Κεφάλαιο 4

Δ Ι Α Ν Υ Σ Μ Α Τ Ι Κ Ο Ι   Χ Ω Ρ Ο Ι

4.1 Διανύσματα

4.1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι γνωστό ότι δύο ευθείες έχουν την ίδια *διεύθυνση*, όταν είναι παράλληλες ή όταν συμπίπτουν. Το σύνολο όλων των παράλληλων ευθειών προς μια δεδομένη ευθεία (ε) λέγεται **διεύθυνση** της ευθείας (ε). Δύο ημιευθείες, Ax, By, θεωρούμε ότι έχουν την ίδια *φορά* αν ανήκουν στην ίδια ευθεία και η μία ημιευθεία περιέχει την άλλη. Το (Α,Β), διατεταγμένο ζεύγος των σημείων Α, Β ενός επιπέδου *ε*, ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το Α και πέρας το Β. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται **εφαρμοστό διάνυσμα** ή **διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ή απλούστερα $\mathbf{AB}$. Διεύθυνση και φορά του εφαρμοστού διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι η διεύθυνση και η φορά της αντίστοιχης ημιευθείας AB. Η αρχή Α του διανύσματος $\mathbf{AB}$ ονομάζεται **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος. Δύο εφαρμοστά διανύσματα, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{\Gamma\Delta}$, που βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ονομάζονται **συγγραμμικά**, ενώ όταν βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες ονομάζονται **παράλληλα** και συμβολίζονται $\mathbf{AB} // \mathbf{\Gamma\Delta}$. Ειδικότερα, δύο παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{\Gamma\Delta}$, ονομάζονται **ομόρροπα**, (αντίστοιχα **αντίρροπα**), όταν οι ημιευθείες ΑΒ, ΓΔ έχουν την ίδια φορά, (αντίστοιχα αντίθετη φορά). Αν οι διευθύνσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΓΔ είναι κάθετες, τα αντίστοιχα διανύσματα ονομάζονται **κάθετα** ή **ορθογώνια** και συμβολίζονται $\mathbf{AB} \perp \mathbf{\Gamma\Delta}$.

Μέτρο ή **μήκος** του εφαρμοστού διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ονομάζεται το μήκος του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος AB, ως προς μία μονάδα μήκους, και συμβολίζεται $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ ή $\|\mathbf{AB}\|$. Αν $\|\mathbf{AB}\| = 1$, το $\mathbf{AB}$ ονομάζεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.

Το διάνυσμα $\mathbf{AA}$ ονομάζεται **μηδενικό**, η διεύθυνση και η φορά του δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη και ισχύει $\|\mathbf{AA}\| = 0$.

Δύο διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται **ίσα** αν και μόνο αν είναι ομόρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ίσα προς ένα δεδομένο διάνυσμα $\mathbf{AB}$, ονομάζεται **ελεύθερο διάνυσμα** και το $\mathbf{AB}$ θεωρείται ένας αντιπρόσωπος του ελεύθερου διανύσματος. Δηλαδή, μπορεί κάποιος να «δει» το ελεύθερο διάνυσμα ως ένα διάνυσμα που έχει τη δυνατότητα να «ολισθαίνει» παράλληλα με τον εαυτό του, διατηρώντας την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο. Στο χαρακτηρισμό «ελεύθερο διάνυσμα» μας οδήγησαν οι ανάγκες που προκύπτουν κατά την επίλυση φυσικών προβλημάτων. Ειδικότερα ο χαρακτηρισμός αυτός αφορά την ελευθερία που έχουμε σχετικά με την επιλογή του σημείου εφαρμογής του αντιπροσώπου διανύσματος.

Θεωρώντας ένα σταθερό σημείο Ο του επιπέδου *ε* είναι φανερό ότι σε κάθε σημείο Α του *ε* αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα διάνυσμα, το $\mathbf{OA}$. Συνεπώς υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία Α του επιπέδου *ε* και στα αντίστοιχα διανύσματα $\mathbf{OA}$ και αντίστροφα. Το διάνυσμα $\mathbf{OA}$ συνήθως ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα** του σημείου Α. Το σταθερό σημείο Ο ονομάζεται σημείο εφαρμογής ή σημείο αναφοράς.

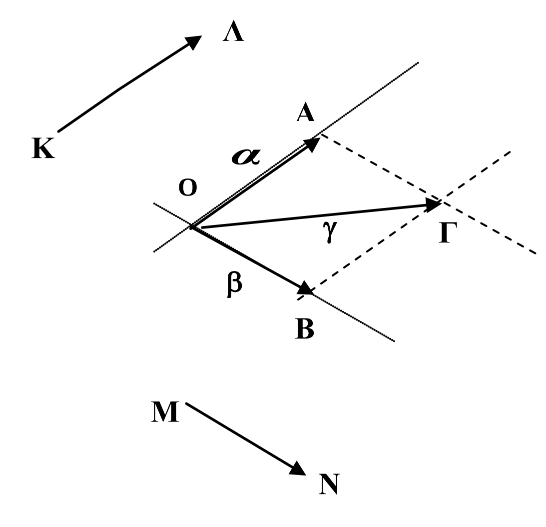
Είναι φανερό ότι όλα τα διανύσματα μπορούν να «ολισθαίνουν» προς το σημείο αναφοράς Ο, οπότε στο εξής με τον όρο ελεύθερο διάνυσμα θα εννοούμε το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης, το οποίο θα συμβολίζουμε με το μικρό γράμμα της αλφαβήτου $\boldsymbol{\alpha}$, γράμμα που θα υποδηλώνει το πέρας του αντίστοιχου διανύσματος θέσης $\mathbf{OA}$.

4.1.2 Πράξεις διανυσμάτων

Οι ορισμοί των δύο πράξεων, πρόσθεσης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού διανύσματος επί αριθμό (ή βαθμωτού πολλαπλασιασμού), στηρίζονται στη Γεωμετρία. Ας θεωρήσουμε ότι, δύο διανύσματα, **ΚΛ** και **ΜΝ**, έχουν αντίστοιχα ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{OA} = \boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{OB} = \boldsymbol{\beta}$, όπου Ο είναι ένα τυχαίο σημείο αναφοράς στο επίπεδο *ε*.

Ορισμός 4.1

Άθροισμα $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ *των δύο διανυσμάτων ορίζεται να είναι το ελεύθερο διάνυσμα* $\mathbf{O\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}$*, το οποίο είναι ίσο με τη διαγώνιο ΟΓ του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ και γράφεται* $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, (βλέπε Σχήμα 4.1).

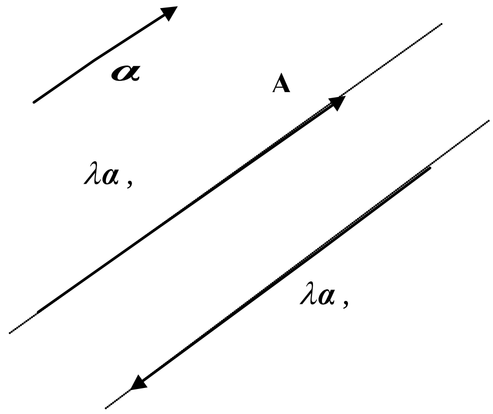


Σχήμα 4.1

Ορισμός 4.2

Γινόμενο $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ *του διανύσματος* $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ *επί έναν αριθμό* $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ *ορίζεται να είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο με το* $\boldsymbol{\alpha}$, *όταν* $\lambda > 0$, *και αντίρροπο στο* $\boldsymbol{\alpha}$, *όταν* $\lambda < 0$. *Το γινόμενο έχει μέτρο* $\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{\alpha}\|$, (βλέπε Σχήμα 4.2).

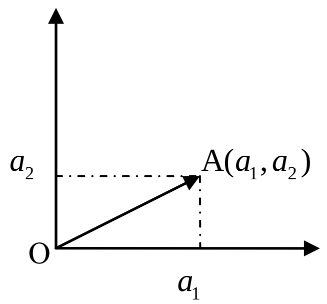
Στην περίπτωση όπου $\lambda = 0$ *ή* $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, *ορίζεται να είναι* $0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ *και* $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, *αντίστοιχα.*



Σχήμα 4.2

Για $\lambda = -1$, το διάνυσμα $(-1)\boldsymbol{\alpha}$ έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο με το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$, αλλά αντίθετη φορά. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται **αντίθετο** του $\boldsymbol{\alpha}$ και συμβολίζεται με $-\boldsymbol{\alpha}$. Είναι φανερό ότι, αν το $\mathbf{AB}$ είναι ένας αντιπρόσωπος του ελεύθερου διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$, τότε το $\mathbf{BA}$ είναι ένας αντιπρόσωπος του $-\boldsymbol{\alpha}$. Οπότε για συντομία μπορούμε να σημειώνουμε $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$.

Παρατήρηση 4.1 Εδώ χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι, στον Ορισμό 1.2 ένας πίνακας τύπου 2×1 ονομάζεται πίνακας-στήλη ή διάνυσμα. Η ονομασία αυτή δεν είναι τυχαία, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου με τα στοιχεία των αντίστοιχων πινάκων. Όπως αναφέραμε στην ενότητα 4.1.1, ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου ε και στα ελεύθερα διανύσματα υπάρχει μοναδική αντιστοιχία.



Σχήμα 4.3

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ του επιπέδου, αυτό καθορίζεται πλήρως από τις συντεταγμένες του a_1, a_2, ή από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{OA} \equiv \boldsymbol{\alpha}$, το οποίο αντιστοιχεί στο Α κατά μοναδικό τρόπο, ή από τον 2×1 πίνακα-στήλη με στοιχεία τις συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, δηλαδή, τον πίνακα-γραμμή $(a_1 \quad a_2)^t$, (βλέπε Σχήμα 4.3).

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα επί των ορθογωνίων αξόνων του επιπέδου, $\mathbb{R}^2$, είναι $\boldsymbol{e}_1$ και $\boldsymbol{e}_2$, το τυχαίο διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$.

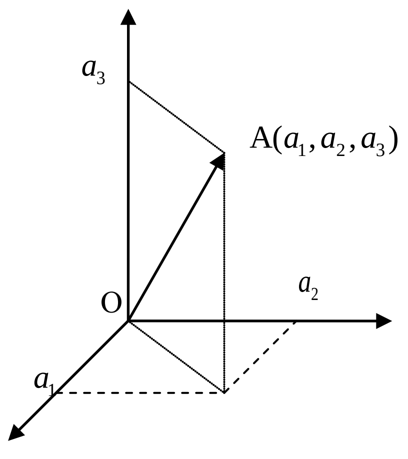
Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε αυτήν την αντιστοιχία, ανάμεσα στο σημείο $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ και το διάνυσμα θέσης $\mathbf{OA} \equiv \boldsymbol{\alpha}$ ή τον πίνακα $(a_1 \quad a_2)^t$, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (a_1, a_2) \leftrightarrow (a_1 \quad a_2)^t$.

Αυτή η ιδέα της αντιστοιχίας επεκτείνεται στο χώρο, $\mathbb{R}^3$.

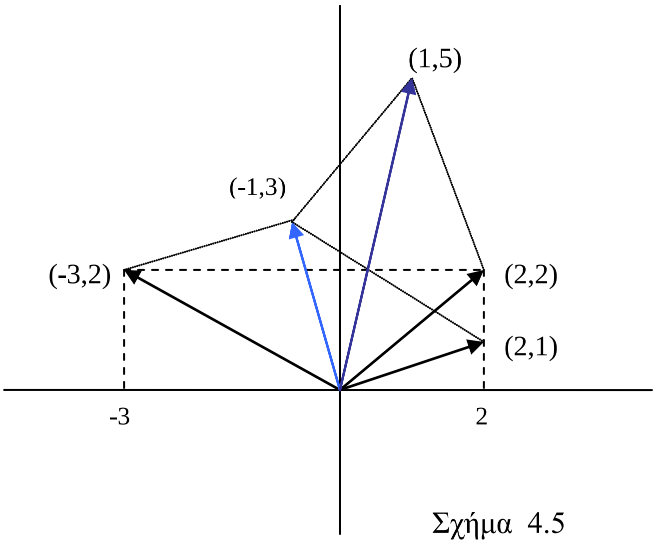
Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$, αυτό καθορίζεται πλήρως από τις συντεταγμένες του a_1, a_2, a_3, ή από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{OA} \equiv \boldsymbol{\alpha}$, το οποίο αντιστοιχεί στο A κατά μοναδικό τρόπο, ή από τον 3×1 πίνακα-στήλη $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)^t$, που έχει στοιχεία τις συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, (βλέπε Σχήμα 4.4).

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα επί των τρισορθογωνίων αξόνων του χώρου είναι $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ και $\boldsymbol{e}_3$, το τυχαίο διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

Η παραπάνω αντιστοιχία περιγράφεται $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) \leftrightarrow (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^t$.



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5

Γενικά, αν $\mathrm{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, σε αυτό αντιστοιχίζουμε **μονοσήμαντα** :

i) το διάνυσμα θέσης $\mathbf{OA} \equiv \boldsymbol{\alpha}$ ή

ii) τη διατεταγμένη $n-$ άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, ή

iii) τον $n \times 1$ πίνακα-γραμμή $(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)^t$.

Ως σύμβολο αντιστοιχίας χρησιμοποιείται $\leftrightarrow$. Όπως θα διαπιστώσουμε στην ενότητα 4.2, η έννοια του «διανύσματος» είναι ευρύτερη και σε πολλές περιπτώσεις απαλλαγμένη από γεωμετρικά χαρακτηριστικά, γι΄ αυτό η παραπάνω αντιστοιχία και ο συμβολισμός της, $\leftrightarrow$, δε θα χρησιμοποιείται. Δηλαδή, στην ενότητα 4.2 κάθε διάνυσμα θα συμβολίζεται $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Για τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$, αντιστοιχώντας σε κάθε διάνυσμα τις συντεταγμένες του σημείου, που είναι το πέρας του αντίστοιχου διανύσματος θέσης, οι πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός επί έναν πραγματικό αριθμό, -οι οποίες με γεωμετρικό τρόπο ορίστηκαν στους Ορισμούς 4.1 και 4.2-, ορίζονται και αναλυτικά να είναι :

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \tag{4.1}$$

$$\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n), \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Εδώ δηλαδή, σύμφωνα με την αντιστοιχία (i)-(ii), τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ θεωρούνται διατεταγμένες $n-$ άδες του χώρου $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, με $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, (βλέπε Παράδειγμα 4.1(i)).

Αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε διάνυσμα τον πίνακα με στοιχεία τις συντεταγμένες του σημείου, το οποίο είναι το πέρας του διανύσματος θέσης, οι πράξεις των Ορισμών 4.1 και 4.2 γράφονται

$$(a_1 \quad a_2 \quad ... \quad a_n)^t + (b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n)^t = (a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad ... \quad a_n + b_n)^t \tag{4.3}$$

$$\lambda(a_1 \quad a_2 \quad ... \quad a_n)^t = (\lambda a_1 \quad \lambda a_2 \quad ... \quad \lambda a_n)^t, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Εδώ τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ αντιστοιχούν σε πίνακες τύπου $n \times 1$, δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)^t$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n)^t$, με $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, (βλέπε αντιστοιχία (i)-(iii)).

Για παράδειγμα, έστω τα διανύσματα θέσης $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ με $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (2,1)$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (-3,2)$ και $\boldsymbol{\gamma} \leftrightarrow (2,2)$. Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 4.1, για τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, βρίσκουμε ως άθροισμα $(-1,3)$, που αντιστοιχεί στη διαγώνιο, $\boldsymbol{\delta}$, του παραλληλογράμμου με πλευρές τα αντίστοιχα διανύσματα. Κατόπιν για τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, εφαρμόζουμε πάλι τον

Ορισμό 4.1, οπότε η διαγώνιος $(1,5)$ είναι το άθροισμα των τριών διανυσμάτων. Το άθροισμα παρουσιάζεται γεωμετρικά στο Σχήμα 4.5.

Επίσης, από τη σχέση (4.1) μπορούμε συντομότερα να διαπιστώσουμε ότι

$$(2,1)+(-3,2)+(2,2)=(2-3+2,1+2+2)=(1,5)$$

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται οι σημαντικότερες ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού διανύσματος επί αριθμό.

Πρόταση 4.1

Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής

i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

iii) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

iv) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

v) $k_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\beta}$

vi) $(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\alpha}$

vii) $(k_1k_2)\boldsymbol{\alpha}=k_1(k_2\boldsymbol{\alpha})$

viii) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,

όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί στην αρχή του συστήματος αναφοράς και στον μηδενικό πίνακα-στήλη.

Απόδειξη : Θεωρώντας ότι τα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ είναι διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.1 αντιστοιχία (i)-(iii), το καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε έναν πίνακα, τύπου $n\times 1$, οπότε έχουμε ότι

$$\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)^t, \quad \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)^t \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\gamma} \leftrightarrow (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n)^t.$$

Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 1.1. ◆◆◆

4.1.3 Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός 4.3

*Έστω $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ με $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (b_1, b_2, \dots, b_n)$, για κάθε $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$. **Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** των πραγματικών διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός*

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{4.5}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την αντιστοιχία διανυσμάτων-πινάκων και τη σχέση (4.5) μπορούμε να γράψουμε :

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{\beta} \tag{4.6}$$

Αν $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ με $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_n)$ από την (4.5) έχουμε $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, από όπου οδηγούμαστε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.4

Μέτρο *ή* ***μήκος*** *ενός διανύσματος* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ *με* $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_n)$ *ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός αριθμός*

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,. \tag{4.7}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$, με $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (0,1,1)$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (1,-1,-2)$, από την (4.5) έχουμε $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = -3$, $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2$ και $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 6$.

Από την (4.7) υπολογίζουμε το μέτρο του $\boldsymbol{\alpha}$ που είναι $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = \sqrt{2}$, και του $\boldsymbol{\beta}$ που είναι $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \rangle} = \sqrt{6}$.

Επίσης από τη σχέση (4.1) μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, το οποίο είναι $(1, 0, -1)$, οπότε από την (4.7) βρίσκουμε ότι $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Με τα συγκεκριμένα διανύσματα εύκολα επαληθεύουμε, την *τριγωνική ανισότητα* (ανισότητα Minkowski)

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\| \tag{4.8}$$

καθώς και τη γνωστή στη βιβλιογραφία ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \tag{4.9}$$

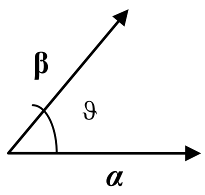
Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, από την (4.9) έχουμε

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \leq 1.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανίσωση, αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα ένας πραγματικός αριθμός ϑ, με $0 \leq \vartheta \leq \pi$, τέτοιος ώστε

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|}. \tag{4.10}$$

Ο αριθμός ϑ ορίζεται να είναι η **γωνία** των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, (βλέπε Σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6

Προφανώς, όταν τα διανύσματα είναι κάθετα, η γωνία τους είναι $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, άρα $\cos\vartheta = 0$. Αντίστροφα, αν $\cos\vartheta = 0$, τότε από την (4.10) έχουμε $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0$.

Έτσι αποδεικνύεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι κάθετα δύο διανύσματα, η οποία διατυπώνεται στην εφαρμογή που ακολουθεί.

Εφαρμογή 4.1

Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας των δύο διανυσμάτων είναι το σύνηθες εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν, δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0. \tag{4.11}$$

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$, με $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (-1, -1, \sqrt{6})$, $\boldsymbol{\beta} \leftrightarrow (1, 1, 0)$, σχηματίζουν γωνία $\frac{2\pi}{3}$.

Πράγματι, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο από την (4.5) είναι

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + \sqrt{6}\cdot 0 = -2,$$

τα μέτρα των διανυσμάτων από την (4.7) είναι

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} \quad \text{και} \quad \|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Οπότε με αντικατάσταση των παραπάνω στην (4.10), έχουμε

$\cos\vartheta = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} = \frac{-2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, από όπου προκύπτει $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$.

Επίσης, τα διανύσματα $\boldsymbol{\gamma} \leftrightarrow (3,3,3)$, $\boldsymbol{\delta} \leftrightarrow (-1,2,-1)$ είναι κάθετα, διότι έχουν $\langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \rangle = 3\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 3\cdot(-1) = 0$, επομένως ισχύει η συνθήκη της Εφαρμογής 4.1.

Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες που διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 4.3.

Πρόταση 4.2

Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής

i) $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$

ii) $\langle k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta} \rangle = k\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$

iii) $\langle \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$

iv) $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$

v) $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq 0$

vi) $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

4.1.4 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του χώρου $\mathbb{R}^3$

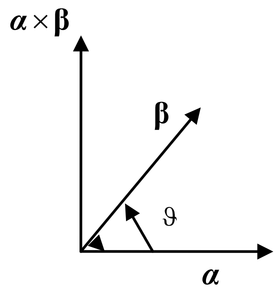
Ορισμός 4.5

Εξωτερικό γινόμενο *των μη μηδενικών διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα νέο διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που δημιουργούν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, με φορά εκείνη του δεξιόστροφου κοχλία*[1]*, και μέτρο $\|\boldsymbol{\gamma}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \cdot \sin\vartheta$, όπου ϑ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.*

Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$ σημειώνεται $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$, και παρουσιάζεται γεωμετρικά στο Σχήμα 4.7.

Αν είναι $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ή $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

[1] Ο δεξιόστροφος κοχλίας κινείται στη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ στρεφόμενος κατά τη γωνία από το $\boldsymbol{\alpha}$ προς το $\boldsymbol{\beta}$.



Σχήμα 4.7

Για παράδειγμα, έστω $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^3$ με $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow(3,2,1)$, $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(2,-1,3)$. Από την (4.7) τα μέτρα των διανυσμάτων είναι :

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14} \quad \text{και}$$

$$\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Η γωνία των διανυσμάτων υπολογίζεται από την (4.10), για την οποία απαιτείται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=3\cdot2+2\cdot(-1)+1\cdot3=7$.

Άρα, $\cos\vartheta=\dfrac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}=\dfrac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$, συνεπώς $\vartheta=\dfrac{\pi}{3}$.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.5, το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, που έχει μέτρο

$$\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|\cdot\sin\vartheta=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{3}=\sqrt{14}^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3},$$

και είναι κάθετο στο επίπεδο που δημιουργούν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, με φορά αυτή του δεξιόστροφου κοχλία. Για να γνωρίζουμε ακριβώς τη θέση του διανύσματος, χρειάζεται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$. Από την Παρατήρηση 4.1, (i)-(ii), το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες (x,y,z). Επίσης το $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ πρέπει να είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, άρα θα είναι κάθετο σε καθένα από τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$. Έτσι, αντικαθιστώντας στη συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων, (σχέση (4.11)), και στο μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, (σχέση (4.7)), καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\beta}\\ \|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|=7\sqrt{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\langle\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0\\ \langle\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle=0\\ \|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|=7\sqrt{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}3x+2y+z=0\\ 2x-y+3z=0\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=7\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

Η λύση του συστήματος είναι : $(x_1,y_1,z_1)=(7,-7,-7)$ ή $(x_2,y_2,z_2)=(-7,7,7)$.

Επιλέγουμε $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(x_1,y_1,z_1)=(7,-7,-7)$, εξαιτίας της φοράς που υποδεικνύει ο δεξιόστροφος κοχλίας.

Το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζεται στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.13), με τρόπο πολύ πιο σύντομο.

Εφαρμογή 4.2

Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *διανύσματα του χώρου* $\mathbb{R}^3$*. Τα διανύσματα είναι παράλληλα (συγγραμμικά) αν και μόνο αν* $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Απόδειξη : Αν θεωρήσουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι παράλληλα, η γωνία μεταξύ τους είναι $\vartheta = 0$ ή $\vartheta = \pi$, δηλαδή $\sin\vartheta = 0$, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.5 προκύπτει άμεσα $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ότι για τα μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ συμβαίνει $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, προφανώς πρέπει να ισχύει $\sin\vartheta = 0$ (Ορισμός 4.5), το οποίο ισχύει όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι παράλληλα ή συγγραμμικά. ◆◆◆

Για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

Πρόταση 4.3

Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ *διανύσματα του χώρου* $\mathbb{R}^3$ *και* $k \in \mathbb{R}$*. Τότε ισχύουν τα εξής*

i) $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}$

ii) $(k\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \times (k\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$

iii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})$

iv) $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma})$

Ας θεωρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα επί των τρισορθογωνίων αξόνων του $\mathbb{R}^3$, που συμβολίζονται $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ και $\boldsymbol{e}_3$, και για τα οποία ισχύουν οι αντιστοιχίες $\boldsymbol{e}_1 \leftrightarrow (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 \leftrightarrow (0,1,0)$ και $\boldsymbol{e}_3 \leftrightarrow (0,0,1)$.

Από την (4.7) είναι $\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = \|\boldsymbol{e}_3\| = 1$, γι' αυτό ονομάζονται μοναδιαία. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (4.11), διαπιστώνουμε ότι τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, συνεπώς για όλες τις γωνίες που δημιουργούνται μεταξύ των διαφορετικών διανυσμάτων ισχύει $\sin\vartheta = 1$, ενώ για τη μηδενική γωνία, που δημιουργεί το διάνυσμα με τον εαυτό του, είναι $\sin 0 = 0$.

Η γωνία μεταξύ των παραπάνω διανυσμάτων δικαιολογεί την τοποθέτησή τους στο τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 4.5, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\|\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2\| = \|\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3\| = \|\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3\| = 1$$

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ και $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$.

(4.12)

Αν θεωρήσουμε δύο τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.1 (i)-(ii) έχουμε την αντιστοιχία $\boldsymbol{a} \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$ και $\boldsymbol{b} \leftrightarrow (b_1, b_2, b_3)$. Επίσης, ως προς το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, τα διανύσματα γράφονται κατά μοναδικό τρόπο

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3,\ a_i \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3,\ b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$$

Αρχικά εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της Πρότασης 4.3 (iii)-(ii)-(iv)-(ii), ακολούθως τις σχέσεις (4.12) και τέλος την ιδιότητα (i) της Πρότασης 4.3, παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{b} = \big((a_1\boldsymbol{e}_1) \times \boldsymbol{b}\big) + \big((a_2\boldsymbol{e}_2) \times \boldsymbol{b}\big) + \big((a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{b}\big) \\
&= a_1(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{b}) + a_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{b}) + a_3(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{b}) \\
&= a_1\big(\boldsymbol{e}_1 \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)\big) + a_2\big(\boldsymbol{e}_2 \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)\big) + a_3\big(\boldsymbol{e}_3 \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)\big) \\
&= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2) \\
&= a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) - a_1b_3(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) - a_2b_1(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) - a_3b_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τελευταία «αλγεβρική» έκφραση του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων προκύπτει από την ανάπτυξη της «ορίζουσας»

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της.

Για παράδειγμα, κάνοντας αντικατάσταση στην (4.13) με τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, όπου $\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{b} \leftrightarrow (2, -1, 3)$, καταλήγουμε στο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\boldsymbol{e}_1-7\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3,$$

από το οποίο, μετά την αντιστοίχιση $\boldsymbol{e}_1\leftrightarrow(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2\leftrightarrow(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3\leftrightarrow(0,0,1)$ και τις πράξεις, -όπως αυτές ορίστηκαν στις (4.1) και (4.2)-, παίρνουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{b}$ με συντεταγμένες $(7,-7,-7)$. Το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζεται αν εφαρμοσθεί ο Ορισμός 4.5, αλλά με πολυπλοκότερη διαδικασία.

Στον ακόλουθο ορισμό και για το χώρο $\mathbb{R}^3$, συνδυάζονται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο για μια τριάδα διανυσμάτων.

Ορισμός 4.6

*Για μια τριάδα διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ του $\mathbb{R}^3$, ο πραγματικός αριθμός $\langle\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$ ονομάζεται **μικτό γινόμενο** των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$.*

Το μικτό γινόμενο σημειώνεται $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$.

Εφαρμογή 4.3

Έστω $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$. Το μικτό γινόμενο $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$ δίνεται από τη σχέση

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix},$$

όπου $\boldsymbol{a}\leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(b_1,b_2,b_3)$ και $\boldsymbol{\gamma}\leftrightarrow(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

Απόδειξη : Από την (4.13), αναπτύσσοντας την «ορίζουσα» ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, για $\boldsymbol{a}\leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)$ και $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(b_1,b_2,b_3)$ έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3,$$

οπότε στο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ αντιστοιχεί το σημείο του $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες $\left(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\right)$. Επιπλέον, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$, με $\boldsymbol{\gamma}\leftrightarrow(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, υπολογίζεται από την (4.5), και ισούται με :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=\langle\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle &= \gamma_1(a_2b_3-a_3b_2)+\gamma_2(a_3b_1-a_1b_3)+\gamma_3(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= \gamma_1(a_2b_3-a_3b_2)-\gamma_2(a_1b_3-a_3b_1)+\gamma_3(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= \gamma_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\gamma_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\gamma_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$ ως προς την τρίτη γραμμή, οπότε η ζητούμενη σχέση αποδείχθηκε. ◆◆◆

Για παράδειγμα, το μικτό γινόμενο $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$ των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^3$, όπου $\boldsymbol{\alpha}\leftrightarrow(2,3,-2)$, $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(6,-2,3)$, $\boldsymbol{\gamma}\leftrightarrow(1,-2,1)$ είναι

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 6 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=19.$$

Για το μικτό γινόμενο μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες που διατυπώνονται στην επόμενη εφαρμογή, χρησιμοποιώντας ιδιότητες οριζουσών και την αλγεβρική έκφραση του μικτού γινομένου, που αποδείχθηκε στην Εφαρμογή 4.3.

