Κεφάλαιο 5
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Στη Γραμμική Άλγεβρα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για μελέτη έχει μία ειδική κατηγορία απεικονίσεων (συναρτήσεων), οι γραμμικές απεικονίσεις. Οι απεικονίσεις αυτές έχουν πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών διανυσματικούς χώρους και διατηρούν τις βασικές πράξεις των διανυσματικών χώρων.

5.1 Γραμμική απεικόνιση
5.1.1 Ορισμός και παραδείγματα γραμμικής απεικόνισης

Υπενθυμίζεται ότι ακολούθως με $\mathbb{F}$ συμβολίζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Ορισμός 5.1
*Έστω U, V δύο $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f: U \to V$ ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** αν για κάθε $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, $a \in \mathbb{F}$, ισχύουν οι ιδιότητες:*

a. $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1) + f(\boldsymbol{u}_2)$

b. $f(a\boldsymbol{u}_1) = af(\boldsymbol{u}_1)$.

Παρατήρηση 5.1 i) Στον Ορισμό 6.1, το σύμβολο + στο πρώτο μέλος της (a) είναι η πράξη της πρόσθεσης στο διανυσματικό χώρο *U*, ενώ το + στο δεύτερο μέλος είναι η πράξη της πρόσθεσης στο διανυσματικό χώρο *V*. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, που σημειώνεται στην ιδιότητα (b).

ii) Το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου *U* συμβολίζεται $\mathbf{0}_U$ και γενικά είναι διαφορετικό από το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου *V*, που συμβολίζεται $\mathbf{0}_V$.

Για μία γραμμική απεικόνιση $f: U \to V$ αποδεικνύεται ότι ισχύει $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$. Πράγματι, επειδή η f είναι γραμμική, στην ιδιότητα (b) του Ορισμού 5.1, θέτουμε $a = 0$, οπότε έχουμε : $f(\mathbf{0}_U) = f(0 \cdot \mathbf{0}_U) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

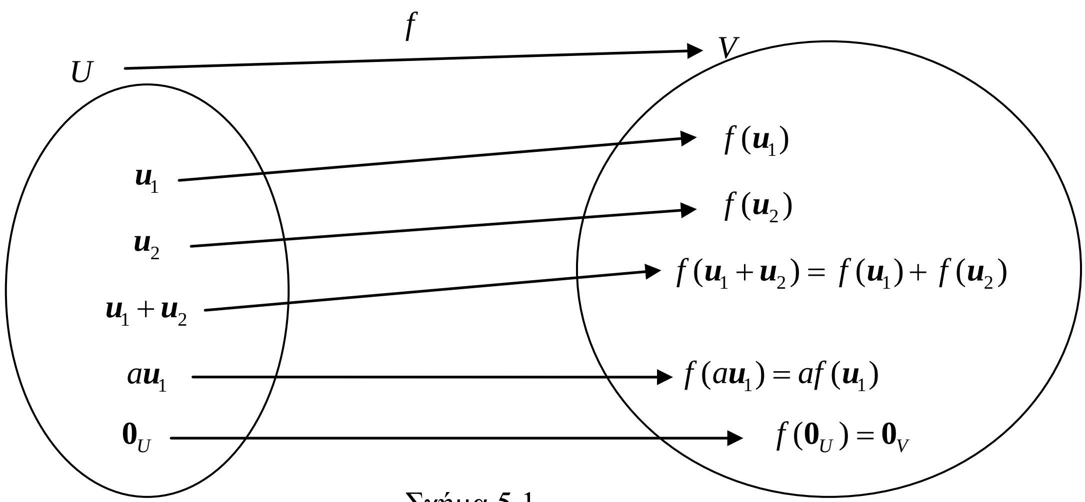
iii) Για μία γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ ισχύει $f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$, για κάθε $\boldsymbol{u} \in U$, αρκεί να θέσουμε $a = -1$ στην ιδιότητα (b) του Ορισμού 5.1.

iv) Οι ιδιότητες (a) και (b) του Ορισμού 5.1 μπορούν να ενοποιηθούν σε μία ιδιότητα ως εξής:

$$f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) \text{ για κάθε } a,b \in \mathbb{F},\ \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U. \qquad (5.1)$$

Πράγματι, αν στην ισότητα της (5.1) θέσουμε $a = b = 1$, προκύπτει η ιδιότητα (a) του Ορισμού 5.1, ενώ αν θέσουμε $b = 0$, προκύπτει η ιδιότητα (b). Επομένως, η ισότητα στην (5.1) είναι ισοδύναμη των δύο ιδιοτήτων του Ορισμού 5.1.

Ουσιαστικά, μία γραμμική απεικόνιση από το διανυσματικό χώρο *U* στο διανυσματικό χώρο *V* δεν είναι τίποτα άλλο από μία απεικόνιση (συνάρτηση), η οποία σε κάθε στοιχείο-διάνυσμα του *U* αντιστοιχεί (απεικονίζει) ένα και μόνο ένα στοιχείο-διάνυσμα του *V*. Για να χαρακτηρισθεί η απεικόνιση γραμμική, θα πρέπει να «διατηρεί» τις δύο βασικές πράξεις-πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Δηλαδή, είτε εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων στο πεδίο ορισμού και στη συνέχεια προσδιορίζουμε την εικόνα του στο σύνολο τιμών μέσω της απεικόνισης είτε θεωρούμε πρώτα τις εικόνες των προτύπων μέσω της απεικόνισης και κατόπιν εκτελούμε τις αντίστοιχες πράξεις στο σύνολο τιμών. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και για τις δύο περιπτώσεις, γεγονός που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1

Παράδειγμα 5.1

i) Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x$ είναι γραμμική. Πράγματι, οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 5.1 επαληθεύονται, διότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{R}$, ισχύουν

$$f(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)=2x_1+2x_2=f(x_1)+f(x_2)$$

$$f(ax_1)=2(ax_1)=a(2x_1)=af(x_1).$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax$ είναι γραμμική.

ii) Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x+1$ ***δεν*** είναι γραμμική. Πράγματι, για $a=3$, $f(3\cdot 1)\neq 3f(1)$, επειδή $f(3)=2\cdot 3+1\neq 3f(1)=3(2\cdot 1+1)$, από όπου είναι φανερό ότι δεν ισχύει η ιδιότητα (b) του Ορισμού 5.1.

Θέτοντας $a=0$, $b=1$ στην (5.1) έχουμε $f(\mathbf{0}_U)=\mathbf{0}_V$, (βλέπε και Παρατήρηση 5.1 (ii)). Δηλαδή μία γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου του πεδίου ορισμού στο μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου του συνόλου τιμών. Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η δοσμένη f δεν είναι γραμμική, διότι $f(0)=1\neq 0$.

iii) Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=\left(2x-3y,x+4y\right)$ είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $\boldsymbol{u}_1=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{u}_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ και $a\in\mathbb{R}$. Κάνοντας πράξεις, όπως ορίστηκαν στις (4.1) και (4.2), έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\quad f(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) &= f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=f(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\\
&=(2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)+4(y_1+y_2))\\
&=((2x_1-3y_1)+(2x_2-3y_2),\ (x_1+4y_1)+(x_2+4y_2))\\
&=(2x_1-3y_1,\ x_1+4y_1)+(2x_2-3y_2,x_2+4y_2)\\
&=f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)=f(\boldsymbol{u}_1)+f(\boldsymbol{u}_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\quad f(a\boldsymbol{u}_1) &= f(a(x_1,y_1))=f(ax_1,ay_1)\\
&=(2ax_1-3ay_1,ax_1+4ay_1)=a(2x_1-3y_1,x_1+4y_1)\\
&=af(x_1,y_1)=af(\boldsymbol{u}_1)
\end{aligned}
$$

Οι ισότητες στις (a) και (b) επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 5.1. Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

iv) Με ανάλογο τρόπο όπως στο (iii) αποδεικνύεται ότι κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, με $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ και $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, είναι γραμμική.

v) Εύκολα επαληθεύεται ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x,y,z)=(2x+3y,x+4y-z)$, είναι γραμμική.

vi) Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z)=(2x+3y+1,x+4y-z)$, ***δεν*** είναι γραμμική. Πράγματι, έχουμε $f(0,0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

vii) Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Η απεικόνιση $c_A: M_{n\times1}(\mathbb{F})\to M_{m\times1}(\mathbb{F})$ με $c_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ είναι γραμμική, διότι για κάθε $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in M_{n\times1}(\mathbb{F})$, $a\in\mathbb{F}$, σύμφωνα με τις ιδιότητες των πράξεων πινάκων ισχύουν οι σχέσεις:

(a) $c_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=c_A(\boldsymbol{x})+c_A(\boldsymbol{y})$ και

(b) $c_A(a\boldsymbol{x})=A(a\boldsymbol{x})=a(A\boldsymbol{x})=ac_A(\boldsymbol{x})$

Οι ισότητες στις (a) και (b) επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 5.1. Άρα, η c_A είναι γραμμική απεικόνιση.

viii) Έστω ότι $A\in M_n(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση $f: M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ με $f(X)=AX$ είναι γραμμική, διότι για κάθε $X,Y\in M_n(\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των πράξεων πινάκων ισχύουν οι σχέσεις:

(a) $f(X+Y)=A(X+Y)=AX+AY=f(X)+f(Y)$ και

(b) $af(X)=a(AX)=A(aX)=f(aX)$

Οι ισότητες στις (a) και (b) επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 5.1. Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

ix) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραγώγων, διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $\Phi:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ με $\Phi(p(x))=(p(x))^{/}$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο, είναι γραμμική.

x) Αν V είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος, η ***ταυτοτική*** απεικόνιση $1_V:V\to V$ με $1_V(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$, εύκολα επαληθεύεται ότι είναι γραμμική. ◆◆◆

5.1.2 Πυρήνας και εικόνα μίας γραμμικής απεικόνισης

Στη συνέχεια ορίζονται δύο υποσύνολα των διανυσματικών χώρων U,V, αντίστοιχα, τα οποία είναι αρκετά σημαντικά στη μελέτη μίας γραμμικής απεικόνισης $f:U\to V$.

Ορισμός 5.2

Έστω U, V δύο $\mathbb{F}-$ *διανυσματικοί χώροι και* $f: U \to V$ *μία γραμμική απεικόνιση.*

i) *Το σύνολο* $\{\boldsymbol{u} \in U: \ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_V\}$ *ονομάζεται* ***πυρήνας*** *της* f *και συμβολίζεται με* $\ker f$.

ii) *Το σύνολο τιμών της* f, $f(U) = \{\boldsymbol{v} \in V: \ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{u} \in U\}$, *ονομάζεται* ***εικόνα*** *της* f *και συμβολίζεται με* Imf .

Παρατήρηση 5.2. i) Επειδή η απεικόνιση $f: U \to V$ είναι γραμμική, τα σύνολα $\ker f$ και Imf είναι υπόχωροι των διανυσματικών χώρων *U* και *V*, αντίστοιχα. Η απόδειξη βασίζεται στις ιδιότητες των στοιχείων κάθε συνόλου (Ορισμός 5.2) και στην γραμμικότητα της f, όπως αυτή περιγράφεται από την ισότητα στην (5.1), προκειμένου να επαληθευθεί η ορθότητα της Πρότασης 4.5.

