $B \in M_n(\mathbb{F})$, να αποδείξετε ότι οι πίνακες A^{-1} και A^* είναι όμοιοι.

21. Να βρείτε την QR παραγοντοποίηση των πινάκων A, B, όπου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$