Εφαρμογή 4.4

Έστω $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ *διανύσματα του χώρου* $\mathbb{R}^3$. *Τότε ισχύουν τα εξής*

i) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}]=[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$

ii) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=-[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]$

iii) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$

όπου $\boldsymbol{a}\leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{\beta}\leftrightarrow(b_1,b_2,b_3)$ *και* $\boldsymbol{\gamma}\leftrightarrow(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

4.2 Ορισμός και παραδείγματα διανυσματικού χώρου

Στη συνέχεια, εκτός από το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, του χώρου $\mathbb{R}^3$ και γενικά του πραγματικού χώρου των n-διαστάσεων, $\mathbb{R}^n$, που επαληθεύουν όλες τις ιδιότητες της Πρότασης 4.1, θα διαπιστώσουμε ότι και άλλα σύνολα έχουν ανάλογες ιδιότητες, αρκεί να εφοδιαστούν με «κατάλληλες πράξεις», αντίστοιχες της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί έναν αριθμό. Σημειώνεται ότι ακολούθως με $\mathbb{F}$ θα συμβολίζεται το σύνολο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 4.7

Ένας $\mathbb{F}$ *–* ***διανυσματικός χώρος*** *είναι ένα μη κενό σύνολο* V *εφοδιασμένο με δύο πράξεις :*

- *την πρόσθεση* $: V \times V \to V \; : (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, *όπου για κάθε* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *ισχύουν οι ιδιότητες:*
  - *i)* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (*αντιμεταθετική*)
  - *ii)* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (*προσεταιριστική*)
  - *iii) υπάρχει ουδέτερο στοιχείο το* $\boldsymbol{0} \in V \; : \; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$
  - *iv) για κάθε* $\boldsymbol{u} \in V$, *υπάρχει το αντίθετο* $-\boldsymbol{u} \in V \; : \; \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.
- *το βαθμωτό πολλαπλασιασμό* $: \mathbb{F} \times V \to V \; : (k, \boldsymbol{v}) \to k\boldsymbol{v}$, *όπου για κάθε* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *και* $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$ *ισχύουν οι ιδιότητες*:
  - *v)* $k_1(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k_1\boldsymbol{u} + k_1\boldsymbol{v}$ (*επιμεριστική*)
  - *vi)* $\left(k_1 + k_2\right)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (*επιμεριστική*)
  - *vii)* $(k_1 k_2)\boldsymbol{u} = k_1(k_2\boldsymbol{u})$
  - *viii)* $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Το $\mathbb{F}$ ονομάζεται **σύνολο συντελεστών** του διανυσματικού χώρου V. Αν το σύνολο των συντελεστών $\mathbb{F}$ είναι το $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ο διανυσματικός χώρος V ονομάζεται **πραγματικός** ή **μιγαδικός** διανυσματικός χώρος, αντίστοιχα, τα δε στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα.**

Παρατήρηση 4.2 i) Στον Ορισμό 4.7, η πράξη της πρόσθεσης είναι αντιμεταθετική, συνεπώς οι ιδιότητες του ουδετέρου και του αντιθέτου στοιχείου (Ορισμός 4.7 (iii)-(iv)) γράφονται $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, αντίστοιχα.

ii) Το ουδέτερο στοιχείο του V, που εμφανίζεται στον Ορισμό 4.7 (iii), ονομάζεται **μηδενικό στοιχείο** του V και θα συμβολίζεται $\mathbf{0}_V$.

Το $\mathbf{0}_V$ είναι μοναδικό, διότι αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει και άλλο ένα μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{0}'_V$, τότε από τον Ορισμό 4.7 (iii) και την Παρατήρηση 4.2 (i) έχουμε:

$\mathbf{0}'_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}'_V$, (θεωρώντας το $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}'_V$), και $\mathbf{0}'_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, (θεωρώντας το $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V$).

Από τις προηγούμενες ισότητες είναι φανερό ότι $\mathbf{0}_V \equiv \mathbf{0}'_V$, άρα το $\mathbf{0}_V$ είναι μοναδικό.

iii) Επίσης, για κάθε $\boldsymbol{u} \in V$, το $-\boldsymbol{u}$, που εμφανίζεται στον Ορισμό 4.7 (iv), είναι μοναδικό και ονομάζεται **αντίθετο** του $\boldsymbol{u}$.

iv) Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, αν και ονομάζονται διανύσματα, μπορεί να μην έχουν καμία σχέση με τα ελεύθερα διανύσματα του χώρου, θεωρία που αναπτύχθηκε στην πρώτη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου, και μπορεί και να μην έχουν κάποια γεωμετρική αναπαράσταση, όπως θα διαπιστώσετε από τα Παραδείγματα 4.1 (ii)-(vi) που ακολουθούν. Ο όρος «διανύσματα» χαρακτηρίζει τα στοιχεία των συνόλων που μπορούν να ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 4.7. Ταύτιση των όρων «διανύσματα» και «ελεύθερα διανύσματα» παρατηρείται στην περίπτωση του πραγματικού διανυσματικού χώρου, βλέπε Παράδειγμα 4.1 (i).

Παράδειγμα 4.1

i) Το σύνολο των διατεταγμένων $n-$άδων πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, όπως ορίζεται στην (4.1), δηλαδή,

$$(a_1,\ a_2,...,a_n) + (b_1,\ b_2,...,b_n) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,...,a_n + b_n)$$

και με την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, όπως ορίζεται στην (4.2),

$$k(a_1,\ a_2,...,a_n) = (ka_1,\ ka_2,...,ka_n),\ k \in \mathbb{R}$$

είναι ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος, διότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που απαιτούνται από τον Ορισμό 4.7, (βλέπε και σύγκρινε με την Πρόταση 4.1). Το μηδενικό στοιχείο είναι το $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \equiv (0,...,0)$ και το αντίθετο του $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι το $-(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Επειδή το $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος, στην ενότητα 4.1 χαρακτηριζόταν χώρος. Επίσης στην ίδια ενότητα και ιδιαίτερα στην Παρατήρηση 4.1(i)-(ii) αναφέρεται ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ελεύθερων διανυσμάτων ή των διανυσμάτων θέσης και των στοιχείων του $\mathbb{R}^n$, γεγονός που δίνει στα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ διπλή ιδιότητα. Έτσι, δεν είναι καθόλου αυθαίρετο να «ταυτίζουμε» τις έννοιες στοιχείο $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ως διατεταγμένη $n-$άδα πραγματικών αριθμών και σημείο $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ στο χώρο των διανυσμάτων θέσης. Ο όρος «χώρος» θα μπορούσε επίσης να δικαιολογηθεί ιδιαίτερα στην περίπτωση $n=3$, όπου υπάρχει και εποπτική αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

ii) Κατά παρόμοιο τρόπο το σύνολο $\mathbb{C}^n$ καθίσταται $\mathbb{C}-$διανυσματικός χώρος.

iii) Το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ όλων των $m\times n$ πραγματικών πινάκων, εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης πινάκων, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 1.5, και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως αυτός ορίστηκε στον Ορισμό 1.6, είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, διότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που απαιτούνται από τον Ορισμό 4.7, (βλέπε απόδειξη Πρότασης 1.1). Το μηδενικό στοιχείο είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbb{O}_{m\times n}$ και το αντίθετο του πίνακα $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι το $-A=\left(-a_{ij}\right)$.

iv) Κατά ανάλογο τρόπο, το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ των $m\times n$ μιγαδικών πινάκων είναι ένας $\mathbb{C}-$διανυσματικός χώρος.

v) Έστω $F(A_f,\mathbb{R})=\{f:\ A_f\to\mathbb{R}\}$, το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $A_f\subseteq\mathbb{R}$. Στο $F(A_f,\mathbb{R})$ ορίζουμε τις πράξεις:

(α) πρόσθεση : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, για κάθε $x\in A_f$

(β) βαθμωτό πολλαπλασιασμό : $(kf)(x)=kf(x)$, για κάθε $x\in A_f$, $k\in\mathbb{R}$.

Το $F(A_f,\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο του χώρου είναι η μηδενική-σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $0(x)=0$, για κάθε $x\in A_f$, και για την αντίθετη συνάρτηση της f ισχύει $(-f)(x)=-f(x)$, για κάθε $x\in A_f$.

vi) Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x, βαθμού το πολύ n, με πραγματικούς συντελεστές, σημειώνεται $\mathbb{R}_n[x]$, κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}_n[x]$ έχει τη μορφή

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ n\in\mathbb{N},\ \text{για κάθε}\ a_i\in\mathbb{R},\ i=0,1,\ldots,n.$$

Στο $\mathbb{R}_n[x]$ ορίζουμε δύο πράξεις : (α) πρόσθεση, τη συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων, και (β) βαθμωτό πολλαπλασιασμό, το συνήθη πολλαπλασιασμό πολυωνύμου επί αριθμό. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το $\mathbb{R}_n[x]$ είναι ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}_n[x]}$, είναι το μηδενικό πολυώνυμο (n-οστού βαθμού). ◆◆◆

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του Ορισμού 4.7 εύκολα αποδεικνύονται οι

επόμενες ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 4.4

Έστω V *ένας* $\mathbb{F}-$*διανυσματικός χώρος με* $\boldsymbol{v} \in V$ *και* $k \in \mathbb{F}$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*

i) $k\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$

ii) $0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$

iii) $(-k)\boldsymbol{v} = k(-\boldsymbol{v}) = -(k\boldsymbol{v})$

iv) *αν* $k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$, *τότε* $k = 0$ *ή* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$

4.3 Διανυσματικοί υπόχωροι

Μερικά υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V, με τις πράξεις που ορίστηκαν στο V, τα οποία εξακολουθούν να διατηρούν τις ιδιότητες του αρχικού διανυσματικού χώρου V, έχουν ιδιαίτερη σημασία.

Ορισμός 4.8

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$. Θα λέμε ότι το U είναι ένας $\mathbb{F}-$**υπόχωρος** του V, αν το U είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος ως προς την ίδια πρόσθεση και τον ίδιο βαθμωτό πολλαπλασιασμό του V.*

*Ισοδύναμα, ένα μη κενό υποσύνολο $U \neq \varnothing$ του $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V, ονομάζεται $\mathbb{F}-$**υπόχωρος** του V, αν για κάθε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U$ και $k \in \mathbb{F}$ ισχύουν οι ιδιότητες:*

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in U \quad \textit{και} \quad k\boldsymbol{u} \in U \tag{4.14}$$

Παρατήρηση 4.3 Στη συνέχεια, εφόσον θεωρούμε ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με το $\mathbb{F}$, θα διατυπώνουμε υπόχωρος αντί $\mathbb{F}-$υπόχωρος, καθώς και διανυσματικός χώρος (δ.χ.), αντί $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 4.5

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και U ένα μη κενό υποσύνολο του V.

i) *Αν U είναι ένας $\mathbb{F}-$υπόχωρος του V, τότε το $\mathbf{0}_V \in U$.*

ii) Το U *είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν για κάθε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U$ και $k,\ell \in \mathbb{F}$ ισχύει $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{v} \in U$.*

Απόδειξη : i) Πράγματι, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.8, το υποσύνολο U εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις του διανυσματικού χώρου V, πρέπει να είναι διανυσματικός χώρος, άρα να έχει ουδέτερο στοιχείο (Ορισμός 4.7(iii)), έστω $\mathbf{0}_U \in U$. Το ουδέτερο στοιχείο είναι μοναδικό (Παρατήρηση 4.2 (ii)), άρα $\mathbf{0}_U \equiv \mathbf{0}_V$.

ii) Αν U είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώροου V, ισχύει η (4.14), άρα για κάθε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U$ και $k,\ell \in \mathbb{F}$ έχουμε $k\boldsymbol{u} \in U$ και $\ell\boldsymbol{v} \in U$, επομένως γι’ αυτά τα στοιχεία του U από την πρώτη σχέση της (4.14) προκύπτει $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{v} \in U$.

Αντίστροφα, αν για κάθε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in U$ και $k,\ell\in\mathbb{F}$ ισχύει $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{v}\in U$, αντικαθιστώντας τις τιμές $k=\ell=1$, προκύπτει η πρώτη σχέση της (4.14), και αντικαθιστώντας $\ell=0$ προκύπτει $k\boldsymbol{u}\in U$. Έτσι, ισχύει ο ισοδύναμος Ορισμός 4.8. ◆◆◆

Η Πρόταση 4.5 είναι αρκετά σημαντική και χρήσιμη στις εφαρμογές, διότι :

- το (i) δίνει ένα κριτήριο, για να διαπιστωθεί, αν ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V **δεν** αποτελεί υπόχωρο του V, που συμβαίνει όταν $\mathbf{0}_V\notin U$,
- το (ii) δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι υπόχωρος, ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V.

Παράδειγμα 4.2

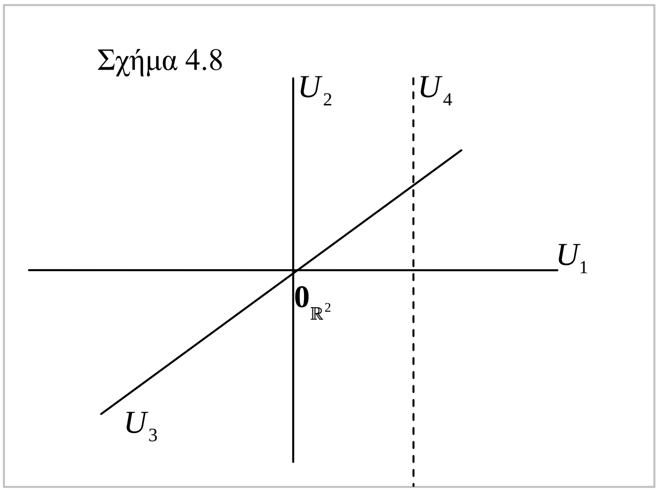
i) Η εποπτική-γεωμετρική αναπαράσταση του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ είναι το επίπεδο (βλέπε Παρατήρηση 4.1 (i)-(ii), Παράδειγμα 4.1 (i)). Τα σύνολα $U_1=\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(0,y):\ y\in\mathbb{R}\}$, $U_3=\{(x,x):\ x\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωροι του δ.χ. $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι όλα τα σύνολα είναι μη κενά μια και το στοιχείο $(0,0)$ ανήκει σε καθένα από αυτά.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in U_1$ και $k,\ell\in\mathbb{R}$, με $\boldsymbol{u}=(x_1,0)$, $\boldsymbol{v}=(x_2,0)$, προφανώς $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{v}=k(x_1,0)+\ell(x_2,0)=(kx_1+\ell x_2,0)\in U_1$, οπότε από Πρόταση 4.5 (ii), ο U_1 είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^2$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το U_2 είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^2$.