• Για τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης ισχύει:

Έστω $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \ker f \Rightarrow f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2) = 0_V$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Από την (5.1) έχουμε

$$f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) = 0_V + 0_V = 0_V,$$

από όπου προκύπτει $(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) \in \ker f$. Άρα, επαληθεύεται η συνθήκη της Πρότασης 4.5, επομένως ο πυρήνας είναι υπόχωρος του *U*.

• Για την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης ισχύει:

Έστω $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} f$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 (ii) υπάρχουν διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ τέτοια ώστε, $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1$ και $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2$. Από την (5.1) έχουμε

$$f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \in V .$$

Δηλαδή, για το διάνυσμα $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 \in U$ υπάρχει $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \in V$, έτσι ώστε $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$, και συνεπώς $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$. Άρα, επαληθεύεται η συνθήκη της Πρότασης 4.5, επομένως η εικόνα είναι υπόχωρος του *U*.

ii) Γενικά ισχύει $\operatorname{Im} f \subseteq V$. Όταν ισχύει η ισότητα $\operatorname{Im} f = V$, τότε η γραμμική απεικόνιση $f: U \to V$ ονομάζεται **επί**.

Παράδειγμα 5.2

i) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x-3y,x+4y)$. Η απεικόνιση f είναι γραμμική (Παράδειγμα 5.1 (iii)). Έστω $\boldsymbol{u}=(x,y)\in\ker f$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 (i) έχουμε

$$f(x,y)=\mathbf{0}\Leftrightarrow(2x-3y,x+4y)=(0,0),$$

από όπου προκύπτει το ομογενές σύστημα :

$$\begin{aligned}2x-3y&=0\\ x+4y&=0\end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $x=y=0$, (Παρατήρηση 2.1). Άρα, ο πυρήνας της f είναι ένα μονοσύνολο, $\ker f=\{\mathbf{0}\}$.

ii) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x+8y,x+4y)$. Η απεικόνιση f είναι γραμμική (Παράδειγμα 5.1 (iv)). Ένα στοιχείο $\boldsymbol{u}=(x,y)\in\ker f$ αν και μόνο αν

$$f(x,y)=\mathbf{0}\Leftrightarrow(2x+8y,x+4y)=(0,0)$$

από όπου προκύπτει το ομογενές σύστημα :

$$\begin{aligned}2x+8y&=0\\ x+4y&=0\end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος δεν είναι αντιστρέψιμος, έχει βαθμό 1, συνεπώς υπάρχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων. Οι λύσεις είναι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}=(x,y)=(-4y,y)$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Άρα, ο πυρήνας της f είναι το σύνολο $\ker f=\{(-4y,y):y\in\mathbb{R}\}$.

iii) Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση $c_A:M_{n\times 1}(\mathbb{R})\to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ με $c_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ είναι γραμμική (Παράδειγμα 5.1 (vii)).

Ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης c_A είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x}\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, έτσι ώστε $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Συνεπώς, ο πυρήνας της c_A είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Το προηγούμενο σύνολο ονομάζεται **χώρος λύσεων** ή **μηδενόχωρος** του A, (Παράδειγμα 4.2 (iv)). Άρα, ισχύει

$$\ker f=N(A). \tag{5.2}$$

Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης f είναι το σύνολο όλων των $\boldsymbol{b}=(b_1\ \cdots\ b_m)^t$, για τα οποία το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ έχει λύση. ◆◆◆

Σε μία γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ υπάρχει σχέση που συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων $\ker f \subseteq U$ και $\operatorname{Im} f \subseteq V$, η οποία δίνεται στην Πρόταση 5.2. Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση χρειαζόμαστε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1

Έστω U,V είναι $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι και $f : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$, τότε $\operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_m))$.

Απόδειξη : Έστω ότι $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f \subseteq V$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 (ii), επειδή $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in U$, τέτοιο ώστε $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Από $\boldsymbol{u} \in U$ και $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m$, (Ορισμός 4.11). Από την τελευταία σχέση και επειδή η f είναι γραμμική, μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = f(k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m) = k_1 f(\boldsymbol{u}_1) + k_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + k_m f(\boldsymbol{u}_m).$$

Άρα, κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f \subseteq V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_m)$, οπότε $\operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_m))$. ♦♦♦

Πρόταση 5.2

Έστω $f : U \to V$ γραμμική απεικόνιση, όπου U,V είναι $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι με $\dim U = n$ και $\dim V = m$. Τότε ισχύει

$$\dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f. \qquad (5.3)$$

Απόδειξη : Επειδή ο πυρήνας $\ker f$ και η εικόνα $\operatorname{Im} f$ είναι υπόχωροι των διανυσματικών χώρων U και V, αντίστοιχα (Παρατήρηση 5.2 (i)), και U,V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 (i) συμπεραίνουμε ότι οι υπόχωροι $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι, οπότε κάθε υπόχωρος έχει μία βάση (Πρόταση 4.11).

Έστω $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ μία βάση του $\ker f$. Από το θεώρημα επέκτασης (Πρόταση 4.14), συμπεραίνουμε ότι το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ του $\ker f$

μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του U, έστω $B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$. Έτσι έχουμε,

$$\dim \ker f = k \qquad \text{και} \qquad \dim U = n. \tag{5.4}$$

Επειδή τα στοιχεία της βάσης του U παράγουν το διανυσματικό χώρο, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1 ισχύει

$$\operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_k), f(\boldsymbol{u}_{k+1}), f(\boldsymbol{u}_{k+2}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)). \tag{5.5}$$

Επιπλέον, για τα στοιχεία της βάσης του $\ker f$ μπορούμε να γράψουμε $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2) = \ldots = f(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{0}_V$ (Ορισμός 5.2). Άρα για τον υπόχωρο $\operatorname{Im} f$ στην (5.5) έχουμε

$$\operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_{k+1}), f(\boldsymbol{u}_{k+2}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)). \tag{5.6}$$

Ισχυριζόμαστε ότι τα διανύσματα $f(\boldsymbol{u}_{k+1}), f(\boldsymbol{u}_{k+2}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, η διανυσματική εξίσωση

$$a_{k+1} f(\boldsymbol{u}_{k+1}) + a_{k+2} f(\boldsymbol{u}_{k+2}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V \tag{5.7}$$

έχει μοναδική λύση $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$, (Ορισμός 4.12).

Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση, συνδυάζοντας την (5.1) με την Παρατήρηση 5.1 (ii), η εξίσωση στην (5.7) γράφεται

$$f(a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + a_{k+2}\boldsymbol{u}_{k+2} + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + a_{k+2}\boldsymbol{u}_{k+2} + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n \in kerf$, (Ορισμός 5.2 (i)).

Επίσης, κάθε διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου έχει μοναδικό τρόπο γραφής ως προς τα στοιχεία της βάσης του χώρου, (Πρόταση 4.10). Συνεπώς, για το διάνυσμα $a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + a_{k+2}\boldsymbol{u}_{k+2} + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$ υπάρχουν μοναδικοί $k_1, k_2, \ldots, k_k \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} &a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + a_{k+2}\boldsymbol{u}_{k+2} + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_k\boldsymbol{u}_k \Leftrightarrow \\ &k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_k\boldsymbol{u}_k - a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} - a_{k+2}\boldsymbol{u}_{k+2} - \cdots - a_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_U \end{aligned} \tag{5.8}$$

Επειδή B_U είναι βάση του U, τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{u}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως από την ισότητα στην (5.8) προκύπτει

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0.$$

Άρα, η διανυσματική εξίσωση στην (5.7) έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, οπότε το σύνολο $B_{\operatorname{Im} f} = \{f(\boldsymbol{u}_{k+1}), f(\boldsymbol{u}_{k+2}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Από την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων του συνόλου $B_{\mathrm{Im}\, f}$ και την ισότητα στην (5.6) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $B_{\mathrm{Im}\, f}$ είναι μία βάση της $\mathrm{Im}\, f$ με

$$\dim \mathrm{Im}\, f = n - k. \tag{5.9}$$

Από τις ισότητες στις (5.4) και (5.9) η ισότητα (5.3) επαληθεύεται άμεσα. ◆◆◆

Παράδειγμα 5.3 i) Στο Παράδειγμα 5.2 (i) αποδείχθηκε ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x-3y, x+4y)$ είναι $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Είναι γνωστό ότι ισχύει $\dim\{\mathbf{0}_V\}=0$, (Ορισμός 4.15). Άρα, ισχύει ότι $\dim\ker f = 0$. Επειδή $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, από την ισότητα στην (5.3) συμπεραίνουμε ότι $2 = 0 + \dim \mathrm{Im}\, f$, δηλαδή $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

ii) Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(2x+8y, x+4y)$, έχει $\ker f = \{(-4y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, (Παράδειγμα 5.2 (ii)). Άρα, ισχύει ότι $\dim\ker f = 1$. Η διάσταση της εικόνας της απεικόνισης βρίσκεται από την ισότητα στην (5.3) και είναι $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim\ker f = 2 - 1 = 1$. ◆◆◆

Θεωρώντας μία απεικόνιση ως συνάρτηση f από το διανυσματικό χώρο U στο διανυσματικό χώρο V, υπενθυμίζουμε ότι αυτή ονομάζεται **καλά ορισμένη**, αν, για κάθε $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ με $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$, ισχύει $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2)$.

Η απεικόνιση $f: U \to V$ λέμε ότι είναι **ένα προς ένα** (**1-1**), αν, για κάθε $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ με $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2)$, ισχύει $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$.

Έστω οι διανυσματικοί χώροι U,V,W και οι απεικονίσεις $f: U \to V$, $g: V \to W$. Η **σύνθεση** των απεικονίσεων f και g ορίζεται να είναι $g \circ f : U \to W$ με τύπο $(g \circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u}))$, για κάθε $\boldsymbol{u} \in U$.

Είναι γνωστό ότι για μία απεικόνιση $f: U \to V$, που είναι 1-1 και επί, υπάρχει η **αντίστροφη** απεικόνιση $f^{-1}: V \to U$.

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνονται ιδιότητες που αφορούν τη σύνθεση των γραμμικών απεικονίσεων. Η απόδειξή τους βασίζεται στον Ορισμό 5.1 και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 5.3

Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $f:U \to V$ *και* $g:V \to W$, όπου *U, V, W είναι* $\mathbb{F}$ – *διανυσματικοί χώροι.*

i) *Η σύνθεση* $g \circ f : U \to W$ *είναι γραμμική απεικόνιση.*

ii) *Αν οι f, g είναι ένα προς ένα* (1-1), *τότε η* $g \circ f$ *είναι ένα προς ένα* (1-1).

iii) *Αν οι f, g είναι επί, τότε η* $g \circ f$ *είναι επί.*

Ορισμός 5.3

Έστω U, V δύο $\mathbb{F}$ – *διανυσματικοί χώροι και* $f : U \to V$ *μία γραμμική απεικόνιση.*

i) *Αν η f είναι επί, δηλαδή* $f(U) = \mathrm{Im}\, f = V$, *τότε η f ονομάζεται* ***επιμορφισμός****.*

ii) *Αν η γραμμική απεικόνιση f είναι ένα προς ένα* (1-1), *τότε η f ονομάζεται* ***μονομορφισμός****.*

iii) *Αν η f είναι ένα προς ένα και επί, τότε η f ονομάζεται* ***ισομορφισμός****. Στην περίπτωση αυτή οι χώροι U,V ονομάζονται* ***ισόμορφοι*** *και συμβολίζονται* $U \cong V$.

Πρόταση 5.4

Έστω ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ *είναι ένας ισομορφισμός ανάμεσα στους* $\mathbb{F}$ – *διανυσματικούς χώρους U, V. Τότε η αντίστροφη απεικόνιση* $f^{-1} : V \to U$ *είναι επίσης ισομορφισμός.*

Απόδειξη : Επειδή η f είναι ισομορφισμός, είναι απεικόνιση 1-1 και επί, οπότε ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : V \to U$.

(a) Έστω $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχουν $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ τέτοια ώστε $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2$. Επιπλέον, τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ είναι κατά μοναδικό τρόπο ορισμένα, διότι η f είναι 1-1, οπότε ισχύει

$$\boldsymbol{u}_1 = f^{-1}(\boldsymbol{v}_1) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{u}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{v}_2) \,. \tag{5.10}$$

Επίσης από την γραμμικότητα της απεικόνισης f και την (5.1), έχουμε :

$$f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$$

Εφαρμόζοντας στα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας την αντίστροφη απεικόνιση και αντικαθιστώντας τη σύνθεση $f^{-1}\circ f : U \to U$ με την ταυτοτική απεικόνιση 1_U και τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ από την (5.10), έχουμε :

$$f^{-1}(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) = f^{-1}\left(f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2)\right) = (f^{-1}\circ f)(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2)$$
$$= 1_U(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2) = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 = af^{-1}(\boldsymbol{v}_1) + bf^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$$

Άρα, για την απεικόνιση f^{-1} ισχύει η ισότητα στην (5.1), δηλαδή η f^{-1} είναι γραμμική.

(b) Επειδή η f είναι επί, ισχύει $f(U) = V \Rightarrow f^{-1}(V) = U$, άρα η f^{-1} είναι επί.

(c) Επίσης, επειδή η f και η ταυτοτική 1_V είναι 1-1, έχουμε

$$f^{-1}(\boldsymbol{v}_1) = f^{-1}(\boldsymbol{v}_2) \Rightarrow f(f^{-1}(\boldsymbol{v}_1)) = f(f^{-1}(\boldsymbol{v}_2)) \Rightarrow (f\circ f^{-1})(\boldsymbol{v}_1) = (f\circ f^{-1})(\boldsymbol{v}_2)$$
$$\Leftrightarrow 1_V(\boldsymbol{v}_1) = 1_V(\boldsymbol{v}_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2,$$

δηλαδή $f^{-1}(\boldsymbol{v}_1) = f^{-1}(\boldsymbol{v}_2) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. Οπότε, η γραμμική απεικόνιση f^{-1} είναι 1-1.

Έτσι για την απεικόνιση f^{-1} αποδείχθηκαν οι ιδιότητες : (a) γραμμικότητα, (b) επί, και (c) 1-1. Άρα η απεικόνιση f^{-1} είναι ισομορφισμός, (Ορισμός 5.3 (iii)). ◆◆◆

Πρόταση 5.5

Έστω ότι U, V είναι $\mathbb{F}$ – διανυσματικοί χώροι.

Η γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ είναι μονομορφισμός (1-1) *αν και μόνο αν* $\ker f = \{\boldsymbol{0}_U\}$.

Απόδειξη : Έστω ότι η f είναι 1-1 και ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in \ker f \Rightarrow f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_V$, (Ορισμός 5.2 (i)). Επίσης, από την Παρατήρηση 5.1 (ii), ισχύει $f(\boldsymbol{0}_U) = \boldsymbol{0}_V$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με τον ορισμό της απεικόνισης 1-1, είναι φανερό ότι ισχύει $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_V = f(\boldsymbol{0}_U) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_U$. Άρα, συμπεραίνεται ότι $\ker f = \{\boldsymbol{0}_U\}$.

Αντίστροφα, έστω $\ker f = \{\boldsymbol{0}_U\}$ και $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ με $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2)$. Από τη γραμμικότητα της f έχουμε $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}_1) - f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}_V \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}_V$.

Από την τελευταία ισότητα και την υπόθεση έχουμε

$$f(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = 0_V \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in \ker f \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}_V \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2.$$

Άρα, για τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ με $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$, δηλαδή η f είναι 1-1. ◆◆◆

Πρόταση 5.6

Έστω ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ είναι ένας μονομορφισμός των $\mathbb{F}-$διανυσματικών χώρων U, V. Αν $S_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του U, τότε το $S_V = \{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_k)\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

Απόδειξη : Ισχυριζόμαστε ότι για $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ η διανυσματική εξίσωση

$$a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + a_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + a_k f(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{0}_V \tag{5.11}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, δηλαδή $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, (Ορισμός 4.12).

Την ισότητα στην (5.11), από τη γραμμικότητα της f, μπορούμε να τη γράψουμε

$$f(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{0}_V ,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k) \in \ker f$, (Ορισμός 5.2 (i)).

Επειδή η f είναι μονομορφισμός, σύμφωνα με την Πρόταση 5.5, $\ker f = \{\boldsymbol{0}_U\}$. Άρα, έχουμε ότι

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}_U . \tag{5.12}$$

Επίσης, από την υπόθεση το σύνολο S_U είναι γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε η διανυσματική εξίσωση στην (5.12) έχει μοναδική λύση $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Συνεπώς, αποδείχθηκε και ο ισχυρισμός, διότι η διανυσματική εξίσωση στην (5.11) έχει μοναδική λύση την τετριμμένη. Άρα, τα διανύσματα $f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. ◆◆◆

Συνδυάζοντας την Πρόταση 5.1 με την Πρόταση 5.6, είναι φανερό ότι μία γραμμική και 1-1 απεικόνιση $f : U \to V$ απεικονίζει κάθε βάση του U σε μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$. Στην περίπτωση που η f είναι επί, άρα $\operatorname{Im} f = V$, η βάση της εικόνας είναι μία βάση του V. Έτσι, καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.7

Έστω ότι η γραμμική απεικόνιση $f: U \to V$ *είναι ένας ισομορφισμός των* $\mathbb{F}-$*διανυσματικών χώρων U, V. Αν* $B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ *είναι μία βάση του U, τότε* $B_U = \{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ *είναι μία βάση του V.*

Στο ερώτημα «είναι δυνατό δύο διανυσματικοί χώροι διαφορετικής διάστασης να είναι ισόμορφοι», η απάντηση είναι αρνητική και βασίζεται στην Πρόταση 5.7. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $f: U \to V$ με $\dim U = m$ και $\dim V = n \neq m$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος U έχει $\dim U = m$, υπάρχει μία βάση με m στοιχεία, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.7, ο διανυσματικός χώρος V πρέπει να έχει μία βάση με m στοιχεία. Άρα δεν είναι δυνατό να ισχύει $\dim V = n \neq m$. Επομένως, δύο διανυσματικοί χώροι διαφορετικής διάστασης δεν μπορούν να είναι ισόμορφοι. Συνεπώς, η διάσταση των διανυσματικών χώρων χαρακτηρίζει την ισομορφία τους. Συγκεκριμένα, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.8

Οι $\mathbb{F}-$*διανυσματικοί χώροι U, V πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή*

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

Παράδειγμα 5.4 i) Έστω η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y).$$

Επειδή για $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = f(a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)) &= f(ax_1 + bx_2,\ ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) \\ &= (ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2 + 2(az_1 + bz_2),\ ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2) \\ &= ((ax_1 + ay_1 + 2az_1) + (bx_2 + by_2 + 2bz_2),\ (ax_1 + ay_1) + (bx_2 + by_2)) \\ &= (ax_1 + ay_1 + 2az_1,\ ax_1 + ay_1) + (bx_2 + by_2 + 2bz_2, bx_2 + by_2) \\ &= a(x_1 + y_1 + 2z_1,\ x_1 + y_1) + (x_2 + y_2 + 2z_2, x_2 + y_2) \\ &= af(x_1, y_1, z_1) + bf(x_2, y_2, z_2) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) \end{aligned}$$

Έτσι, επαληθεύεται η ισότητα στην (5.1) και συνεπώς η *f* είναι γραμμική απεικόνιση. Όμως οι χώροι, $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, ανάμεσα στους οποίους ορίζεται η απεικόνιση, δεν είναι ισόμορφοι, διότι είναι χώροι διαφορετικών διαστάσεων, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Συνεπώς, η f ***δεν*** είναι ισομορφισμός.

ii) Οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^n$, $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφοι, διότι $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, (για τις διαστάσεις βλέπε Παράδειγμα 4.10 (i) και (ii), αντίστοιχα). Άλλωστε, ο ισομορφισμός των χώρων $\mathbb{R}^n$, $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ είχε διαπιστωθεί στο Κεφάλαιο 4 ως μία μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbb{R}^n$ και των πινάκων-στηλών του $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, (Παρατήρηση 4.1 αντιστοιχία (ii)-(iii)). ◆◆◆

Με την Πρόταση 5.8 διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων διαφορετικών διαστάσεων. Με την πρόταση που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι οι έννοιες, της αντιστρέψιμης απεικόνισης, του ισομορφισμού και του επιμορφισμού, είναι έννοιες ισοδύναμες, εφόσον η γραμμική απεικόνιση ορίζεται ανάμεσα σε δύο διανυσματικούς χώρους με την ίδια πεπερασμένη διάσταση.