Αν θεωρήσουμε $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U_3$, $k,\ell\in\mathbb{R}$, με $\boldsymbol{u}_1=(x_1,x_1)$, $\boldsymbol{u}_2=(x_2,x_2)$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, τότε $k\boldsymbol{u}_1+\ell\boldsymbol{u}_2=k(x_1,x_1)+\ell(x_2,x_2)=(kx_1+\ell x_2,kx_1+\ell x_2)\in U_3$, οπότε ο U_3 είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^2$, (Πρόταση 4.5 (ii)).

Η γεωμετρική παρουσίαση των υποχώρων του επιπέδου, U_1,U_2,U_3, είναι ο άξονας $x'x$, ο άξονας $y'y$, και η ευθεία $y=x$, αντίστοιχα.

Το σύνολο $U_4=\{(1,y):\ y\in\mathbb{R}\}$ **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, διότι το $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\equiv(0,0)\notin U_4$, (Πρόταση 4.5 (i)). Άλλωστε, αν προσθέσουμε δυο στοιχεία του U_4, $(1,y_1)+(1,y_2)=(2,y_1+y_2)$ βρίσκουμε ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο U_4, δηλαδή, η πρόσθεση διανυσμάτων δεν μας δίνει μια απεικόνιση της μορφής $U_4 \times U_4 \to U_4$. Γεωμετρικά, οι προηγούμενοι υπόχωροι του επιπέδου αποτυπώνονται στο Σχήμα 4.8.



ii) Το $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι ισχύει η Πρόταση 4.5 (ii). Πράγματι, το $U \neq \emptyset$, επειδή το $(0,0,0) \in U$.

Έστω $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$, με $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$. Σύμφωνα με την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του U, έχουμε :

$$\boldsymbol{u}_1 \in U \Rightarrow x_1 - 2y_1 + z_1 = 0 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{u}_2 \in U \Rightarrow x_2 - 2y_2 + z_2 = 0 \tag{4.15}$$

Επειδή, $k\boldsymbol{u}_1 + \ell\boldsymbol{u}_2 = k(x_1, y_1, z_1) + \ell(x_2, y_2, z_2) = (kx_1 + \ell x_2, ky_1 + \ell y_2, kz_1 + \ell z_2)$,

με αντικατάσταση των ισοτήτων από την (4.15) καταλήγουμε στην επόμενη ισότητα,

$$kx_1 + \ell x_2 - 2(ky_1 + \ell y_2) + kz_1 + \ell z_2 = k(x_1 - 2y_1 + z_1) + \ell(x_2 - 2y_2 + z_2) = 0,$$

από όπου είναι φανερό ότι $k\boldsymbol{u}_1 + \ell\boldsymbol{u}_2 \in U$.

Η γεωμετρική παρουσίαση του υποχώρου U είναι επίπεδο, το οποίο διέρχεται από την αρχή των τρισορθογωνίων αξόνων του $\mathbb{R}^3$.

iii) Το $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 1\}$ **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι το (0,0,0) **δεν** ανήκει στο σύνολο W, επειδή δεν επαληθεύει την ιδιότητα των στοιχείων του W. Η γεωμετρική παρουσίαση του W είναι επίπεδο, το οποίο είναι παράλληλο στο επίπεδο του προηγουμένου υποχώρου U, (Παράδειγμα 4.2 (ii)), το οποίο δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αλλά από το σημείο $(1,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$.

Γεωμετρικά, οι υπόχωροι του

- $\mathbb{R}$ είναι : $\mathbb{R}$, και η αρχή του άξονα το $\{0\}$.
- $\mathbb{R}^2$ είναι : $\mathbb{R}^2$, το $\{(0,0)\}$, και κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.
- $\mathbb{R}^3$ είναι : $\mathbb{R}^3$, το $\{(0,0,0)\}$, κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, και κάθε επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.

iv) Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Το σύνολο, U, των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, εφοδιασμένο με πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, -όπως αυτές ορίστηκαν στο Παράδειγμα 4.1 (iii)-(iv)- είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

Προφανώς, ο μηδενικός πίνακας του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ επαληθεύει την $A\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$, (Πρόταση 1.3 (v)), άρα $U \neq \varnothing$. Επίσης αν θεωρήσουμε ότι $k, \ell \in \mathbb{F}$ και $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, τότε $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ και $A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

Επιπλέον για το στοιχείο $k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες πράξεων πινάκων και δ.χ. (Πρόταση 1.3 (ii)-(iv) και Πρόταση 4.4 (i)), και αντικαθιστώντας τις προηγούμενες ισότητες, έχουμε :

$$A(k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y}) = k(A\boldsymbol{x}) + \ell(A\boldsymbol{y}) = k\cdot\mathbf{0} + \ell\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Άρα $k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y}$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος, δηλαδή $k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in U$, οπότε αποδείχθηκε ο ισχυρισμός, (Πρόταση 4.5 (ii)).

Το σύνολο U ονομάζεται **χώρος λύσεων** του ομογενούς συστήματος ή **μηδενόχωρος** του A (nullspace) και συμβολίζεται με $N(A)$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ με $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, **δεν** είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, διότι ο μηδενικός πίνακας δεν αποτελεί λύση του συστήματος. ♦♦♦

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μελέτη νέων υποχώρων που ορίζονται από άλλους υπόχωρους ή από μία συλλογή διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 4.6

Έστω U,W δύο υπόχωροι ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V. Τα σύνολα

$$U+W=\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{u}\in U,\ \boldsymbol{w}\in W\} \tag{4.16}$$

$$U\cap W=\{\boldsymbol{v}\in V:\ \boldsymbol{v}\in U,\ \boldsymbol{v}\in W\} \tag{4.17}$$

είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V.

Απόδειξη : Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το $U+W$ είναι υπόχωρος του V.

Επειδή U,W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (i) $\mathbf{0}_V\in U,W$, συνεπώς $\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V\in U+W$, οπότε $U+W\neq\varnothing$.

Επιπλέον, αν $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{w}_2\in U+W$ με $\boldsymbol{u}_i\in U,\ \boldsymbol{w}_i\in W,\ i=1,2$ και $k,\ell\in\mathbb{F}$, τότε

$$k\left(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{w}_1\right)+\ell\left(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{w}_2\right)=\left(k\boldsymbol{u}_1+\ell\boldsymbol{u}_2\right)+\left(k\boldsymbol{w}_1+\ell\boldsymbol{w}_2\right)\in U+W,$$

επειδή $\boldsymbol{u}_i\in U,\ \boldsymbol{w}_i\in W,\ i=1,2$ και U,W υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (ii) το $U+W$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V.

Απομένει να αποδείξουμε ότι το σύνολο $U\cap W$, όπως ορίζεται στην (4.17), είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V.

Επειδή U,W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V, το στοιχείο $\mathbf{0}_V\in U$ και $\mathbf{0}_V\in W$, άρα $\mathbf{0}_V\in U\cap W$, οπότε $U\cap W\neq\varnothing$.

Έστω $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in U\cap W$ και $k,\ell\in\mathbb{F}$. Επειδή $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in U\cap W\ \Rightarrow\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in U$. Επιπλέον, το U είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V, επομένως $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{w}\in U$ (Πρόταση 4.5 (ii)).

Με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{w}\in W$. Άρα, $k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{w}\in U\cap W$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το $U\cap W$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V (Πρόταση 4.5 (ii)). ◆◆◆

Παράδειγμα 4.3 Θεωρώντας το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και τους υποχώρους $U_1=\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(0,y):\ y\in\mathbb{R}\}$ του Παραδείγματος 4.2 (i) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

(i) $U_1+U_2=\mathbb{R}^2$ και (ii) $U_1\cap U_2=\{(0,0)\}$

(i) Πράγματι, επειδή U_1+U_2 είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^2$, (Πρόταση 4.6), είναι σαφές ότι $U_1+U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πρόσθεσης στο δ.χ. $\mathbb{R}^2$ (βλέπε Παράδειγμα 4.1 (i) και σχέση (4.1)), ένα τυχαίο στοιχείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ γράφεται $(x,y)=(x,0)+(0,y) \in U_1+U_2$. Συνεπώς ισχύει $\mathbb{R}^2 \subseteq U_1+U_2$. Άρα, έχουμε $U_1+U_2=\mathbb{R}^2$.

(ii) Επειδή $U_1 \cap U_2$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ (Πρόταση 4.6), περιέχει το μηδενικό στοιχείο του χώρου (Πρόταση 4.5 (i)), που είναι $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \equiv (0,0)$. Επιπλέον, από τον ορισμό των U_1, U_2 διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο κοινό στοιχείο. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $U_1 \cap U_2 = \{(0,0)\}$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του προηγούμενου αποτελέσματος είναι ότι το επίπεδο, $\mathbb{R}^2$, είναι το «άθροισμα» των δύο συνήθων αξόνων, xx' και yy', (βλέπε Σχήμα 4.8). ♦♦♦

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι, ένα τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως άθροισμα των στοιχείων των υποχώρων U_1, U_2, εφόσον οι υπόχωροι έχουν $U_1 \cap U_2 = \{(0,0)\}$. Αυτή η ιδιότητα γενικεύεται για περισσότερους από δύο υποχώρους ενός διανυσματικού χώρου. Στην εφαρμογή που ακολουθεί διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι συνθήκες ώστε, το «άθροισμα» δύο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V να ταυτίζεται με τον ίδιο το χώρο V.

Εφαρμογή 4.5

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και U, W δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

i) $V=U+W$ *και* $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$

ii) *κάθε διάνυσμα* $\boldsymbol{v} \in V$ *γράφεται κατά μοναδικό τρόπο* $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, *όπου* $\boldsymbol{u} \in U$ *και* $\boldsymbol{w} \in W$.

Απόδειξη : i) $\Rightarrow$ ii) Από τη σχέση $V=U+W$ και την (4.16) προκύπτει άμεσα ότι, για κάθε $\boldsymbol{v} \in V$, υπάρχουν $\boldsymbol{u} \in U$ και $\boldsymbol{w} \in W$, τέτοια ώστε $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η προηγούμενη ανάλυση είναι μοναδική. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\boldsymbol{u}_1 \in U$ και $\boldsymbol{w}_1 \in W$, τέτοια ώστε να ισχύει $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{w}_1$, επομένως $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{w}_1$ ή ισοδύναμα

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}.$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{u}_1\in U$, διότι υποθέσαμε $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1\in U$ και ο U είναι υπόχωρος του V (Πρόταση 4.5 (ii)). Με ανάλογο τρόπο συμπεραίνουμε ότι, $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+(-1)\boldsymbol{w}\in W$, οπότε από την ισότητα $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}$, καταλήγουμε $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1\in W$. Επειδή $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1\in U$ και $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1\in W$, συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1\in U\cap W$. Όμοια και $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}\in U\cap W$. Επίσης έχουμε από την υπόθεση $U\cap W=\{\mathbf{0}_V\}$, άρα $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1=\mathbf{0}_V \Rightarrow \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1$ και $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}=\mathbf{0}_V \Rightarrow \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1$, οπότε η ανάλυση είναι μοναδική.

ii) $\Rightarrow$ i) Προφανώς από τον τρόπο γραφής του διανύσματος $\boldsymbol{v}\in V$ και την (4.16) ισχύει $V=U+W$. Απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει $U\cap W=\{\mathbf{0}_V\}$.

Έστω $\boldsymbol{x}\in U\cap W\subseteq V$. Το σύνολο $U\cap W$ είναι υπόχωρος του V (Πρόταση 4.6), συνεπώς ισχύει η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 4.7 και σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.2 (i) μπορούμε να γράψουμε $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V+\boldsymbol{x}$.

Από τον τρόπο γραφής $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}_V$, συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{x}\in U$ και $\mathbf{0}_V\in W$, ενώ από $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_V+\boldsymbol{x}$, έχουμε $\mathbf{0}_V\in U$ και $\boldsymbol{x}\in W$, και από τη μοναδικότητα της γραφής καταλήγουμε $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_V$. Άρα $U\cap W=\{\mathbf{0}_V\}$. ◆◆◆

Ορισμός 4.9

*Ο υπόχωρος $U+W$ ονομάζεται **άθροισμα** και ο υπόχωρος $U\cap W$ ονομάζεται **τομή** των υποχώρων U και W ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V.*

*Αν ισχύει μία από τις ισοδύναμες συνθήκες της Εφαρμογής 4.5, ο διανυσματικός χώρος V είναι το **ευθύ άθροισμα** των U, W, συμβολίζεται με $V=U\oplus W$, και τότε ο υπόχωρος U ονομάζεται **συμπλήρωμα** του W ως προς το V, και αντίστοιχα ο W ονομάζεται συμπλήρωμα του U ως προς το V.*

Όπως αποδείχθηκε, η τομή των υποχώρων U και W ενός διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος, η **ένωση,** $U\cup W=\{\boldsymbol{v}\in V:\ \boldsymbol{v}\in U \text{ ή } \boldsymbol{v}\in W\}$, των υποχώρων **δεν** αποτελεί πάντοτε υπόχωρο του διανυσματικού χώρου, όπως προκύπτει από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.4 Όπως αποδεικνύεται στο Παράδειγμα 4.19 (i), και στην Εφαρμογή 4.7 (i), τα σύνολα

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}):\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \quad \text{και} \quad W = \left\{ A \in M_2\left(\mathbb{R}\right):\ A^t = A \right\}$$

είναι υπόχωροι του $M_2\left(\mathbb{R}\right)$. Ωστόσο, αν θεωρήσουμε $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in U$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in W$, προφανώς από $A_1 \in U \Rightarrow A_1 \in U \cup W$ και $A_2 \in W \Rightarrow A_2 \in U \cup W$.

Όμως $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \notin U \cup W$, επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει σε κανέναν από τους υποχώρους U ή W. Άρα, το σύνολο $U \cup W$ **δεν** είναι «κλειστό» ως προς την πράξη της πρόσθεσης, κατά συνέπεια αφού δεν επαληθεύεται η πρώτη συνθήκη της (4.14), το $U \cup W$ δεν αποτελεί υπόχωρο του $M_2\left(\mathbb{R}\right)$. ♦♦♦

Ορισμός 4.10

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_p$ διανύσματα του V. Το στοιχείο $\boldsymbol{v} \in V$ λέγεται ένας $\mathbb{F}-$**γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_p$, αν υπάρχουν $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε*

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p. \tag{4.18}$$

Παρατήρηση 4.4 Από τον Ορισμό 4.10 είναι φανερό ότι, μπορεί να υπάρχουν πολλοί τρόποι, για να εκφραστεί ένα διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ ενός διανυσματικού χώρου V ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων, μια και η επιλογή των στοιχείων του συνόλου των συντελεστών $\mathbb{F}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $\boldsymbol{v} = (3,4)$ του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ και το σύνολο διανυσμάτων $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \{(1,1),\ (0,1),\ (1,0)\}$, εύκολα επαληθεύουμε ότι $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$, αλλά και $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$.