Πρόταση 5.9

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: U \to V$ *και U, V δύο* $\mathbb{F}-$*διανυσματικοί χώροι με* $\dim U = \dim V = n$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) *f είναι ισομορφισμός*

ii) *f είναι αντιστρέψιμη*

iii) *f είναι* 1-1

iv) $\ker f = \{\mathbf{0}_U\}$

v) *f είναι επιμορφισμός*

vi) *Αν το σύνολο* $S_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ *είναι μία βάση του U, τότε το σύνολο* $S_V = \{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ *είναι μία βάση του V.*

Απόδειξη : Αρκεί να αποδειχθούν οι συνεπαγωγές : i)$\Rightarrow$ ii), ii)$\Rightarrow$ iii) , iii)$\Rightarrow$ iv), iv)$\Rightarrow$ v), v)$\Rightarrow$ vi) και vi)$\Rightarrow$ i) .

i)$\Rightarrow$ ii) Επειδή *f* είναι ισομορφισμός, η απεικόνιση *f* είναι 1-1 και επί. Άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση, επομένως η *f* είναι αντιστρέψιμη.

ii)$\Rightarrow$ iii) Επειδή *f* είναι αντιστρέψιμη, πρέπει να είναι 1-1, διαφορετικά δεν ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση.

iii)$\Rightarrow$ iv) Είναι το ευθύ μέρος στην απόδειξη της Πρότασης 5.5.

iv)$\Rightarrow$ v) Επειδή ισχύει $\ker f = \{\mathbf{0}_U\}$, τότε $\dim\ker f = 0$, (Ορισμός 4.15). Οπότε, από την ισότητα στην (5.3) έχουμε $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim U \Leftrightarrow \dim\operatorname{Im} f = n$. Επίσης, η εικόνα $\operatorname{Im} f$ είναι υπόχωρος του *V*, (Παρατήρηση 5.2 (i)) και επιπλέον ισχύει $\dim\operatorname{Im} f = n = \dim V$, οπότε ισχύει $\operatorname{Im} f = V$, (Πρόταση 4.16 (ii)). Άρα, η γραμμική απεικόνιση είναι επί (Παρατήρηση 5.2 (ii)). Συνεπώς, η f είναι επιμορφισμός.

v)$\Rightarrow$ vi) Επειδή $S_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ αποτελεί βάση του *U*, ισχύει ότι $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, από όπου προκύπτει $\operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n))$, (Πρόταση 5.1). Από την υπόθεση η απεικόνιση f είναι επί, οπότε $\operatorname{Im} f = V$. Έτσι, έχουμε :

$$V = \operatorname{Im} f = span(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)) \tag{5.13}$$

Επίσης, από υπόθεση ισχύει ότι $\dim V = n$ και από (5.13) είναι φανερό ότι το σύνολο $S_V = \{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V, οπότε το σύνολο S_V είναι γραμμικά ανεξάρτητο, (Πρόταση 4.15). Άρα, η ισότητα στην (5.13) και η γραμμική ανεξαρτησία του S_V επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, συνεπώς το $S_V = \{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ είναι μία βάση του V.

vi)$\Rightarrow$ i) Επειδή η f είναι μία γραμμική απεικόνιση, για να είναι ισομορφισμός πρέπει επιπλέον να αποδείξουμε ότι: (a) η f είναι 1-1 και (b) η f είναι επί.

(a) Έστω $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in U$ με $f(\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{r})$ και $S_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ είναι μία βάση του *U*. Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in U$ μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της βάσης του *U*, υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{q} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n \quad \text{και} \quad \boldsymbol{r} = \ell_1\boldsymbol{u}_1 + \ell_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \ell_n\boldsymbol{u}_n. \tag{5.14}$$

Εφαρμόζουμε τη γραμμική απεικόνιση f στα δύο διανύσματα της (5.14) και έχουμε :

$$f(\boldsymbol{q}) = f(k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n) = k_1 f(\boldsymbol{u}_1) + k_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{u}_n) \tag{5.15}$$

και

$$f(\boldsymbol{r}) = f(\ell_1\boldsymbol{u}_1 + \ell_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \ell_n\boldsymbol{u}_n) = \ell_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ell_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + \ell_n f(\boldsymbol{u}_n) \tag{5.16}$$

Στην υπόθεση $f(\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{r})$, αντικαθιστούμε τις εικόνες των διανυσμάτων $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ από τις ισότητες στις (5.15) και (5.16) και παίρνουμε

$$f(\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow k_1 f(\boldsymbol{u}_1) + k_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{u}_n) = \ell_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ell_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + \ell_n f(\boldsymbol{u}_n)$$
$$\Leftrightarrow (k_1 - \ell_1) f(\boldsymbol{u}_1) + (k_2 - \ell_2) f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + (k_n - \ell_n) f(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V.$$

Επειδή $S_V = \{ f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ είναι μία βάση του V, τα διανύσματα $f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από την τελευταία διανυσματική εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι $k_1 - \ell_1 = k_2 - \ell_2 = \cdots = k_n - \ell_n = 0$, από όπου προκύπτει ότι $k_i = \ell_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, για τα διανύσματα στην (5.14) ισχύει $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$, που σημαίνει ότι η απεικόνιση f είναι 1-1.

(b) Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in V$. Επειδή $S_V = \{ f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ είναι βάση του V, σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, το διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in V$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του V. Δηλαδή, υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{v} = m_1 f(\boldsymbol{u}_1) + m_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + m_n f(\boldsymbol{u}_n)$. Εξαιτίας της γραμμικότητας της f, την τελευταία σχέση τη γράφουμε

$$\boldsymbol{v} = f(m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{u}_n),$$

από όπου αν θέσουμε, $\boldsymbol{u} = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{u}_n$, προκύπτει ότι $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$. Είναι φανερό ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{u}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης του U. Επομένως, έχουμε $\boldsymbol{u} \in U$. Συνεπώς, για το τυχαίο $\boldsymbol{v} \in V$ βρέθηκε $\boldsymbol{u} \in U$, τέτοιο ώστε $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$. Άρα, η f είναι επί. Από (a) και (b) συμπεραίνουμε ότι f είναι ισομορφισμός. ◆◆◆

Παράδειγμα 5.5 i) Στο Παράδειγμα 5.3 (i) αποδείχθηκε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$, έχει $\ker f = \{\boldsymbol{0}\}$. Επίσης, οι δύο διανυσματικοί χώροι, ανάμεσα στους οποίους ορίζεται η απεικόνιση, έχουν την ίδια διάσταση, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Συνεπώς η f είναι ένας ισομορφισμός και υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1}, (Πρόταση 5.9 (iv)- (i)- (ii)) .

ii) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (2x + 8y, x + 4y)$, έχει $\ker f = \{(-4y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, (Παράδειγμα 5.2 (ii)). Άρα, η f **δεν** είναι ισομορφισμός, αν και η απεικόνιση ορίζεται ανάμεσα σε χώρους που έχουν την ίδια διάσταση. ◆◆◆

5.2 Πίνακας αναπαράστασης γραμμικής απεικόνισης

Έστω $f:U\to V$ μία γραμμική απεικόνιση, όπου U, V είναι δύο $\mathbb{F}$ – διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Έστω $S_U=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ μία βάση του U και $S_V=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ μία βάση του V. Θεωρούμε τα στοιχεία $f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2),\ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\in V$. Επειδή το $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ είναι βάση του V, γνωρίζουμε ότι κάθε $f(\boldsymbol{u}_i)\in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ της βάσης του V, (Πρόταση 4.10). Δηλαδή, υπάρχουν **μοναδικά** $a_{ij}\in\mathbb{F}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1) &= a_{11}\boldsymbol{v}_1+a_{21}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{v}_m \\ f(\boldsymbol{u}_2) &= a_{12}\boldsymbol{v}_1+a_{22}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{v}_m \\ &\ \vdots \\ f(\boldsymbol{u}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{v}_1+a_{2n}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{v}_m. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ορισμός 5.4

Έστω μία γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$, S_U μία βάση του διανυσματικού χώρου U με $\dim U=n$ και S_V μία βάση του V με $\dim V=m$. Ένας $m\times n$ πίνακας ονομάζεται ***πίνακας αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης*** *f* ***ως προς τις βάσεις*** *S_U, S_V, αν είναι της μορφής*

$$(f)_{S_U,S_V}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

όπου τα a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ είναι οι συντελεστές των ισοτήτων στην (5.17).

Στο συμβολισμό του πίνακα αναπαράστασης, $(f)_{S_U,S_V}$, σημειώνονται οι βάσεις των διανυσματικών χώρων U,V, έτσι ώστε η πρώτη να αναφέρεται στη βάση του πεδίου ορισμού της απεικόνισης και η δεύτερη στην εικόνα της απεικόνισης. Όταν η βάση S στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της απεικόνισης είναι ίδια σημειώνεται $(f)_S$.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.4, σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ και για κάθε επιλογή βάσεων (S_U βάση του U με $\dim U=n$ και S_V βάση του V με $\dim V=m$), αντιστοιχεί μοναδικός πίνακας $(f)_{S_U,S_V}$ τύπου $m\times n$.

Παρατήρηση 5.3

i) Η πρώτη στήλη του $(f)_{S_U,S_V}$ σχηματίζεται από τους συντελεστές του $f(\boldsymbol{u}_1)$ ως προς τη βάση S_V, η δεύτερη στήλη από τους συντελεστές του $f(\boldsymbol{u}_2)$ ως προς τη βάση S_V κοκ. Δηλαδή, ο πίνακας αναπαράστασης είναι ο πίνακας που έχει στήλες τις συντεταγμένες του διανύσματος $f(\boldsymbol{u}_i)\in V$, ως προς τη βάση S_V, για κάθε $\boldsymbol{u}_i \in S_U$.

ii) Για δοσμένη f, ο πίνακας $(f)_{S_U,S_V}$ εξαρτάται από τις βάσεις S_U, S_V. Σχετικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.6 Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z)=(x+y+2z, x+y)$ η γραμμική απεικόνιση του Παραδείγματος 5.4 (i).

Σημειώνεται ότι $S_1=\{\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)\}$, $S_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα.

i) Επιλέγουμε τις βάσεις S_1, S_2 για τον υπολογισμό του πίνακα αναπαράστασης. Από τις ισότητες στην (5.17) και μετά από κατάλληλους υπολογισμούς βρίσκουμε :

$$f(\boldsymbol{e}_1)=f(1,0,0)=(1+0+2\cdot 0,\ 1+0)=(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$$
$$f(\boldsymbol{e}_2)=f(0,1,0)=(0+1+2\cdot 0,\ 0+1)=(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$$
$$f(\boldsymbol{e}_3)=f(0,0,1)=(0+0+2\cdot 1,\ 0+0)=(2,0)=2(1,0)+0(0,1)$$

Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.4 και από την (5.18), ο πίνακας αναπαράστασης είναι:

$$(f)_{S_1,S_2}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$$

ii) Επιλέγουμε το σύνολο $S_3=\{(2,1,0),(1,1,1),(0,0,1)\}$ ως βάση στον $\mathbb{R}^3$ και την κανονική βάση S_2 στον $\mathbb{R}^2$. Με όμοιο τρόπο, όπως στο (i), βρίσκουμε ότι

$$f(2,1,0)=(3,3)=3(1,0)+3(0,1)$$
$$f(1,1,1)=(4,2)=4(1,0)+2(0,1)$$
$$f(0,0,1)=(2,0)=2(1,0)+0(0,1).$$

Άρα, από την (5.18), ο πίνακας αναπαράστασης είναι :

$$(f)_{S_3,S_2}=\begin{pmatrix}3&4&2\\3&2&0\end{pmatrix}$$ ◆◆◆

Σε κάθε δοσμένη γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ αντιστοιχεί ένας πίνακας $(f)_{S_U, S_V}$ τύπου $m \times n$, όπου S_U βάση του U με $\dim U = n$ και S_V βάση του V με $\dim V = m$.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή σε κάθε πίνακα, τύπου $m \times n$, αντιστοιχεί ***ακριβώς μία*** γραμμική απεικόνιση. Ο τύπος της απεικόνισης προσδιορίζεται από τις ισότητες στην (5.17), έχοντας προκαθορισμένες τις βάσεις των δύο διανυσματικών χώρων.

Αν δηλαδή θέλουμε να βρούμε την εικόνα ενός διανύσματος $\boldsymbol{u} \in U$, τότε προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του $\boldsymbol{u}$ ως προς τη βάση $S_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ του U, που έχουμε επιλέξει . Έστω ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{u}$ γράφεται : $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$.