Από το προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι, το διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ έχει περισσότερους από έναν γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. Επομένως, στην (4.18) **δεν** υπάρχουν μοναδικά $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$, έτσι ώστε ένα διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου V να γραφεί ως μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του V. Κατά συνέπεια για τις διάφορες τιμές των $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$ δημιουργείται διαφορετικός γραμμικός συνδυασμός, και κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένα σύνολο γραμμικών συνδυασμών του στοιχείου του διανυσματικού χώρου V. Αυτό το σύνολο ορίζεται στη συνέχεια, και όπως θα αποδείξουμε, είναι και αυτό υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V.

Ορισμός 4.11

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και $K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ ένα μη κενό υποσύνολο του V. Το σύνολο όλων των $\mathbb{F}-$γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του K

$$\{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p : \quad k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}\}$$

*ονομάζεται $\mathbb{F}-$**γραμμική θήκη** του K και συμβολίζεται με $span(K)$.*

Αν K είναι το κενό σύνολο, η γραμμική θήκη σημειώνεται $span(\varnothing) = \{\mathbf{0}_V\}$.

*Αν κάθε στοιχείο του V είναι $\mathbb{F}-$γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K λέμε ότι ο υπόχωρος[2] $span(K)$ **παράγει** το V πάνω από το $\mathbb{F}$ ή ότι το V **παράγεται** από το σύνολο K ή ότι το K είναι σύνολο **γεννητόρων** του V.*

*Αν το πλήθος των διανυσμάτων του K είναι πεπερασμένος αριθμός, ο διανυσματικός χώρος V ονομάζεται **πεπερασμένα παραγόμενος** διανυσματικός χώρος από το σύνολο K.*

Συχνά παραλείπουμε την αναφορά στο $\mathbb{F}$ από τους Ορισμούς 4.10 και 4.11, αν είναι σαφές σε ποιο σύνολο συντελεστών $\mathbb{F}$ αναφερόμαστε.

Παράδειγμα 4.5

i) Έστω $K = \{(1,-1,-2),(5,-4,-10),(-3,1,0)\}$ υποσύνολο του δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$. Η γραμμική θήκη του K είναι

$$\begin{aligned} span(K) &= \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \boldsymbol{v} = k_1(1,-1,-2) + k_2(5,-4,-10) + k_3(-3,1,0), \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(k_1 + 5k_2 - 3k_3, -k_1 - 4k_2 + k_3, -2k_1 - 10k_2) \in \mathbb{R}^3 : \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Για να ελέγξουμε αν το $(-4,3,14) \in span(K)$ πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν κατάλληλα $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα (4.18) του Ορισμού 4.10. Δηλαδή, για ποιες τιμές των k_1, k_2, k_3 ισχύει

[2] Το σύνολο $span(K)$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V, όπως αποδεικνύεται στην Πρόταση 4.7.

$$(-4,3,14) = k_1(1,-1,-2) + k_2(5,-4,-10) + k_3(-3,1,0),$$

Κάνοντας τις πράξεις, όπως ορίστηκαν στον $\mathbb{R}^3$ (βλέπε σχέσεις (4.1),(4.2)), καταλήγουμε στο σύστημα :

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 - 3k_3 &= -4 \\ -k_1 - 4k_2 + k_3 &= 3 \\ -2k_1 - 10k_2 \quad &= 14 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση $k_1 = 8$, $k_2 = -3$, $k_3 = -1$, άρα το $(-4,3,14)$ ανήκει στη γραμμική θήκη του K.

ii) Έστω $E = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ υποσύνολο του δ.χ. $\mathbb{R}^3$. Η γραμμική θήκη του E, δηλαδή το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του E, είναι

$$\begin{aligned} span(E) &= \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \boldsymbol{v} = k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0), \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(k_1, k_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Για να εξετάσουμε αν το $span(E)$ παράγει τον $\mathbb{R}^3$, πρέπει να ελέγξουμε αν κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του E, δηλαδή, αν για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(x, y, z) = k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0). \tag{4.19}$$

Προφανώς η (4.19) δεν ισχύει για κάθε τιμή των $x, y, z \in \mathbb{R}$, διότι από την ισότητα καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα

$$k_1 = x, \quad k_2 = y, \qquad z = 0,$$

που σημαίνει ότι το E δεν παράγει τον $\mathbb{R}^3$ ή ότι τα διανύσματα $(1,0,0),(0,1,0)$ δεν είναι γεννήτορες του $\mathbb{R}^3$.

iii) Το $M_2(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ 1 \le i, j \le 2\}$ είναι ένας δ.χ. (Παράδειγμα 4.1 (iii)). Επειδή κάθε στοιχείο του $M_2(\mathbb{R})$ γράφεται

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γεννήτορες του $M_2(\mathbb{R})$.

iv) Το σύνολο, $\mathbb{R}_n[x]$, με στοιχεία $n-$οστού βαθμού πολυώνυμα μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, είναι δ.χ. (Παράδειγμα 4.1 (vi)). Επειδή κάθε πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ είναι της μορφής $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, συμπεραίνουμε ότι ο δ.χ. $\mathbb{R}_n[x]$ παράγεται από τα $1, x, x^2, \ldots, x^n$. ◆◆◆

Μία πολύ βασική πρόταση αποδεικνύεται στη συνέχεια, η οποία αναφέρεται στο πλήθος των διανυσμάτων που περιλαμβάνονται στη γραμμική θήκη ενός συνόλου.

Πρόταση 4.7

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$.

Η γραμμική θήκη, $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$, είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V που περιέχει τα διανύσματα.

Απόδειξη : Αν θεωρήσουμε $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.11 υπάρχουν $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$, έτσι ώστε $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p$ και $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p \in \mathbb{F}$, έτσι ώστε $\boldsymbol{v} = \ell_1\boldsymbol{v}_1 + \ell_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \ell_p\boldsymbol{v}_p$.

Προφανώς, το άθροισμα δύο γραμμικών συνδυασμών είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων, επειδή

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (k_1 + \ell_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 + \ell_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (k_p + \ell_p)\boldsymbol{v}_p = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_p\boldsymbol{v}_p,$$

όπου $m_i = k_i + \ell_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, άρα $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$. Επίσης ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ενός γραμμικού συνδυασμού είναι γραμμικός συνδυασμός, επειδή για κάποιον $m \in \mathbb{F}$ ισχύει

$$m\boldsymbol{u} = (mk_1)\boldsymbol{v}_1 + (mk_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (mk_p)\boldsymbol{v}_p = z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_p\boldsymbol{v}_p,$$

όπου $z_i = mk_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, άρα $m\boldsymbol{u} \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$.

Επομένως, αν $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ και $m \in \mathbb{F}$, τότε επαληθεύονται οι εγκλεισμοί της (4.14) του Ορισμού 4.8, συνεπώς το σύνολο $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ είναι υπόχωρος του V.

Έστω U ένας διαφορετικός υπόχωρος από το $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ που περιέχει τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$. Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \subseteq U.$$

Για κάθε $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$ ισχύει $(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p) \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$, διότι $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ είναι υπόχωρος του V (Πρόταση 4.5 (ii)). Επιπλέον τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p \in U$ και το U είναι υπόχωρος, άρα για $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{F}$ ισχύει $(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p) \in U$ (Πρόταση 4.5 (ii)). Επομένως, αν το $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p$ είναι στοιχείο της γραμμικής θήκης προκύπτει ότι είναι και στοιχείο του U. Συνεπώς, η γραμμική θήκη περιέχεται σε κάθε υπόχωρο που περιέχει τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$. ◆◆◆

4.4 Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Επειδή κάθε στοιχείο $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ του δ.χ. $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)&=a_1(1,0,\ldots,0)+a_2(0,1,\ldots,0)+\cdots+a_n(0,0,\ldots,1)\\&=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n\end{aligned} \tag{4.20}$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 4.11, τα μοναδιαία[3] διανύσματα

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)\,,\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)\,,\ \ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1) \tag{4.21}$$

είναι γεννήτορες του $\mathbb{R}^n$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι εκτός από το σύνολο $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ και τα σύνολα $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ καθώς και αρκετά άλλα. Άρα ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σύνολα γεννητόρων. Το ερώτημα που τίθενται είναι : Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός διανυσμάτων που απαιτείται ώστε να παράγεται ο διανυσματικός χώρος;

Η απάντηση σχετίζεται με την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου των γεννητόρων.

Ορισμός 4.12

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_p$ του V ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν και μόνο αν η διανυσματική εξίσωση*

$$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_p\boldsymbol{v}_p=\mathbf{0}_V\,,\quad \text{με}\ \ a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbb{F} \tag{4.22}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, $a_1=a_2=\cdots=a_p=0$.

Αν η (4.22) *έχει και άλλες λύσεις εκτός της τετριμμένης, τα διανύσματα* $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p$ *ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα.***

Παρατήρηση 4.5 i) Όταν θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας (αντίστοιχα εξάρτησης) σε σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων, ο Ορισμός 4.12 εφαρμόζεται για ένα υποσύνολο K του διανυσματικού χώρου V με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Έτσι, ένα πεπερασμένο σύνολο $K\subset V$ χαρακτηρίζεται *γραμμικά ανεξάρτητο* (αντίστοιχα εξαρτημένο), αν τα στοιχεία του K είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αντίστοιχα εξαρτημένα).

---

[3] Τα διανύσματα χαρακτηρίζονται μοναδιαία, επειδή από την (4.7) υπολογίζεται ότι $\|\boldsymbol{e}_i\|=1$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$

Ένα άπειρο υποσύνολο K του διανυσματικού χώρου V λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* (αντίστοιχα *εξαρτημένο*), αν κάθε (αντίστοιχα υπάρχει) πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του S είναι γραμμικά ανεξάρτητο (αντίστοιχα εξαρτημένο).

ii) Το κενό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άμεσες συνέπειες του Ορισμού 4.12 είναι οι ακόλουθες.

Πόρισμα 4.1

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος.

i) *Το μηδενικό διάνυσμα, $\mathbf{0}_V$, είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

ii) *Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

iii) *Αν κάποιο από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p \in V$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

iv) *Αν το σύνολο $K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\} \subset V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε κάθε υποσύνολό του, B, είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο.*

v) *Έστω $B \neq \varnothing$ ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο και $K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\} \subset V$ με $B \subseteq K$, τότε το K είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Απόδειξη : i) Συνδυάζοντας την ισότητα $1 \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ (Πρόταση 4.4 (i)), με τον Ορισμό 4.12, είναι φανερό ότι το διάνυσμα $\mathbf{0}_V$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

ii) Η εξίσωση (4.22) γράφεται $a_1\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$, με $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.4 (iv) προκύπτει $a_1 = 0$, άρα το $\boldsymbol{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

iii) Έστω ότι $\boldsymbol{v}_i \equiv \mathbf{0}_V$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Από την εξίσωση (4.22) έχουμε

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{0}_V + a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + a_p\boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_V, \tag{4.23}$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{F}$. Τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, διότι η (4.23) έχει ένα μη μηδενικό συντελεστή.

iv) Έστω $K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_p\} \subset V$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq K$. Αν το B ήταν γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, τότε θα υπήρχε τουλάχιστο ένας μη μηδενικός συντελεστής στην εξίσωση

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}_V, \quad \text{με} \quad a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{F}.$$

Την τελευταία ισότητα μπορούμε να τη συμπληρώσουμε με τα διανύσματα του K ως εξής :

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k + 0\cdot\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_V \qquad (4.24)$$

Συνδυάζοντας την (4.24) με τον Ορισμό 4.12 συμπεραίνουμε ότι, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{v}_p$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, διότι κάποιος συντελεστής είναι μη μηδενικός, άρα το σύνολο K είναι γραμμικά εξαρτημένο, που είναι άτοπο.

v) Έστω B ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο με $B \subseteq K$. Θεωρούμε ότι το σύνολο K έχει στοιχεία $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{v}_p$ και έστω ότι είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Συνεπώς, από (iv) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, που είναι άτοπο. Άρα, το K είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. ♦♦♦

Παράδειγμα 4.6

i) Στο δ.χ. $\mathbb{R}^n$, τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, $i = 1,2,\ldots,n$, τα οποία έχουν σε όλες τις συντεταγμένες μηδέν και στην $i-$θέση τη μονάδα, (όπως στην (4.21)), είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι η (4.22) γράφεται

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots,a_n) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},$$

από όπου προκύπτει η μοναδική λύση $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

ii) Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (3,0,-6)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4,1,7)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (-2,1,5)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι η διανυσματική εξίσωση (4.22) είναι

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow a_1(3,0,-6) + a_2(-4,1,7) + a_3(-2,1,5) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (3a_1 - 4a_2 - 2a_3, a_2 + a_3, -6a_1 + 7a_2 + 5a_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 - 4a_2 - 2a_3 &= 0 \\ a_2 + \ a_3 &= 0 \\ -6a_1 + 7a_2 + 5a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$$

iii) Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,-2,-3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-3,5,7)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (-4,5,6)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, διότι η διανυσματική εξίσωση (4.22)

$$a_1(1,-2,-3) + a_2(-3,5,7) + a_3(-4,5,6) = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow$$
$$(a_1 - 3a_2 - 4a_3, -2a_1 + 5a_2 + 5a_3, -3a_1 + 7a_2 + 6a_3) = (0,0,0)$$

καταλήγει στο σύστημα των εξισώσεων

$$a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0\,,\ \ -2a_1 + 5a_2 + 5a_3 = 0\,,\ -3a_1 + 7a_2 + 6a_3 = 0\,,$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, οπότε βρίσκουμε ότι έχει άπειρες λύσεις, $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)^t = (-5a_3 \quad -3a_3 \quad a_3)^t$, $a_3 \in \mathbb{R}$.