Θεωρούμε έναν πίνακα-στήλη με τις συντεταγμένες του διανύσματος $\boldsymbol{u}$, έστω $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t$. Πολλαπλασιάζουμε το δοσμένο πίνακα $(f)_{S_U, S_V}$ επί το $\boldsymbol{x}$ και βρίσκουμε το διάνυσμα συντεταγμένων του $f(\boldsymbol{x})$ ως προς τη βάση $S_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ του V, δηλαδή

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{v}_m. \qquad (5.19)$$

Παράδειγμα 5.7 Έστω δύο βάσεις $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{u}_2 = (1,0,1), \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1)\}$ και η κανονική βάση $S_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα αναπαράστασης ως προς τις δύο βάσεις $(f)_{S_1, S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθεί το διάνυσμα $f(1,-3,2)$.

Έστω ένα διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε ότι το $\boldsymbol{u}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της απεικόνισης και ότι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ έχει βάση το σύνολο $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$. Οπότε, το διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται $\boldsymbol{u} = (x, y, z) = y\boldsymbol{u}_1 + (x-y)\boldsymbol{u}_2 + (z-x)\boldsymbol{u}_3$. Από την προηγούμενη ανάλυση είναι φανερό ότι ο πίνακας-στήλη με τις συντεταγμένες του διανύσματος $\boldsymbol{u}$ είναι $\boldsymbol{x} = (y\ \ x-y\ \ z-x)^t$. Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα $(f)_{S_1, S_2}$ επί $\boldsymbol{x}$, $(f)_{S_1, S_2}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x-y \\ z-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+y+3z \\ -4x-y+5z \\ -x-5y+8z \end{pmatrix}$.

Στο σύνολο τιμών η βάση S_2 είναι η κανονική, οπότε έχουμε

$$f(x,y,z)=(-3x+y+3z)\boldsymbol{e}_1+(-4x-y+5z)\boldsymbol{e}_2+(-x-5y+8z)\boldsymbol{e}_3$$
$$=(-3x+y+3z,\ -4x-y+5z,\ -x-5y+8z).$$

Το ζητούμενο διάνυσμα προκύπτει από τον τύπο της f και είναι $f(1,-3,2)=(0,9,30)$. ◆◆◆

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση μπορούμε να υπολογίζουμε έναν πίνακα, ο οποίος κάθε φορά εξαρτάται από τις βάσεις που έχουμε επιλέξει στους διανυσματικούς χώρους του πεδίου ορισμού και της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης και αντίστροφα. Έτσι, συνοψίζοντας έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.10

Σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$, μετά την επιλογή των βάσεων στους δύο $\mathbb{F}-$διανυσματικούς χώρους U, V, με $\dim U=n$ και $\dim V=m$, αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα ένας πίνακας τύπου $m\times n$.

Εκμεταλλευόμενοι την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, που παρουσιάζεται στην Πρόταση 5.10, εξετάζουμε στη συνέχεια μία ειδική περίπτωση γραμμικών απεικονίσεων $f:U\to U$, η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έστω $S=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n\}$ μία βάση του U και $(f)_S$ ο πίνακας αναπαράστασης ως προς τη βάση S. Από την (5.18), είναι φανερό ότι ο πίνακας αναπαράστασης είναι τετραγωνικός

$$(f)_S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=A. \tag{5.20}$$

Αντίστροφα, για έναν τετραγωνικό πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ και για μία γνωστή βάση ενός διανυσματικού χώρου, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση, ο τύπος της οποίας βρίσκεται μετά τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A επί το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_S$. Δηλαδή

$$A\boldsymbol{x}_S=(f(\boldsymbol{x}))_S, \tag{5.21}$$

όπου $\boldsymbol{x}_S$ είναι ο πίνακας-στήλη με στοιχεία τις συντεταγμένες ενός τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ως προς τη βάση S και $(f(\boldsymbol{x}))_S$ είναι ο πίνακας-στήλη με στοιχεία τις συντεταγμένες του διανύσματος της εικόνας του $\boldsymbol{x}$ ως προς την ίδια βάση (βλέπε την αντίστοιχη ισότητα στην (5.19)).

Παράδειγμα 5.8 Να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(3x+y,\ 2x+4y)$, ως προς τις βάσεις $S_1=\{(2,1),(1,1)\}$ και $S_2=\{(1,1),(1,-1)\}$.

i) Στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της απεικόνισης θεωρούμε βάση το σύνολο S_1.

Οι αντίστοιχες ισότητες στην (5.17) γράφονται :

$$\begin{aligned} f(2,1)=(7,8)=-1(2,1)+9(1,1) \\ f(1,1)=(4,6)=-2(2,1)+8(1,1) \end{aligned}$$

Άρα, από την (5.20) ο πίνακας αναπαράστασης είναι $(f)_{S_1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}=A$.

ii) Στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της απεικόνισης θεωρούμε βάση το σύνολο S_2.

Με ανάλογο τρόπο, όπως προηγούμενα βρίσκουμε ότι ισχύει :

$$\begin{aligned} f(1,1)=(4,6)=5(1,1)-1(1,-1) \\ f(1,-1)=(2,-2)=0(1,1)+2(1,-1) \end{aligned}$$

Άρα, ο πίνακας αναπαράστασης (διαφορετικός από τον προηγούμενο A) είναι

$$(f)_{S_2}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=B.$$

iii) Στο πεδίο ορισμού της απεικόνισης θεωρούμε βάση το σύνολο S_1 και στην εικόνα το σύνολο S_2.

Με ανάλογο τρόπο, όπως προηγούμενα, βρίσκουμε ότι ισχύει :

$$\begin{aligned} f(2,1)=(7,8)=\frac{15}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(1,-1) \\ f(1,1)=(4,6)=5(1,1)-1(1,-1) \end{aligned}$$

Άρα, ο πίνακας αναπαράστασης (διαφορετικός από τους πίνακες A,B) είναι

$$(f)_{S_1,S_2}=\begin{pmatrix} 15/2 & 5 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}=G.$$ ◆◆◆

Στο τέλος αυτής της ενότητας, αναφέρονται τρεις σημαντικές προτάσεις, που δείχνουν ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, που υπάρχει ανάμεσα στις γραμμικές απεικονίσεις και στους αντίστοιχους πίνακες αναπαράστασης, αξιοποιείται στη λύση σημαντικών προβλημάτων των γραμμικών απεικονίσεων. Αυτά τα προβλήματα ανάγονται στη λύση προβλημάτων αντίστοιχων πινάκων καθώς και αντίστροφα.

Στη πρόταση, που ακολουθεί, δίνεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι μία γραμμική απεικόνιση αντιστρέψιμη. Αυτό συνδέεται με τον πίνακα αναπαράστασης της απεικόνισης, ωστόσο η απόδειξή της παραλείπεται, διότι απαιτείται εφαρμογή θεωρημάτων Άλγεβρας, τα οποία δεν κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν.

Πρόταση 5.11

Έστω S μία βάση ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου U με $\dim U = n$. Μία *γραμμική απεικόνιση $f: U \to U$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν ο πίνακας αναπαράστασης $(f)_S = A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος και τότε ισχύει $(f^{-1})_S = A^{-1}$.*

Μία αρκετά χρήσιμη απεικόνιση, που συνδέει τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ με τις στήλες ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, είναι η απεικόνιση

$$c_A : M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{F}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x},$$

η οποία είναι γραμμική (Παράδειγμα 5.1 (vii)). Έστω $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Ο πίνακας-στήλη $\boldsymbol{e}_i$ έχει μονάδα στην $i-$θέση και όλα τα άλλα είναι μηδέν, (Παράδειγμα 4.8 (iv)). Είναι φανερό ότι

$$c_A(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{c}_i, \tag{5.22}$$

όπου $\boldsymbol{c}_i$ είναι η $i-$στήλη του πίνακα A. Επιπλέον, επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, παράγουν το διανυσματικό χώρο $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ -ως στοιχεία βάσης-, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1 ισχύει

$$\operatorname{Im} c_A = span(c_A(\boldsymbol{e}_1), c_A(\boldsymbol{e}_2), \ldots, c_A(\boldsymbol{e}_n)),$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση με τις ισότητες από την (5.22) καταλήγουμε στη σχέση

$$\operatorname{Im} c_A = span(c_A(\boldsymbol{e}_1), c_A(\boldsymbol{e}_2), \ldots, c_A(\boldsymbol{e}_n)) = span(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = C(A), \tag{5.23}$$

όπου $C(A)$ ο χώρος στηλών του A, (Ορισμός 4.13).

Στην επόμενη πρόταση χρησιμοποιείται η θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων για να παρουσιασθούν οι αποδείξεις των προβλημάτων, που σχετίζονται με την αντιστρεψιμότητα ενός τετραγωνικού πίνακα *A*, το βαθμό του, καθώς και με τη γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του *A*.

Πρόταση 5.12

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος*

ii) $r(A) = n$, *όπου* $r(A)$ *ο βαθμός του πίνακα A*

iii) *Οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν θεωρηθούν ως στοιχεία του* $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

Απόδειξη : Αρκεί να αποδειχθούν οι συνεπαγωγές : i)$\Rightarrow$ ii), ii)$\Rightarrow$ iii) και iii)$\Rightarrow$ i). Έστω η γραμμική απεικόνιση $c_A : M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ με $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$, και $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Από τον ορισμό της απεικόνισης c_A και τις ισότητες στην (5.22) είναι φανερό ότι ο πίνακας αναπαράστασης της c_A ως προς την κανονική βάση S_e (S_e βάση τουδιανυσματικού χώρου του πεδίου ορισμού και της εικόνας) είναι ακριβώς ο πίνακας *A*, δηλαδή $(c_A)_{S_e} = A$.

i)$\Rightarrow$ ii) Έστω *A* αντιστρέψιμος, οπότε η απεικόνιση c_A είναι αντιστρέψιμη, (Πρόταση 5.11). Σύμφωνα με τις ισοδύναμες προτάσεις στην Πρόταση 5.9 (ii)-(v) η αντιστρέψιμη απεικόνιση c_A είναι επιμορφισμός, άρα $\operatorname{Im} c_A = M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Οπότε, συνδυάζοντας την προηγούμενη ισότητα με την (5.23) συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Im} c_A = C(A) = M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Επίσης, επειδή $\dim M_{n\times 1}(\mathbb{F}) = n$, από την τελευταία ταύτιση των διανυσματικών χώρων έχουμε $\dim \operatorname{Im} c_A = \dim C(A) = \dim M_{n\times 1}(\mathbb{F}) = n$. Επιπλέον, ισχύει $\dim C(A) = r(A)$, (βλέπε ισότητα στην (4.33)), οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ii)$\Rightarrow$ iii) Έστω $r(A) = n$. Επειδή $\dim C(A) = r(A) = n$ και $C(A) = span(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ (Ορισμός 4.13), το σύνολο $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, (Πρόταση 4.15).

iii)$\Rightarrow$ i) Έστω $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.15, το σύνολο $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ παράγει το χώρο στηλών $C(A)$ και επομένως είναι μία βάση του $C(A)$, με $\dim C(A) = n$. Επιπλέον, από την ισότητα στην (5.23) συμπεραίνουμε $\dim \operatorname{Im} c_A = \dim C(A) = n$. Έτσι, κάνοντας αντικατάσταση με τις γνωστές διαστάσεις στην ισότητα των διαστάσεων της (5.3) έχουμε

$$\dim \ker c_A = \dim M_{n\times 1}(\mathbb{F}) - \dim \operatorname{Im} c_A = n - n = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $\ker c_A = \{\mathbf{0}\}$. Επομένως, η απεικόνιση c_A είναι αντιστρέψιμη, (Πρόταση 5.9 (iv)-(ii)) . Η αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση c_A έχει αντιστρέψιμο πίνακα αναπαράστασης (Πρόταση 5.11). Άρα, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. ◆◆◆

Στη γραμμική απεικόνιση c_A βασίζεται και η απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί , η οποία αναφέρεται στο πλήθος των παραμέτρων που έχει ο χώρος λύσεων (μηδενόχωρος) ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Πρόταση 5.13

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Ο χώρος λύσεων, $N(A)$, του ομογενούς συστήματος $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, έχει διάσταση

$$\dim N(A) = n - r(A),$$

όπου $r(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών του συστήματος.

Απόδειξη : Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 5.12, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $c_A : M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{F})$ με $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, της κανονικής βάσης του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Ο πίνακας αναπαράστασης της c_A ως προς την κανονική βάση είναι ο $m \times n$ πίνακας A. Στο Παράδειγμα 5.2 (iii) και στην (5.2) αποδείχθηκε

$$\ker c_A = N(A).$$

Επειδή από την ισότητα στην (5.23) ισχύει $\operatorname{Im} c_A = C(A)$ και από την (4.33) ισχύει $\dim C(A) = r(A)$, για τον υπόχωρο $\operatorname{Im} c_A$ συμπεραίνουμε ότι

$$\dim \operatorname{Im} c_A = \dim C(A) = r(A).$$

Επιπλέον, για το διανυσματικό χώρο $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ ισχύει $\dim M_{n\times 1}(\mathbb{F}) = n$. Κάνοντας αντικατάσταση στην ισότητα των διαστάσεων των διανυσματικών χώρων στην (5.3) της Πρότασης 5.2, έχουμε

$$\dim M_{n\times 1}(\mathbb{F}) = \dim\ker c_A + \dim \operatorname{Im} c_A \;\Leftrightarrow\; n = \dim N(A) + r(A),$$

συνεπώς η απόδειξη είναι άμεση. ◆◆◆

Συνδυάζοντας τις ισοδυναμίες της Πρότασης 5.9 με αυτές των Προτάσεων 5.12, 5.13 και 4.9, καταλήγουμε στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 5.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος*

ii) *Ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος*[(1)] *με τον* I_n

iii) $r(A) = n$, *όπου* $r(A)$ *ο βαθμός του πίνακα A*

iv) *Το ομογενές σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *έχει μόνο τη μηδενική λύση*

v) *Οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν θεωρηθούν ως στοιχεία του* $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$

vi) *Η διάσταση του χώρου στηλών του πίνακα A είναι n*

vii) *Η διάσταση του χώρου γραμμών του πίνακα A είναι n*

viii) *Η διάσταση του χώρου λύσεων (μηδενοχώρου) είναι μηδέν.*

---

(1) Βλέπε τον Ορισμό 3.4.

5.3 Αλλαγή βάσης – Όμοιοι πίνακες

Στην προηγούμενη ενότητα διαπιστώσαμε ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί ένας πίνακας αναπαράστασης, ο οποίος εξαρτάται από τις βάσεις που έχουμε επιλέξει στους διανυσματικούς χώρους του πεδίου ορισμού και της εικόνας της απεικόνισης (Παράδειγμα 5.6). Ακόμα και στην περίπτωση που η απεικόνιση είναι $f: U \to U$, οπότε ο πίνακας αναπαράστασης είναι τετραγωνικός, πάλι ο πίνακας εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων στο διανυσματικό χώρο U (Παράδειγμα 5.8). Το ερώτημα που τίθεται είναι «υπάρχει σχέση που συνδέει αυτούς τους πίνακες;».

Έστω η ταυτοτική απεικόνιση, $1_U : U \to U$, με $1_U(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, για κάθε $\boldsymbol{u} \in U$. Η 1_U είναι γραμμική απεικόνιση (Παράδειγμα 5.1 (x)). Ας θεωρήσουμε δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου U, στο πεδίο ορισμού το σύνολο $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ και στην εικόνα της ταυτοτικής απεικόνισης το σύνολο $S_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$. Επειδή κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου $1_U(U) = U$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, (Πρόταση 4.10), υπάρχουν μοναδικά $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= 1(\boldsymbol{u}_1) = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\
\boldsymbol{u}_2 &= 1(\boldsymbol{u}_2) = a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_n &= 1(\boldsymbol{u}_n) = a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{v}_n.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ορισμός 5.5

Ο τετραγωνικός πίνακας αναπαράστασης της ταυτοτικής απεικόνισης $1_U : U \to U$ *ονομάζεται* ***πίνακας αλλαγής βάσης*** *από τη βάση* $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ *στην* $S_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ *και ισούται με*

$$P_{S_1,S_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

όπου τα a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$ *είναι οι συντελεστές των ισοτήτων στην* (5.24).

Έστω ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in U$, ως προς τη βάση S_1, έχει συντεταγμένες $(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^t$, δηλαδή $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$. Κάνοντας αντικατάσταση από τις ισότητες στην (5.24) έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n \\ &= x_1(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n) + x_2(a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n) + \cdots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{v}_n) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})\boldsymbol{v}_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n})\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn})\boldsymbol{v}_n.\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in U$ έχει ως προς τη βάση S_2 συντεταγμένες $(y_1\ y_2\ \dots\ y_n)^t$, τότε η προηγούμενη διανυσματική ισότητα καταλήγει στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} &= y_1 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} &= y_2 \\ &\vdots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn} &= y_n, \end{aligned}$$

το οποίο με μορφή πινάκων γράφεται

$$P_{S_1,S_2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Τοποθετούμε τα διανύσματα των βάσεων ως στήλες πινάκων

$$K = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n) \quad \text{και} \quad L = (\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n), \tag{5.27}$$

οπότε, από την (5.26) έχουμε

$$K = LP_{S_1,S_2}. \tag{5.28}$$

Οι πίνακες K, L έχουν στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άρα είναι αντιστρέψιμοι πίνακες (Πρόταση 5.12 (i)-(iii)). Επομένως, από την ισότητα στην (5.28) έχουμε

$$P_{S_1,S_2} = L^{-1}K = (\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n)^{-1}(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n). \tag{5.29}$$

Επειδή η ταυτοτική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη, ο πίνακας P_{S_1,S_2} είναι αντιστρέψιμος και σύμφωνα με την Πρόταση 5.11 στην αντίστροφη γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί ο αντίστροφος πίνακας του P_{S_1,S_2}, δηλαδή

$$P_{S_2,S_1} = P_{S_1,S_2}^{-1} = K^{-1}L = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n)^{-1}(\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n). \tag{5.30}$$

Παράδειγμα 5.9 Έστω οι βάσεις $S_1=\{(2,1),(1,1)\}$ και $S_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ του $\mathbb{R}^2$, όπως στο Παράδειγμα 5.8.

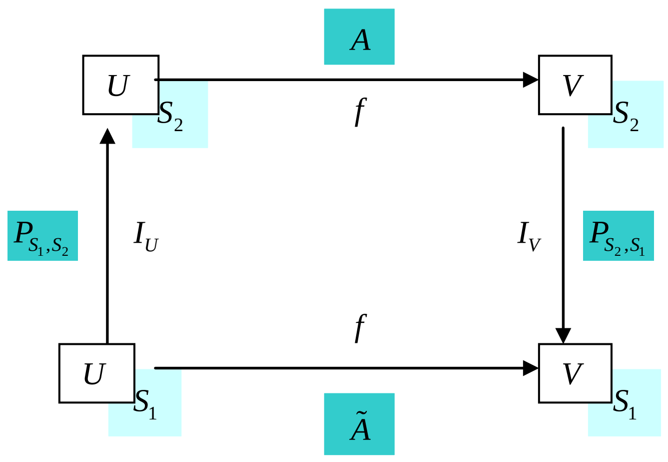
Ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση S_1 στην S_2, σύμφωνα με την ισότητα στην (5.29), είναι

$$P_{S_1,S_2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

και ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S_2 στην S_1, σύμφωνα με την ισότητα στην (5.30), είναι

$$P_{S_2,S_1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$ ◆◆◆

Έστω μία γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$, ανάμεσα στους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης U, V, και δύο βάσεις S_1, S_2 καθώς και οι ταυτοτικές συναρτήσεις $1_U : U\to U$ και $1_V : V\to V$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3 (i), η σύνθεση συναρτήσεων $1_V\circ f\circ 1_U : U\to V$ είναι γραμμική απεικόνιση. Όπως φαίνεται και από



Σχήμα 5.2

το Σχήμα 5.2, για τους αντίστοιχους πίνακες, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\tilde{A}=P_{S_2,S_1}AP_{S_1,S_2} \tag{5.31}$$

Στην περίπτωση που $\dim U = \dim V = n$, ο πίνακας αναπαράστασης A είναι $n \times n$, και επιπλέον από την (5.30) είναι φανερό ότι ισχύει $P_{S_2,S_1} = P_{S_1,S_2}^{-1}$. Συνεπώς, η ισότητα στην (5.31) γράφεται $\tilde{A} = P_{S_1,S_2}^{-1} A P_{S_1,S_2}$.

Δίνοντας απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή της ενότητας, διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες αναπαράστασης $A, \tilde{A}$ της γραμμικής απεικόνισης $f : U \to U$ συνδέονται με τη σχέση

$$\tilde{A} = P_{S_1,S_2}^{-1} A P_{S_1,S_2}, \tag{5.32}$$

όπου P_{S_1,S_2} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση S_1 στην S_2.

Παράδειγμα 5.10 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (3x + y,\ 2x + 4y)$ και ότι δύο βάσεις του $\mathbb{R}^2$ είναι τα σύνολα $S_1 = \{(2,1),(1,1)\}$ και $S_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Όπως υπολογίσθηκε στο Παράδειγμα 5.8 (i), επιλέγοντας το σύνολο S_1 ως βάση στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της f, ο πίνακας αναπαράστασης είναι $(f)_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = A$.