Άλλωστε, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει $-5\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2$, δηλαδή, το $\boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

iv) Στο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$, οι πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.22) έχουμε

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + 3a_2 + 2a_3 & 2a_1 + a_3 \\ 3a_1 - a_2 & a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} &a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ &2a_1 \qquad\ + a_3 = 0 \\ &3a_1 - a_2 \qquad = 0 \\ &a_1 + a_2 \ \ + a_3 = 0 \end{aligned},$$

το οποίο έχει ως λύση την τετριμμένη, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

v) Στο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$, οι πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένοι, διότι με αντικατάσταση στην εξίσωση (4.22) έχουμε :

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + 3a_2 + a_3 & 2a_1 - a_2 - 5a_3 \\ a_1 + 10a_2 + 8a_3 & a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία ισότητα πινάκων προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

$$a_1 + 3a_2 + a_3 = 0\,,\ \ 2a_1 - a_2 - 5a_3 = 0\,,\ a_1 + 10a_2 + 8a_3 = 0 \text{ και } a_1 + a_2 = 0\,.$$

Λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, βρίσκουμε ότι έχει άπειρες λύσεις, $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)^t = (-2a_2 \quad a_2 \quad -a_2)^t$, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Άλλωστε, εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει $-2A_1 + A_2 - A_3 = \mathbb{O}$.

vi) Στο δ.χ. $M_{3\times1}(\mathbb{R})$, οι πίνακες $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

είναι γραμμικά εξαρτημένοι, διότι με αντικατάσταση στην (4.22) έχουμε :

$$a_1\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1+3a_3\\-4a_1+3a_2-5a_3+2a_4\\3a_1-a_2+4a_3-2a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Από την ισότητα πινάκων προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$a_1+3a_3=0,\ \ -4a_1+3a_2-5a_3+2a_4=0,\ 3a_1-a_2+4a_3-2a_4=0,$$

το οποίο έχει άπειρες λύσεις, $(a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4)^t=(-3a_3\ \ -a_3\ \ a_3\ \ -2a_3)^t$, $a_3\in\mathbb{R}$.

Άλλωστε, εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει $\boldsymbol{v}_3=3\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_4$.

vii) Στο δ.χ. $\mathbb{R}_n[x]$, τα στοιχεία $1,x,x^2,\ldots,x^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι από την ισότητα

$$a_0\cdot 1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\mathbf{0}_{\mathbb{R}_n[x]},\ \ a_i\in\mathbb{R},\ \text{με}\ \ i=0,1,\ldots,n$$

είναι φανερό ότι, $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$. ◆◆◆

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ένα σύνολο διανυσμάτων να αποτελεί ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Πρόταση 4.8

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος.

Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\in V$, με $p\geq 2$. Τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από αυτά, έστω το $\boldsymbol{v}_i$, $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων διανυσμάτων.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα η (4.22) γράφεται

$$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}+a_i\boldsymbol{v}_i+a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+a_p\boldsymbol{v}_p=\mathbf{0}_V, \tag{4.25}$$

όπου $a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbb{F}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο συντελεστής $a_i\neq 0$ για κάποιο $i\in\{1,2,\ldots,p\}$.

Η εξίσωση (4.25) γράφεται

$$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}+a_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+a_p\boldsymbol{v}_p=-a_i\boldsymbol{v}_i,$$

και επειδή θεωρήσαμε ότι $a_i\neq 0$, την τελευταία ισότητα μπορούμε να την γράψουμε

$$
\begin{aligned}
-\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{v}_1-\frac{a_2}{a_i}\boldsymbol{v}_2-\cdots-\frac{a_{i-1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i-1}-\frac{a_{i+1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i+1}-\cdots-\frac{a_p}{a_i}\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_i \Leftrightarrow \\
k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\ \cdots\ +k_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\ \cdots\ +k_p\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_i
\end{aligned}
$$

με $k_t=-\dfrac{a_t}{a_i}$. Δηλαδή, το $\boldsymbol{v}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων διανυσμάτων, (Ορισμός 4.10).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\boldsymbol{v}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων διανυσμάτων, οπότε σύμφωνα με την (4.18) του Ορισμού 4.10 υπάρχουν $k_1,k_2,\ldots,k_p\in\mathbb{F}$ τέτοιοι ώστε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_i=k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}\qquad +k_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p \qquad \Leftrightarrow \\
k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}-1\cdot\boldsymbol{v}_i+k_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p=\mathbf{0}_V
\end{aligned}
$$

Στην τελευταία ισότητα ο συντελεστής του $\boldsymbol{v}_i$ είναι μη μηδενικός για κάποιο $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, επομένως τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ◆◆◆

Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Κάθε στήλη του πίνακα A μπορεί να θεωρηθεί ως διάνυσμα-στοιχείο του $\mathbb{R}^m$ (βλέπε την αντιστοιχία (ii)-(iii) στην Παρατήρηση 4.1), οπότε οι n στήλες $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_n$ του A, μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$.

Με ανάλογο τρόπο, οι γραμμές $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_m$ του A, μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και ότι παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$.

Για πίνακες με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{F}$, μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.13

Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

- *Κάθε γραμμή του πίνακα* A *είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{F}^n$. *Ο υπόχωρος του* $\mathbb{F}^n$ *που παράγουν οι* m *γραμμές* $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_m$ *του* A *ονομάζεται* ***χώρος γραμμών*** *του* A *και σημειώνεται*

$$R(A)=span(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_m).$$

- *Κάθε στήλη του* A *είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{F}^m$. *Ο υπόχωρος του* $\mathbb{F}^m$ *που παράγουν οι* n στήλες $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_n$ *του* A *ονομάζεται* ***χώρος στηλών*** *του* A *και σημειώνεται*

$$C(A) = span(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) .$$

Αν θεωρήσουμε, A^t, τον ανάστροφο πίνακα του $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, είναι φανερό ότι

$$C(A) = R(A^t) . \tag{4.26}$$

Η ιδιότητα στην (4.26) επιτρέπει τη μελέτη του χώρου γραμμών του A και μεταφορά αυτών των συμπερασμάτων στο χώρο στηλών του, μέσω του αναστρόφου πίνακά του. Έτσι, στις επόμενες παραγράφους θα διατυπώνουμε τα αποτελέσματα για το χώρο γραμμών, ωστόσο τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το χώρο στηλών.

Πρόταση 4.9

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

i) *Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.*

ii) *Έστω* $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *η κλιμακωτή μορφή του πίνακα* A. *Οι μη μηδενικές γραμμές του* B *είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{F}^n$.

Απόδειξη : i) Αν εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον πίνακα A τον μετασχηματίσουμε στον B (ο πίνακας B είναι η κλιμακωτή μορφή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A) είναι φανερό ότι κάθε γραμμή του B είναι κάποια γραμμή του A (αν εφαρμόσθηκαν μόνο εναλλαγές γραμμών) ή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα το οποίο ανήκει στο χώρο γραμμών του B ανήκει και στο χώρο γραμμών του A, δηλαδή ο χώρος γραμμών του B είναι υποσύνολο του χώρου γραμμών του A. Επειδή η διαδικασία των στοιχειωδών γραμμοπράξεων μπορεί να ακολουθηθεί και με αντίστροφη πορεία, οδηγούμαστε από τον πίνακα B στον πίνακα A, άρα ο χώρος γραμμών του A είναι υποσύνολο του χώρου γραμμών του B. Επομένως, οι γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών, δηλαδή,

$$R(A) = span(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m) = R(B) . \tag{4.27}$$

ii) Επειδή ο B είναι κλιμακωτός πίνακας (για τον κλιμακωτό πίνακα βλέπε Ορισμό 3.5), καμία μη μηδενική γραμμή του δεν μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων μη μηδενικών γραμμών του. Άρα από την Πρόταση 4.8

συμπεραίνουμε ότι οι μη μηδενικές γραμμές του B είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^n$. ◆◆◆

Υπενθυμίζουμε ότι, ο βαθμός ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ισούται με τον αριθμό που δείχνει το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα B (Ορισμός 3.6). Επιπλέον το (ii) της Πρότασης 4.9 αποδεικνύει ότι το σύνολο αυτών των γραμμών είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εύλογο είναι το ερώτημα : ο βαθμός του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του B; Η απάντηση δίνεται στην επόμενη ενότητα (Παρατήρηση 4.8).

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζοντας δύο αλγορίθμους, τους οποίους εφαρμόζουμε για να εξετάσουμε αν τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή εξαρτημένα.
Η διανυσματική εξίσωση στην (4.22)

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}_V \quad \text{με αγνώστους} \quad a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$$

καταλήγει σε ομογενές σύστημα m-εξισώσεων, k-αγνώστων της μορφής $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, όπου $A \in M_{m\times k}(\mathbb{F})$, $\boldsymbol{x} = (a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_k)^t \in M_{k\times 1}(\mathbb{F})$. Από την Παρατήρηση 3.5 καθώς και την Πρόταση 3.4 γνωρίζουμε ότι το παραπάνω σύστημα είναι συμβιβαστό. Συγκεκριμένα :

- αν $r(A) = k$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, δηλαδή, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, επομένως τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
- σε διαφορετική περίπτωση, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Ειδικότερα :
Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, ισχύει $\det A \neq 0$ αν και μόνο αν ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_k(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε το σύστημα με πίνακα συντελεστών τον πίνακα A έχει τη μηδενική λύση (Παρατήρηση 2.1), συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, ο $A \in M_k(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος όταν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο πίνακα I_k (Πρόταση 3.5), επιπλέον είναι

φανερό ότι ο μοναδιαίος πίνακας, I_k, έχει $r(I_k)=k$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ισοδυναμίες διατυπώνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.3
Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ *. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

i) *Ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος*

ii) $r(A)=n$

iii) $\det A\neq 0$.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα σχόλια διατυπώνουμε τον επόμενο αλγόριθμο, με τον οποίο ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\in V$.

Αλγόριθμος 4.1

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ του V

Βήμα 1 Αντικατάσταση διανυσμάτων στην εξίσωση

$$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}_V$$

Βήμα 2 Δημιουργία συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

όπου $\boldsymbol{x}=(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)^t\in M_{k\times 1}(\mathbb{F})$, $A\in M_{m\times k}(\mathbb{F})$

Βήμα 3 Για $m=k$, υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακα A, $\det A$

i) αν $\det A\neq 0$, τότε $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) αν $\det A=0$, τότε $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Βήμα 4 Για $m\neq k$, υπολογισμός του βαθμού του πίνακα A, $r(A)$

i) Αν $r(A)=k$, τότε $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) Διαφορετικά, τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Παρατήρηση 4.6 Στην ειδική περίπτωση, που εξετάζεται η γραμμική ανεξαρτησία ή μη των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ του $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας A των συντελεστών του συστήματος, που δημιουργείται από την εξίσωση $a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}_V$, είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Συνεπώς, στον προηγούμενο αλγόριθμο θα γράφουμε $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{v}_k)$, όπου $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, n-εξισώσεις και k-άγνωστοι του συστήματος.

Ο αλγόριθμος, που ακολουθεί, συνοψίζει όλες τις παρατηρήσεις και σχόλια για τη λύση ενός ομογενούς συστήματος (βλέπε Παρατήρηση 2.1, 3.3, 3.4, 3.5, 4.6 και Πρόταση 2.4, 3.4) καθώς και τη θεωρία του Πορίσματος 4.3.

Αλγόριθμος 4.2

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ του $\mathbb{R}^n$

Βήμα 1 Σχηματισμός του $n\times k$ πίνακα $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{v}_k)$ με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$

Βήμα 2 Για $k = n$, υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακα A, $\det A$

i) αν $\det A \neq 0$, τότε $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) αν $\det A = 0$, τότε $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Βήμα 3 Για $k < n$, υπολογισμός του βαθμού του πίνακα A, $r(A)$

i) αν $r(A) = k$, τότε $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) αν $r(A) < k$, τότε τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Βήμα 4 Για $k > n$, τότε τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

Παράδειγμα 4.7 i) Οι πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.6 (iv)).

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 4.1. Έχουμε $k = 3$ και ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ έχει $r(A) = 3$, οπότε $r(A) = k = 3$. Άρα, επαληθεύεται ο ισχυρισμός.

ii) Οι πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ **δεν** είναι γραμμικά ανεξάρτητοι (Παραδείγματος 4.6 (v)). Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.1, για $k = 3$, έχουμε ότι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ και ισχύει $r(A) = 2$, οπότε $r(A) \neq k = 3$. Συνεπώς οι πίνακες είναι γραμμικά εξαρτημένοι.

iii) Έστω $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ διανύσματα του $\mathbb{R}^4$, με $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 4, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, -7, 9, 7)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (5, -8, 6, 5)$. Τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2, για $k = 3$ και $n = 4$, ο πίνακας με στήλες τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & -7 & -8 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ με $r(A) = 2$, οπότε $r(A) < k$. Συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αν επιλέξουμε δύο από τα προηγούμενα διανύσματα, $k_1 = 2$, αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι ισχύει $r\left(A_i\right) = k_1$ (βήμα 3(ii), Αλγορίθμου 4.2), όπου A_i είναι ένας από τους πίνακες $A_1 = (\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2)$, $A_2 = (\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_3)$, $A_3 = (\boldsymbol{v}_2 \;\; \boldsymbol{v}_3)$. ◆◆◆

Επισημαίνεται ότι, ο Αλγόριθμος 4.2 χρησιμοποιείται **μόνο** όταν τα διανύσματα είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας ή εξάρτησης βασίζεται στον Ορισμό 4.12 και στη διανυσματική εξίσωση (4.22). Επομένως υλοποιείται ο Αλγόριθμος 4.1.

4.5 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Στην παρούσα ενότητα μελετώνται οι κοινές ιδιότητες που έχουν τα διαφορετικά σύνολα γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου και δίνεται απάντηση στο ερώτημα, που είχε διατυπωθεί στην προηγούμενη ενότητα, «ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός διανυσμάτων που απαιτείται για να παράγεται ένας διανυσματικός χώρος;»

Ορισμός 4.14

*Ένα υποσύνολο B ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V ονομάζεται **βάση** του διανυσματικού χώρου V, αν ισχύουν οι ιδιότητες:*

a. *Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο*

b. *Το B παράγει το V, δηλαδή, $V = span(B)$*

Παράδειγμα 4.8 i) Στο δ.χ. $\mathbb{R}^n$, τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, τα οποία ορίστηκαν στην (4.21), αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$, διότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Παράδειγμα 4.6 (i)) και η σχέση (4.20) αποδεικνύει ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$. Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική** ή **συνήθης** βάση του δ.χ. $\mathbb{R}^n$.

ii) Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (3, 0, -6)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-4, 1, 7)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 1, 5)$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$, εφόσον αποδειχθεί ότι ισχύουν οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14. Δηλαδή, πρέπει να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ζητούμενο που αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 4.6 (ii), και επιπλέον ότι παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.11, πρέπει να εξετάσουμε : αν για κάθε στοιχείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ υπάρχουν κατάλληλα $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τα οποία επαληθεύουν την ισότητα (4.18) του Ορισμού 4.10. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = (x, y, z) &\Leftrightarrow k_1(3, 0, -6) + k_2(-4, 1, 7) + k_3(-2, 1, 5) = (x, y, z) \\ &\Leftrightarrow (3k_1 - 4k_2 - 2k_3, k_2 + k_3, -6k_1 + 7k_2 + 5k_3) = (x, y, z), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} 3k_1 - 4k_2 - 2k_3 &= x \\ k_2 + k_3 &= y \\ -6k_1 + 7k_2 + 5k_3 &= z \end{aligned}$$

Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι $\det\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Η λύση μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο Cramer ή με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και είναι

$$k_1 = \frac{-x+3y-z}{3},\ \ k_2 = \frac{-2x+y-z}{2} \text{ και } k_3 = \frac{2x+y+z}{2}.$$

Συνεπώς, επαληθεύεται ο Ορισμός 4.11, δηλαδή, $\mathbb{R}^3 = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Αποδείξαμε ότι ισχύουν οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14 και επομένως το σύνολο $\{(3,0,-6),\ (-4,1,7),\ (-2,1,5)\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

Χρησιμοποιώντας το (i) βρίσκουμε μία άλλη βάση του $\mathbb{R}^3$ που είναι $\{\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)\}$. Παρατηρούμε ότι τα δύο σύνολα των βάσεων έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

iii) Στο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$, το σύνολο $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ αποτελεί μία βάση του. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι το σύνολο B_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, διότι για $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, η (4.22) γράφεται

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O},$$

η οποία δίνει μοναδική λύση την τετριμμένη, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Άρα τα στοιχεία του B_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ορισμός 4.12). Επιπλέον, στο Παράδειγμα 4.5 (iii) αποδείχθηκε ότι τα στοιχεία του B_2 είναι γεννήτορες του $M_2(\mathbb{R})$, άρα παράγουν το δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$.

iv) Το σύνολο $B = \{E_{ij} \,:\, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ έχει στοιχεία τους $m \times n$ πίνακες E_{ij}, οι οποίοι έχουν το (i,j)-στοιχείο ίσο με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα με 0. Γενικά, στο δ.χ. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (Παράδειγμα 4.1 (iii)) το σύνολο B είναι μία βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη του (iii) και αφήνεται ως άσκηση. Η βάση B ονομάζεται **κανονική** βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

v) Στο δ.χ. $\mathbb{R}_n[x]$, τα στοιχεία $1, x, x^2, \ldots, x^n$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}_n[x]$, διότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Παράδειγμα 4.6 (vii)) και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ (Παράδειγμα 4.5 (iv)). Αν θεωρήσουμε ότι $n \geq 0$, τότε ο δ.χ. συμβολίζεται $\mathbb{R}[x]$, και η αντίστοιχη βάση του $\mathbb{R}[x]$ είναι το απειροσύνολο $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

vi) Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ με $\boldsymbol{a}_i \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $r \leq m$, δηλαδή, το σύνολο B έχει στοιχεία τις μη μηδενικές γραμμές της κλιμακωτής μορφής του πίνακα A. Το B είναι μία βάση του χώρου γραμμών, $R(A)$, στο δ.χ. $\mathbb{R}^n$, διότι τα στοιχεία του B είναι ο χώρος γραμμών και είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 4.9). ◆◆◆

Στο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ αποδείχθηκε ότι υπάρχουν δύο σύνολα που αποτελούν βάση του χώρου, (βλέπε Παράδειγμα 4.8 (i)-(ii)). Επίσης στην Παρατήρηση 4.4, ένα στοιχείο του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ εκφράστηκε ως διαφορετικός γραμμικός συνδυασμός των ιδίων διανυσμάτων, και στον Ορισμό 4.14, η έννοια των γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου V είναι μία από τις δύο ιδιότητες για την ύπαρξη βάσης του V. Από αυτές τις παρατηρήσεις πηγάζουν τα παρακάτω βασικά ερωτήματα, που απασχολούν τη Γραμμική Άλγεβρα :

(i) Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου πάντοτε εκφράζονται ως διαφορετικοί γραμμικοί συνδυασμοί των ιδίων διανυσμάτων; Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος γραφής ενός στοιχείου του διανυσματικού χώρου ;

(ii) Για όλους τους διανυσματικούς χώρους υπάρχει τουλάχιστο μία βάση;

(iii) Είναι τυχαία η παρατήρηση που έγινε στο Παράδειγμα 4.8 (ii), ότι δηλαδή, οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου να εκφράζονται ως μοναδικός γραμμικός συνδυασμός ενός συνόλου διανυσμάτων, και έτσι δίνεται απάντηση στο ερώτημα (i).

Πρόταση 4.10

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) Ένα πεπερασμένο σύνολο $B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου V

ii) Κάθε στοιχείο $\boldsymbol{v}\in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B.

Απόδειξη : i)$\Rightarrow$ii) Επειδή B βάση του διανυσματικού χώρου V, σύμφωνα με την ιδιότητα (b) του Ορισμού 4.14, κάθε στοιχείο $\boldsymbol{v}\in V$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B. Έστω ότι υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η περιγραφή του γραμμικού συνδυασμού, δηλαδή έστω ότι υπάρχουν $k_1,k_2,\ldots,k_p,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p\in\mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v}=\ell_1\boldsymbol{v}_1+\ell_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\ell_p\boldsymbol{v}_p$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων καταλήγουμε

$$(k_1-\ell_1)\boldsymbol{v}_1+(k_2-\ell_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(k_p-\ell_p)\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{0}_V\,. \tag{4.28}$$

Επιπλέον τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως στοιχεία της βάσης B, οπότε από την (4.28) προκύπτει

$$k_1-\ell_1=0,\ k_2-\ell_2=0,\ \ldots,k_p-\ell_p=0,$$

δηλαδή, $k_1=\ell_1,\ k_2=\ell_2,\ \ldots,k_p=\ell_p$, από όπου συμπεραίνουμε ότι ο γραμμικός συνδυασμός έχει μοναδικούς συντελεστές.

ii)$\Rightarrow$i) Επειδή κάθε $\boldsymbol{v}\in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B, ισχύει $V=span(B)$. Απομένει να αποδείξουμε την ιδιότητα (a) του Ορισμού 4.14. Ας υποθέσουμε ότι για το $\boldsymbol{0}_V\in V$ υπάρχουν $a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbb{F}$ έτσι ώστε $a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_p\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{0}_V$. Επειδή για κάθε $i=1,2,\ldots,p$ ισχύει $0\cdot\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}_V$ (Πρόταση 4.4 (ii)), μπορούμε να γράψουμε και την ισότητα $0\cdot\boldsymbol{v}_1+0\cdot\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{0}_V$.

Όμως, επειδή από την υπόθεση, ο γραμμικός συνδυασμός του στοιχείου $\boldsymbol{0}_V\in V$ είναι μοναδικός, συγκρίνοντας τις δύο ισότητες του στοιχείου $\boldsymbol{0}_V\in V$ συμπεραίνουμε ότι $a_1=a_2=\cdots=a_p=0$. Επομένως τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ορισμός 4.12). ♦♦♦

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη, που διατυπώθηκε στην Πρόταση 4.10, εξασφαλίζει ότι κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ ενός διανυσματικού χώρου V έχει ένα μοναδικό τρόπο ανάλυσης σε διανύσματα, τα διανύσματα αυτά είναι μόνο τα στοιχεία μίας βάσης του V.

Ο μοναδικός τρόπος ανάλυσης κάθε στοιχείου $\boldsymbol{v} \in V$ είναι

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p .$$

Δηλαδή, οι συντελεστές των διανυσμάτων ορίζουν μοναδική $p-$άδα αριθμών, $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, που εξαρτάται τόσο από την επιλογή της βάσης B όσο και από τη σειρά που είναι γραμμένα τα στοιχεία στη βάση. Οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται **συνιστώσες** ή **συντεταγμένες** του διανύσματος $\boldsymbol{v}$ ως προς τη βάση B. Προφανώς, αλλάζοντας τη βάση ή τη σειρά των στοιχείων της βάσης αλλάζουν και οι συντεταγμένες του διανύσματος $\boldsymbol{v}$.

Παράδειγμα 4.9 i) Το σύνολο $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, όπου $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,0)$, (αυτά τα διανύσματα αναφέρθηκαν στο παράδειγμα της Παρατήρησης 4.4), δεν αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^2$, διότι το B δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Πράγματι, από τη διανυσματική εξίσωση (4.22) έχουμε :

$$a_1\left(1,1\right) + a_2(0,1) + a_3(1,0) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (a_1 + a_3, a_1 + a_2) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{aligned} a_1 \quad + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Προφανώς, το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση τη μηδενική, αλλά έχει άπειρες λύσεις $(a_1 \;\; a_2 \;\; a_3)^t = (a_1 \;\; -a_1 \;\; -a_1)^t$, $a_1 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, άρα το σύνολο B είναι γραμμικά εξαρτημένο και δεν αποτελεί βάση. Συνεπώς δεν εφαρμόζεται το (ii) της Πρότασης 4.10.

ii) Το σύνολο $B_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \{(1,1), (0,1)\} \subseteq B$ αποτελεί βάση του δ.χ. $\mathbb{R}^2$.

- Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι, από την εξίσωση (4.22) έχουμε :

$$a_1\left(1,1\right) + a_2(0,1) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (a_1, a_1 + a_2) = (0,0),$$

οπότε το σύστημα που προκύπτει έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

- Επίσης ισχύει $\mathbb{R}^2 = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο ισχυρισμό, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.11, πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, που σημαίνει, ότι υπάρχουν κατάλληλα k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$, τα οποία επαληθεύουν την ισότητα (4.18) (Ορισμός 4.10). Δηλαδή,

$$\boldsymbol{v} = (x, y) = k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2 . \tag{4.29}$$

Αντικαθιστώντας τα διανύσματα στην (4.29) και κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε σε σύστημα με αγνώστους k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$, ως εξής

$$(x, y) = k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2 = k_1(1,1) + k_2(0,1) = (k_1,\, k_1 + k_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} k_1 = x \\ k_1 + k_2 = y \end{cases}.$$

Η λύση του συστήματος είναι :

$$k_1 = x \quad \text{και} \quad k_2 = y - x \text{, για κάθε } x, y \in \mathbb{R} . \tag{4.30}$$

Επομένως, τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ είναι γεννήτορες του $\mathbb{R}^2$.

Άρα, επειδή ισχύουν οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, το B_1 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = (3, 4)$, αντικαθιστώντας στην (4.29) τους συντελεστές, οι οποίοι υπολογίζονται από την (4.30), προκύπτει

$$\boldsymbol{v} = (3, 4) = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 . \tag{4.31}$$

Αυτή είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος $\boldsymbol{v}$, σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 4.10, οι δε συνιστώσες του $\boldsymbol{v}$ ως προς τη βάση B_1 είναι $(3,1)$.

iii) Επειδή τα στοιχεία $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ αποτελούν κανονική βάση στο δ.χ. $\mathbb{R}^2$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.8 (i), εφαρμόζεται το (ii) της Πρότασης 4.10. Για το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = (3, 4)$ από την (4.20) έχουμε

$$\boldsymbol{v} = (3, 4) = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 , \tag{4.32}$$

οι δε συνιστώσες του $\boldsymbol{v}$, ως προς την κανονική βάση, είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος, $(3, 4)$. ◆◆◆

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (4.31) και (4.32), διαπιστώνουμε ότι αλλάζοντας τη βάση οι συνιστώσες του διανύσματος είναι διαφορετικές.

Στο Παράδειγμα 4.8 (v), καθώς και στον Ορισμό 4.14, παρατηρούμε ότι υπάρχουν διανυσματικοί χώροι που οι βάσεις τους αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, και άλλοι που οι βάσεις τους είναι μη πεπερασμένα σύνολα. Το ερώτημα

(ii) σχετίζεται με την ύπαρξη βάσης ενός διανυσματικού χώρου ανεξάρτητα από το πλήθος των στοιχείων του συνόλου. Η απάντηση και σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική, επειδή αποδεικνύεται ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μία βάση. Ωστόσο η απόδειξη απαιτεί εφαρμογή θεωρημάτων Συναρτησιακής Ανάλυσης, στα οποία δεν κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε. Η απόδειξη στο ερώτημα θα γίνει για διανυσματικούς χώρους πεπερασμένα παραγόμενους (Ορισμός 4.11) και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με διανυσματικούς χώρους που οι βάσεις τους αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Πρόταση 4.11

Κάθε πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος $V \neq \{\mathbf{0}_V\}$ από ένα υποσύνολο K του V έχει μία πεπερασμένη βάση.

Απόδειξη : Έστω $K=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ το σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου V, δηλαδή $V=span(K)$. Αν το K είναι γραμμικά ανεξάρτητο, προφανώς το K αποτελεί και μία βάση του διανυσματικού χώρου V, (Ορισμός 4.14). Αν το K είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.8, ένα από τα $\boldsymbol{a}_i$, $i=1,2,\ldots,n$, έστω $\boldsymbol{a}_n$, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αφαιρώντας το $\boldsymbol{a}_n$ από το K, απομένει το σύνολο $K_1=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}\}$, για το οποίο ισχύει $V=span(K_1)=span(K)$. Εργαζόμενοι με την ίδια μέθοδο για το K_1 όπως προηγούμενα, καταλήγουμε σε ένα νέο σύνολο γεννητόρων του V, το K_2. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία μετά από $n-1$ βήματα καταλήγουμε είτε σε μία βάση του V είτε σε ένα γραμμικά εξαρτημένο στοιχείο, έστω $\boldsymbol{a}_1$. Το $\boldsymbol{a}_1$ για να είναι γραμμικά εξαρτημένο, πρέπει να ταυτίζεται με το $\mathbf{0}_V$, (Πόρισμα 4.1, (i)-(ii)), οπότε σε αυτή την περίπτωση $V=\{\mathbf{0}_V\}$, άτοπο, από την υπόθεση. ◆◆◆

Παρατήρηση 4.7 Στην Πρόταση 4.11, αν $V=\{\mathbf{0}_V\}$, τότε θεωρούμε ως βάση του διανυσματικού χώρου το κενό σύνολο, το οποίο ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, διότι $V=span(\varnothing)=\{\mathbf{0}_V\}$ (Ορισμός 4.11), και το κενό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όπως γνωρίζουμε από την Παρατήρηση 4.5 (ii).

Με ανάλογο τρόπο, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.11, αποδεικνύεται και η πρόταση που ακολουθεί, γνωστή στη βιβλιογραφία ως **λήμμα ανταλλαγής** του *Steinitz*.

Πρόταση 4.12

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος που παράγεται από το $K=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$. Αν $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V, τότε

i) $m\le n$ *και*

ii) *ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από ένα σύνολο της μορφής*

$$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{v}'_{m+1},\boldsymbol{v}'_{m+2},\ldots,\boldsymbol{v}'_n\},\quad \text{όπου } \boldsymbol{v}'_j\in K,\ j=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Στο Παράδειγμα 4.8 (ii) καθώς και στο Παράδειγμα 4.9 (ii)-(iii) αποδείχθηκε ότι υπάρχουν διαφορετικές βάσεις του ιδίου διανυσματικού χώρου, με το ίδιο πλήθος στοιχείων η κάθε μία. Αυτή η ένδειξη είχε οδηγήσει στην (iii) ερώτηση «ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των βάσεων ενός διανυσματικού χώρου;». Η απάντηση είναι διατυπωμένη στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 4.13

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος. Αν $B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ μία πεπερασμένη βάση του V, για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε κάθε άλλη βάση του V είναι πεπερασμένη και έχει n στοιχεία.