Επίσης, στο ίδιο Παράδειγμα 5.8 (ii), επιλέγοντας ως βάση το σύνολο S_2, ο πίνακας αναπαράστασης είναι $(f)_{S_2} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Στο Παράδειγμα 5.9 υπολογίζεται ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση S_1 στην S_2, ο οποίος είναι $P_{S_1,S_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Η ισότητα στην (5.32) επαληθεύεται από τους παραπάνω πίνακες, διότι ισχύει

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & 2/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Ορισμός 5.6

*Δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ λέγονται **όμοιοι**, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$, τέτοιος ώστε*

$$B = P^{-1} A P \tag{5.33}$$

*Ο πίνακας P ονομάζεται **πίνακας ομοιότητας**.*

Παράδειγμα 5.11

i) Οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ είναι όμοιοι, διότι για τον αντιστρέψιμο πίνακα $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ισχύει η ισότητα στην (5.33), δηλαδή

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}P.$$

ii) Οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ***δεν*** είναι όμοιοι. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε, $A=P^{-1}BP \Leftrightarrow PA=BP$. Αν $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, τότε

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=c,\ d=c=0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $P=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Είναι φανερό ότι ο πίνακας P **δεν** είναι αντιστρέψιμος. Άρα, δεν επαληθεύεται ο Ορισμός 5.6, συνεπώς οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι.

iii) Οι πίνακες αναπαράστασης $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 9 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, και ο αντιστρέψιμος πίνακας αλλαγής βάσης $P_{S_1,S_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ επαληθεύουν την ισότητα στην (5.33), όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 5.10. Άρα, οι πίνακες A,B είναι όμοιοι. ◆◆◆

Με αφορμή το Παράδειγμα 5.11 (iii), παρατηρούμε ότι οι όμοιοι πίνακες συνδέονται με τη θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων και ιδιαίτερα με τους πίνακες αναπαράστασης, που αντιστοιχούν σε κάθε γραμμική απεικόνιση.

Έτσι, συνδυάζοντας τον Ορισμό 5.6 με την ισότητα στην (5.32), διαπιστώνουμε ότι δύο πίνακες $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ είναι ***όμοιοι*** *πίνακες* αν και μόνο αν είναι πίνακες αναπαράστασης που αντιστοιχούν στην ***ίδια*** γραμμική απεικόνιση $f:U\rightarrow U$, ως προς διαφορετικές βάσεις του διανυσματικού χώρου *U*, (βλέπε και σύγκρινε τους πίνακες A, $\tilde{A}$ στο Σχήμα 5.2). Επισημαίνεται ότι, όταν υπολογίζονται οι πίνακες A, B, επιλέγουμε την ίδια βάση στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της απεικόνισης *f*.

Οι όμοιοι πίνακες είναι αρκετά σημαντικοί, διότι χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση ενός πίνακα με όσο το δυνατό πιο απλοποιημένη μορφή, δηλαδή να βρίσκεται όσο γίνεται «πιο κοντά» σε διαγώνια μορφή ή σε τριγωνική μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιλογή απλούστερης βάσης στο διανυσματικό χώρο, πάνω στον οποίο ορίζεται η γραμμική απεικόνιση. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των ομοίων πινάκων $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι :

$$\det A = \det B, \qquad trA = trB, \qquad r(A) = r(B) \tag{5.34}$$

Περισσότερες ιδιότητες με τις αποδείξεις τους καθώς και οι σημαντικότερες εφαρμογές των ομοίων πινάκων δίνονται στο Κεφάλαιο 8 και στην Εφαρμογή 8.9.

5.4 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 5.12 Να εξετασθεί ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές:

i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, με $f(x,y,z)=(2x+xy, x-3y-z)$

ii) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, με $g(x,y,z)=(3x+4, 2x-5y+3z, x-y-z)$

iii) $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, με $h(x,y,z)=(2x+|z|, x-3y-z)$

iv) $k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, με $k(x,y)=(2x, x-3y, x+y)$

Απόδειξη : i) Η απεικόνιση f **δεν** είναι γραμμική, διότι $f(2,2,2)=(8,-6)$ και $2f(1,1,1)=2(3,-3)=(6,-6)$. Συνεπώς, δεν επαληθεύεται η ιδιότητα (b) του Ορισμού 5.1, επειδή ισχύει $f(2,2,2)\neq 2f(1,1,1)$.

ii) Η απεικόνιση g **δεν** είναι γραμμική, διότι $g(0,0,0)=(4,0,0)\neq(0,0,0)$, άρα δεν επαληθεύεται η ισότητα στην Παρατήρηση 5.1 (ii).

iii) Η απεικόνιση h **δεν** είναι γραμμική, διότι $h(0,0,-1)=(1,1)$ και $h(0,0,1)=(1,-1)$. Συνεπώς, δεν επαληθεύεται η ιδιότητα (b) του Ορισμού 5.1, επειδή ισχύει $h(0,0,-1)\neq -h(0,0,1)$.

iv) Η απεικόνιση k είναι γραμμική. Πράγματι, έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{u}_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $a,b\in\mathbb{R}$. Κάνοντας πράξεις επαληθεύεται η ισότητα στην (5.1), διότι έχουμε

$$\begin{aligned}
k\left(a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)\right) &= k(ax_1+bx_2, ay_1+by_2)\\
&=\left(2(ax_1+bx_2),(ax_1+bx_2)-3(ay_1+by_2),(ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)\right)\\
&=(2ax_1, ax_1-3ay_1, ax_1+ay_1)+(2bx_2, bx_2-3by_2, bx_2+by_2)\\
&=a(2x_1, x_1-3y_1, x_1+y_1)+b(2x_2, x_2-3y_2, x_2+y_2)\\
&=ak(x_1,y_1)+bk(x_2,y_2).
\end{aligned}$$

◆◆◆

Παράδειγμα 5.13 Έστω η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, με

$$f(x,y,z)=(x+2y-z,\ y+2z,\ x+y-z).$$

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση.

ii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα $\ker f$.

iii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της απεικόνισης f.

Απόδειξη : i) Η απεικόνιση f είναι γραμμική, διότι αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{u}_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$, $a,b\in\mathbb{R}$, επαληθεύεται η ισότητα στην (5.1), όπως διαπιστώνεται ακολούθως:

$$
\begin{aligned}
&f(a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2)\\
&\quad= f\left(a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2)\right)= f(ax_1+bx_2,ay_1+by_2,az_1+bz_2)\\
&\quad=(ax_1+bx_2+2(ay_1+by_2)-(az_1+bz_2),(ay_1+by_2)+2(az_1+bz_2),\\
&\qquad\qquad (ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)-(az_1+bz_2))\\
&\quad=(ax_1+2ay_1-az_1,ay_1+2az_1,ax_1+ay_1-az_1)+(bx_2+2by_2-bz_2,by_2+2bz_2,bx_2+by_2-bz_2)\\
&\quad=a(x_1+2y_1-z_1,y_1+2z_1,x_1+y_1-z_1)+b(x_2+2y_2-z_2,y_2+2z_2,x_2+y_2-z_2)\\
&\quad=af(x_1,y_1,z_1)+bf(x_2,y_2,z_2)=af(\boldsymbol{u}_1)+bf(\boldsymbol{u}_2).
\end{aligned}
$$

ii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 (i), για τον πυρήνα της f έχουμε

$$\boldsymbol{u}=(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow(x+2y-z,\ y+2z,\ x+y-z)=(0,0,0).$$

Από όπου προκύπτει το ομογενές σύστημα :

$$
\begin{aligned}
x+2y-z&=0\\
y+2z&=0\\
x+y\ \ -z&=0
\end{aligned}
$$

Ο πίνακας A των συντελεστών του συστήματος έχει $\det A=2\neq 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με τις ισοδυναμίες των προτάσεων (i)-(iv) στην Εφαρμογή 5.1, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα, $\boldsymbol{u}=(x,y,z)=(0,0,0)\Rightarrow \ker f=\{\mathbf{0}\}$ και η διάσταση του πυρήνα είναι μηδέν, (Ορισμός 4.15).

iii) Επειδή η απεικόνιση f είναι γραμμική και από το ερώτημα (ii) ισχύει $\ker f=\{\mathbf{0}\}$, σύμφωνα με την ισοδυναμία των προτάσεων (iv)-(vi) της Πρότασης 5.9, μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ είναι το σύνολο $S_{\operatorname{Im} f}=\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\}$, όπου $S=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έτσι έχουμε

$$f(\boldsymbol{e}_1)= f(1,0,0)=(1,0,1),\ f(\boldsymbol{e}_2)= f(0,1,0)=(2,1,1),\ f(\boldsymbol{e}_3)= f(0,0,1)=(-1,2,-1)$$

και $\dim\operatorname{Im} f=3$.

Παρατήρηση : Όταν είναι γνωστή η γραμμική απεικόνιση, ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της βάσης της εικόνας είναι να βρεθούν πρώτα τα διανύσματα που παράγουν την $\operatorname{Im} f$ και κατόπιν, χρησιμοποιώντας τους Αλγορίθμους του Κεφαλαίου 4, να κατασκευαστεί μία βάση του υποχώρου $\operatorname{Im} f$. Έτσι, για τη συγκεκριμένη απεικόνιση f, έχουμε

$$f(x,y,z)=(x+2y-z,\ y+2z,\ x+y-z)=x(1,0,1)+y(2,2,1)+z(-1,2,-1),$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Im} f=span(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$, με $\boldsymbol{v}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(2,2,1)$ και $\boldsymbol{v}_3=(-1,2,-1)$.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν τα τοποθετήσουμε ως στήλες σε έναν πίνακα $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \boldsymbol{v}_3)$, τότε $\det A = 2 \neq 0$, συνεπώς, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Από την ισοδυναμία (i)-(iii) της Πρότασης 5.12 (ή εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2) είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα, μία βάση της εικόνας είναι το σύνολο $S_{\mathrm{Im}\,f} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, διότι επαληθεύονται οι ιδιότητες του Ορισμού 4.14, με $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$. ◆◆◆

Παράδειγμα 5.13 Έστω μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε $f(1,1) = (2,3)$, $f(0,1) = (1,-1)$.

i) Να βρεθεί το διάνυσμα $f(x, y)$.

ii) Έστω ότι $S_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $S_2 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, με $\boldsymbol{u}_1 = (2,5)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,2)$. Αφού διαπιστωθεί ότι το σύνολο S_2 αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^2$, να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς τις βάσεις S_1, S_2 και οι πίνακες αναπαράστασης ως προς τη βάση S_1 και ως προς τη βάση S_2 (ίδια βάση στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της απεικόνισης) .

iii) Αν η f είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση, να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}.

Απόδειξη : i) Αναζητούμε τον τύπο της απεικόνισης. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.1 (iv), η απεικόνιση για να είναι γραμμική, πρέπει να είναι της μορφής

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy), \text{ για } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση, με τα διανύσματα των εικόνων της f από την υπόθεση, έχουμε,

$$f(1,1) = (2,3) \Leftrightarrow (a+b, c+d) = (2,3) \quad \text{και} \quad f(0,1) = (1,-1) \Leftrightarrow (b,d) = (1,-1),$$

από όπου προκύπτει ότι το σύστημα των εξισώσεων

$$a + b = 2, \quad c + d = 3, \quad b = 1 \quad \text{και} \quad d = -1.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι : $a = b = 1$, $c = 4$ και $d = -1$.

Επομένως, η απεικόνιση έχει τύπο

$$f(x, y) = (x + y, 4x - y). \tag{5.35}$$

ii) Αν τοποθετήσουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ ως στήλες ενός πίνακα, διαπιστώνουμε ότι

$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} = -1 \neq 0$, άρα το S_2 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, (Πόρισμα 4.4).

Από τον τύπο της f στην (5.35) και τις ισότητες στην (5.17), βρίσκουμε τον πίνακα αναπαράστασης, που κατασκευάζεται όπως αναφέρεται στην Παρατήρηση 5.3 (i) και την (5.18).

▪ Στο πεδίο ορισμού της f θεωρούμε βάση την S_1 και στην εικόνα της f το σύνολο S_2.

Πρώτα υπολογίζουμε τις εικόνες της γραμμικής απεικόνισης, από τον τύπο της στην (5.35), και κατόπιν εκφράζουμε καθένα από τα διανύσματα των εικόνων ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης S_2. Έτσι έχουμε

$$f(1,0) = (1,4) = 2(2,5) - 3(1,2) \quad \text{και} \quad f(0,1) = (1,-1) = -3(2,5) + 7(1,2).$$

Ο πίνακας αναπαράστασης κατασκευάζεται όπως στην (5.18) και είναι

$$(f)_{S_1,S_2} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 7\end{pmatrix}.$$

▪ Στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της f θεωρούμε βάση το σύνολο S_1.

Όμοια, έχουμε ότι

$$f(1,0) = (1,4) = 1(1,0) + 4(0,1) \quad \text{και} \quad f(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1).$$

Ο πίνακας αναπαράστασης είναι : $(f)_{S_1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

▪ Στο πεδίο ορισμού και στην εικόνα της f θεωρούμε βάση το σύνολο S_2.

Όμοια, έχουμε ότι

$$f(2,5) = (7,3) = -11(2,5) + 29(1,2) \quad \text{και} \quad f(1,2) = (3,2) = -4(2,5) + 11(1,2).$$

Ο πίνακας αναπαράστασης είναι : $(f)_{S_2} = \begin{pmatrix}-11 & -4\\ 29 & 11\end{pmatrix}$.

iii) Θεωρούμε πίνακα αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης f τον πίνακα ως προς την κανονική βάση $(f)_{S_1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix} = A$, ο οποίος έχει $\det A = -5$, από όπου συμπεραίνουμε ότι είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, η γραμμική απεικόνιση f είναι αντιστρέψιμη και ο πίνακας αναπαράστασης της f^{-1} είναι ο A^{-1}, ως προς την κανονική βάση S_1.

Από την ισότητα στην (5.21) έχουμε

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x+y \\ 4x-y \end{pmatrix}.$$

Επομένως, $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{5}(x+y, 4x-y)$.

Παρατήρηση : Ο τύπος της f^{-1} μπορεί να υπολογισθεί από οποιονδήποτε πίνακα αναπαράστασης, ο οποίος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας οποιεσδήποτε βάσεις στο διανυσματικό χώρο του πεδίου ορισμού και της εικόνας. Συνήθως, επιλέγουμε τον πίνακα αναπαράστασης που υπολογίσθηκε ως προς την κανονική βάση για απλοποίηση πράξεων και συντομία. ◆◆◆

Παράδειγμα 5.14 Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Να εξετάσετε αν οι πίνακες είναι όμοιοι.

ii) Αν οι A, B είναι όμοιοι, να επαληθεύσετε τις ιδιότητες που δίνονται στην (5.34).

Απόδειξη : i) Αν οι πίνακες είναι όμοιοι, πρέπει να ισχύει η ισότητα στην (5.33), δηλαδή πρέπει να υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τέτοιος ώστε

$$PA = BP. \tag{5.36}$$

Κάνοντας πράξεις με τους πίνακες A,B,P στην (5.36) έχουμε :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b & -a+b \\ 3c+2d & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία ισότητα πινάκων προκύπτει το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} a+2b+c \quad &= 0 \\ -a \; -b \quad +d &= 0 \\ -a \quad +c+2d &= 0 \\ -b-c \quad -d &= 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας G των συντελεστών του συστήματος έχει $r(G) = 2$, όπως υπολογίζεται από τον πίνακα κλιμακωτής μορφής $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.13 το ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων

$\dim N(G) = 4 - 2 = 2$. Συνεπώς, η λύση του συστήματος είναι $a = c + 2d$, $b = -c - d$, $c, d \in \mathbb{R}$. Άρα, οι πίνακες P είναι της μορφής

$$P = \begin{pmatrix} c+2d & -c-d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Αν θέσουμε $c = 1$, $d = 0$, διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, εύκολα επαληθεύεται η ισότητα $A = P_1^{-1} B P_1$, άρα οι πίνακες A, B είναι όμοιοι.

ii) Για την επαλήθευση των ιδιοτήτων των ομοίων πινάκων έχουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det B.$$

Από τον ορισμό του ίχνους πίνακα (Ορισμός 1.2), έχουμε

$$trA = a_{11} + a_{22} = 3 + 1 = 2 + 2 = b_{11} + b_{22} = trB.$$

Επειδή $\det A = \det B = 5 \neq 0$, σύμφωνα με την Πρόταση 5.12 και την ισοδυναμία των προτάσεων (i)-(ii), έχουμε $r(A) = 2 = r(B)$. ◆◆◆

Εφαρμογή 5.2 *Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, τέτοια ώστε η εικόνα της f να παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,1,5,2)$.*

Απόδειξη : Έστω ότι επιλέγουμε το σύνολο $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ να είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1,2,1,1),\ f(\boldsymbol{e}_2) = (3,1,5,2) \text{ και } f(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0,0).$$

Είναι φανερό ότι η εικόνα της f παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ και ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ περιέχει το μηδενικό στοιχείο του χώρου. Για να βρούμε τον τύπο της *f*, αξιοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και έχουμε

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) + zf(\boldsymbol{e}_3) \\ &= x(1,2,1,1) + y(3,1,5,2) + z(0,0,0,0) \\ &= (x+3y, 2x+y, x+5y, x+2y). \end{aligned}$$

◆◆◆

Εφαρμογή 5.3 *Έστω η γραμμική απεικόνιση με $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με*

$$f(x,y,z)=(x+y-z,\ 2x+y,\ x+2y-3z,\ 3x+2y+az)$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$, *να βρεθούν οι διαστάσεις* , $\dim \operatorname{Im} f$ και $\dim\ker f$.

Απόδειξη : Έστω ότι επιλέγουμε το σύνολο $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ να είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, η εικόνα της f παράγεται από τα διανύσματα $f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3)$, τα οποία υπολογίζονται από τον τύπο της f και είναι:

$f(\boldsymbol{e}_1)=f(1,0,0)=(1,2,1,3)=\boldsymbol{v}_1$, $\qquad f(\boldsymbol{e}_2)=f(0,1,0)=(1,1,2,2)=\boldsymbol{v}_2$,

$f(\boldsymbol{e}_3)=f(0,0,1)=(-1,0,-3,a)=\boldsymbol{v}_3$.

Αναζητώντας μία βάση για το $\operatorname{Im} f$, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 4.3, σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$, δηλαδή $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\1&1&2&2\\-1&0&-3&a\end{pmatrix}$.

Μετά από κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών στον A καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$K=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}.$$

- Αν $a+1=0$, τότε ο πίνακας A έχει $r(A)=2$. Άρα, τα δύο πρώτα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ αποτελούν μία βάση της εικόνας της f με $\dim\operatorname{Im} f=2$.

Από τη σχέση των διαστάσεων των χώρων στην (5.3) βρίσκουμε

$$\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\operatorname{Im} f=3-2=1.$$

- Αν $a+1\neq 0$, τότε η κλιμακωτή μορφή του πίνακα K είναι $\hat{K}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

από όπου συμπεραίνουμε ότι $r(A)=3$. Άρα, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ αποτελούν μία βάση της εικόνας της f με $\dim\operatorname{Im} f=3$. Από τη σχέση των διαστάσεων στην (5.3) βρίσκουμε ότι

$$\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\operatorname{Im} f=3-3=0.$$

♦♦♦

Εφαρμογή 5.4 *Έστω* $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ *και η γραμμική απεικόνιση* $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ με $f(X)=AX-XA$.

i) *Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα* $\ker f$ *της απεικόνισης* f.

ii) *Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση της εικόνας* $\operatorname{Im} f$ *της απεικόνισης* f.

Απόδειξη : Έστω $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Η γραμμική απεικόνιση γράφεται :

$$\begin{aligned} f(X)=AX-XA&=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+2b & -a+3b\\ c+2d & -c+3d\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-2b-c & a-2b-d\\ 2a+2c-2d & 2b+c\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.37}$$

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 (i), για τον πυρήνα της f, έχουμε :

$$X\in\ker f \Leftrightarrow f(X)=\mathbb{O}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2b-c & a-2b-d\\ 2a+2c-2d & 2b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{aligned} -2b-c\quad &=0\\ a-2b\quad -d&=0\\ 2a\quad +2c-2d&=0\\ 2b+c\quad &=0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι

$B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Μετά από τις γραμμοπράξεις $r_1\leftrightarrow r_2$, $r_2\to -2r_1+r_3$, $r_3\to 2r_2+r_3$ και $r_4\to r_2+r_4$ καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$K=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Από την κλιμακωτή μορφή K, βρίσκουμε ότι $r(B)=2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.13, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων $\dim N(B)=4-2=2$. Συνεπώς, η λύση του ομογενούς συστήματος είναι : $d=a-2b$, $c=-2b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Έτσι, κάθε στοιχείο που ανήκει στον πυρήνα της f γράφεται

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a-2b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=aI_2+bE,\ \ a,b\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, $\ker f=span(I_2,E)$.

(b) Επίσης, οι πίνακες I_2, E είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$.
Πράγματι, η διανυσματική εξίσωση

$$a_1 I + a_2 E = \mathbb{O} \Leftrightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

από όπου εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει μοναδική λύση την $a_1 = a_2 = 0$. Οπότε, επαληθεύεται η ισότητα (4.22) του Ορισμού 4.12. Δηλαδή, οι πίνακες I_2, E είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Άρα, μία βάση του πυρήνα της απεικόνισης είναι το σύνολο $S_{\ker f} = \{I_2, E\}$, διότι επαληθεύονται οι δύο ιδιότητες (a), (b) του Ορισμού 4.14, και ακόμη $\dim \ker f = 2$.

ii) Επειδή $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, (Παράδειγμα 4.10 (ii)), από την ισότητα των διαστάσεων των χώρων στην (5.3) έχουμε

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \ker f = 4 - 2 = 2.$$

Επομένως, για να βρούμε μία βάση της εικόνας, αρκεί να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του χώρου $\operatorname{Im} f$, (Πρόταση 4.15). Είναι εύλογο να αναζητήσουμε αυτά τα στοιχεία στις εικόνες των πινάκων της κανονικής βάσης $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ του $M_2(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.8 (iii)). Παρατηρούμε ότι οι εικόνες των πινάκων E_{11}, E_{12} υπολογίζονται από την (5.37) και είναι

$$f(E_{11}) = f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = S_1, \quad f(E_{12}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = S_2.$$

Οι πίνακες S_1, S_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$, διότι, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, η διανυσματική εξίσωση

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 = \mathbb{O} \Leftrightarrow a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

έχει μοναδική λύση $a_1 = a_2 = 0$, (Ορισμός 4.12).

Συνεπώς, μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ είναι το σύνολο $S_{\operatorname{Im} f} = \{S_1, S_2\}$. ◆◆◆