Απόδειξη : Έστω $K=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m\}$ μία άλλη βάση του V. Αν θεωρηθεί η βάση K ως ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V και η βάση B ότι παράγει το διανυσματικό χώρο V, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.12, $m\le n$. Αντίστροφα, αν θεωρηθεί ότι τα στοιχεία του συνόλου B είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι τα στοιχεία του K παράγουν το διανυσματικό χώρο V, τότε $n\le m$ (Πρόταση 4.12). Από τις δύο ανισώσεις προκύπτει ότι $m=n$, δηλαδή οι δύο βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. ◆◆◆

Βασιζόμενοι στην Πρόταση 4.13, ορίζουμε το σταθερό αριθμό, που είναι ο ίδιος για όλες τις πεπερασμένες βάσεις ενός διανυσματικού χώρου, με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.15

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος[4]. *Ο αριθμός των στοιχείων οποιασδήποτε βάσης B του V ονομάζεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{F}} V$ ή απλά $\dim V$*[5].

Για $V = \{\mathbf{0}_V\}$ ορίζουμε $\dim V = 0$.

Παράδειγμα 4.10

i) Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει $\dim \mathbb{R}^n = n$, βλέπε Παράδειγμα 4.8 (i).

ii) Ο διανυσματικός χώρος $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ έχει $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m\cdot n$, βλέπε Παράδειγμα 4.8 (iv).

iii) διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_n[x]$ έχει $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, βλέπε Παράδειγμα 4.8 (v).

iv) Ο χώρος γραμμών, $R(A)$, έχει $\dim R(A) = r$, όπου r το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα του $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, βλέπε Παράδειγμα 4.8 (vi). ◆◆◆

Παρατήρηση 4.8 Για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, στο προηγούμενο Παράδειγμα 4.10 (iv), καταλήξαμε ότι ισχύει $\dim R(A) = r$, όπου r είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα του A. Ο αριθμός, που δείχνει το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα του A, ονομάζεται **βαθμός** ή **τάξη** του πίνακα A, και συμβολίζεται $r(A)$ (Ορισμός 3.6). Επομένως η διάσταση του χώρου γραμμών είναι ο βαθμός του πίνακα. Αποδεικνύεται ότι $\dim R(A) = \dim C(A)$, όπου $C(A)$ ο χώρος στηλών του πίνακα A.

Άρα, για έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ισχύει

$$\dim R(A) = \dim C(A) = r(A), \tag{4.33}$$

όπου $r(A)$ ο βαθμός του A.

---

[4] Όταν ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση, τότε χαρακτηρίζεται ως χώρος **πεπερασμένης διάστασης**, ενώ όταν η βάση του V δεν είναι πεπερασμένη, ο χώρος λέγεται **απειροδιάστατος** ή χώρος **άπειρης διάστασης**.

[5] Όταν δεν υπάρχει σύγχυση σχετικά με το $\mathbb{F}$.

Σε πολλά βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας η (4.33) δίνεται ως ορισμός για το βαθμό ενός πίνακα A.

Συνδυάζοντας την (4.26) με την (4.33) έχουμε

$$r(A) = \dim R(A) = \dim C(A) = \dim R(A^t) = r(A^t).$$

Έτσι προκύπτει ότι ισχύει

$$r(A) = r(A^t). \tag{4.34}$$

Ο Αλγόριθμος 4.2 υλοποιείται κατά τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας ή εξάρτησης των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ του $\mathbb{R}^n$. Αρκετές φορές ενδιαφερόμαστε να πληροφορηθούμε πόσα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή ποια είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ακόμη χρειάζεται να υπολογίσουμε μία βάση του υποχώρου $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$. Οι επόμενοι αλγόριθμοι απαντούν στα προηγούμενα ερωτήματα υπολογίζοντας τα στοιχεία μίας βάσης του $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.9 και τα σχόλια της Παρατήρησης 4.8.

Αλγόριθμος 4.3

Χώρου γραμμών

Εύρεση βάσης του $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$

Βήμα 1 Σχηματισμός του $k \times n$ πίνακα A με *γ ρ α μ μ έ ς* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$

Βήμα 2 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών στον πίνακα A και υπολογισμός του γραμμοϊσοδύναμου κλιμακωτού πίνακα, B

Βήμα 3 Υπολογισμός του βαθμού του πίνακα A, $r(A)$

Βήμα 4 Οι μη-μηδενικές γραμμές του B αποτελούν τα στοιχεία της ζητούμενης βάσης

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,4,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1,-9)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (3,4,-2,-16)$ του $\mathbb{R}^4$ δημιουργούν τον υπόχωρο $U = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, ο οποίος έχει $\dim U = 2$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.3 υπολογίζουμε μία βάση του υποχώρου. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -9 \\ 3 & 4 & -2 & -16 \end{pmatrix}$ με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα. Μετά από κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών καταλήγουμε στον πίνακα $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.9 ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται με το χώρο γραμμών του B. Επομένως μια βάση του τελευταίου υποχώρου είναι $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \{(1,2,4,-2),\ (0,1,7,5)\}$, με διάσταση 2.

Ο Αλγόριθμος 4.3 κατασκευάζει μία βάση, της οποίας τα στοιχεία δεν περιέχουν τα αρχικά διανύσματα. Ο Αλγόριθμος 4.4, που ακολουθεί, κατασκευάζει βάση με στοιχεία τα δεδομένα διανύσματα. Επίσης, χρειάζεται να τονίσουμε ότι ο Αλγόριθμος 4.3 ονομάζεται **Αλγόριθμος χώρου γραμμών**, διότι ο πίνακας έχει γραμμές τα διανύσματα, ενώ ο Αλγόριθμος 4.4 ονομάζεται **Αλγόριθμος αποβολής**, διότι διαγράφονται κατά στήλες τα διανύσματα που δεν περιέχουν οδηγό στον κλιμακωτό πίνακα.

Αλγόριθμος 4.4

Εύρεση βάσης του $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k)$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$

Βήμα 1 Σχηματισμός του $n \times k$ πίνακα $A = (\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{v}_k)$ με *σ τ ή λ ε ς* τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$

Βήμα 2 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών στον πίνακα A και υπολογισμός του γραμμοϊσοδύναμου κλιμακωτού πίνακα, B

Βήμα 3 Αποβολή των στηλών του πίνακα A, που αντιστοιχούν σε στήλες του B, οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό

Βήμα 4 Η ζητούμενη βάση αποτελείται από τις στήλες που απέμειναν στον A και αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς

Ακόμη, υπενθυμίζουμε ότι, όταν ένας διανυσματικός χώρος παράγεται από ένα σύνολο διανυσμάτων, τότε το πλήθος των στοιχείων αυτού του συνόλου είναι ελάχιστο (Πρόταση 4.7). Συνδυάζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα με την Πρόταση 4.12, διαπιστώνουμε ότι μία πεπερασμένη βάση ενός διανυσματικού χώρου V έχει ως στοιχεία το «μέγιστο» δυνατό αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων και τον «ελάχιστο» δυνατό αριθμό διανυσμάτων που παράγουν τον διανυσματικό χώρο, προτάσεις που διατυπώνονται στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$ και K ένα υποσύνολο του V.

i) *Αν το πλήθος των διανυσμάτων του K είναι $n+p$, για κάθε $p \geq 1$, τότε τα διανύσματα του K είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

ii) *Αν το πλήθος των διανυσμάτων του K είναι λιγότερα από n, τότε τα διανύσματα του K δεν παράγουν το V.*

Απόδειξη : i) Έστω το σύνολο $K = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+p}\}$ ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι μία βάση του V. Επειδή ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το B, σύμφωνα με την Πρόταση 4.12, πρέπει να ισχύει $n + p \leq n \Rightarrow p \leq 0$, που είναι άτοπο από την υπόθεση. Επομένως, το K είναι γραμμικά εξαρτημένο.

ii) Έστω $K = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V με $r < n$ και $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ μία βάση του διανυσματικού χώρου. Από Πρόταση 4.7 το K είναι το ελάχιστο που παράγει το V, άρα πρέπει $\dim V \leq r < n$, άτοπο. Επομένως, το K δεν παράγει το V. ◆◆◆

Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα $p_1(x) = x^2 - 3x + 9$, $p_2(x) = x^2 + 8x + 2$, $p_3(x) = x - 4$ και $p_4(x) = x^2 - 2x + 1$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πράγματι, σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.10 (iii) ισχύει $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, και τα δοσμένα πολυώνυμα είναι περισσότερα από τη διάσταση του δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$, (Πόρισμα 4.2 (i)).

Τα $p_1(x)$, $p_2(x)$ δεν παράγουν τον $\mathbb{R}_2[x]$, διότι είναι λιγότερα από τη διάσταση του χώρου (Πόρισμα 4.2 (ii)).

Συνεχίζοντας τη μελέτη των υποσυνόλων που σχετίζονται με την έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου V, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την επόμενη πρόταση, η οποία παρουσιάζει τη μεθοδολογία κατασκευής μίας βάσης από ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V.

Πρόταση 4.14

Έστω V *ένας* $\mathbb{F}-$*διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $K=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_p\}$ *ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του* V. *Τότε υπάρχει πεπερασμένη βάση* B *του* V, *η οποία περιέχει το* K.

Απόδειξη : Έστω $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_p$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V και $B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ μία βάση του V. Επειδή ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το B, σύμφωνα με την Πρόταση 4.12 ισχύει $p\le n$. Το σύνολο $K'=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_p,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο (Πόρισμα 4.2 (i)) και παράγει το διανυσματικό χώρο V, επειδή $B\subset K'$. Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο, που εφαρμόσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.11, διαγράφοντας από το σύνολο K' κάθε διάνυσμα που είναι γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων διανυσμάτων, καταλήγουμε σε ένα σύνολο $\hat{K}$ που είναι βάση του V. Το $\hat{K}$ περιέχει τα διανύσματα $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_p$, επειδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα και κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, οπότε δεν συμμετέχουν στη διαδικασία της διαγραφής. Ακόμη περιέχει κάποια διανύσματα μέχρι να συμπληρωθούν τα n στοιχεία της βάσης. ◆◆◆

Η Πρόταση 4.14 είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **θεώρημα επέκτασης** ενός συνόλου (ανεξαρτήτων στοιχείων) σε μία βάση του διανυσματικού χώρου.

Παρατήρηση 4.9 Επειδή στην απόδειξη του θεωρήματος επέκτασης δεν αποδείχθηκε μοναδικός τρόπος κατασκευής της βάσης, οι νέες βάσεις που κατασκευάζονται είναι περισσότερες από μία. Τα διανύσματα, που συμπληρώνουν το αρχικό σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, επιλέγονται με μοναδικά κριτήρια

i) να μην είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων και

ii) να απαιτείται ο συντομότερος χρόνος κατά τον υπολογισμό των πράξεων.

Παράδειγμα 4.11 Έστω $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathbb{R}^4$ με $\boldsymbol{v}_1=(1,-2,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(4,-7,9,7)$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2 αποδεικνύεται ότι τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Παράδειγμα 4.7 (iii)).

Επειδή μία βάση του $\mathbb{R}^4$ είναι η κανονική $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ και $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, μπορούμε να επεκτείνουμε το σύνολο $K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, συμπληρώνοντάς το με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ σε ένα νέο σύνολο $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, το οποίο αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^4$.

Πράγματι, από τον Αλγόριθμο 4.2 έχουμε

$$\det(\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \boldsymbol{e}_3 \ \boldsymbol{e}_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Επίσης, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ παράγουν τον $\mathbb{R}^4$, διότι για κάθε $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ υπάρχουν κατάλληλα $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3 + k_4\boldsymbol{e}_4.$$

Η παραπάνω ισότητα, μετά την αντικατάσταση των διανυσμάτων και τις πράξεις, οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 \qquad\qquad &= x_1 \\ -2k_1 - 7k_2 \qquad\qquad &= x_2 \\ 4k_1 + 9k_2 + k_3 \qquad &= x_3 \\ 3k_1 + 7k_2 \qquad + k_4 &= x_4 \end{aligned}.$$

Είναι φανερό ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, επειδή ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, έχει $\det(\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \boldsymbol{e}_3 \ \boldsymbol{e}_4) = 1$, (Πρόταση 2.5-μέθοδος Cramer). Επομένως, το S επαληθεύει τις ιδιότητες του Ορισμού 4.14, άρα είναι μία βάση του $\mathbb{R}^4$. ◆◆◆

Η επιλογή των μοναδιαίων διανυσμάτων, που επεκτείνουν το σύνολο των αρχικών γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο παράδειγμα, έγινε με κριτήριο την απλοποίηση των πράξεων.

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνονται δύο ισοδύναμες προτάσεις, οι οποίες προϋποθέτουν τον έλεγχο μίας μόνο εκ των δύο ιδιοτήτων που απαιτεί ο ορισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου (Ορισμός 4.14), ώστε να αποφανθούμε αν ένα πεπερασμένο σύνολο αποτελεί βάση.

Πρόταση 4.15

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V

ii) το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V

Απόδειξη : i)$\Rightarrow$ ii) Έστω ότι ισχύει το (i) και ότι το $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.8, κάποιο από τα στοιχεία του συνόλου είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, άρα ο χώρος V παράγεται το πολύ από $n-1$ διανύσματα. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων έχει το πολύ $n-1$ διανύσματα (Πρόταση 4.12), και συνεπώς $\dim V \le n-1$, άτοπο από την υπόθεση.

ii)$\Rightarrow$ i) Επειδή το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση B του V (Πρόταση 4.14). Από υπόθεση $\dim V = n$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.13 πρέπει να ισχύει $\dim B = n$. Άρα, η βάση B είναι $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 4.14. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.12 Ισχυριζόμαστε ότι τα πολυώνυμα

$$1, 2x^2+1, x^3+2x-1, 2x^3+4x^2-2$$

αποτελούν μία βάση του δ.χ. $\mathbb{R}_3[x]$.

Επειδή είναι γνωστό ότι $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ (Παράδειγμα 4.10), για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό δεν απαιτείται να αποδείξουμε και τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα πολυώνυμα $1, 2x^2+1, x^3+2x-1, 2x^3+4x^2-2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}_3[x]$. Οπότε, από την ισοδυναμία της Πρότασης 4.15, τα $1, 2x^2+1, x^3+2x-1, 2x^3+4x^2-2$ παράγουν τον $\mathbb{R}_3[x]$, και συνεπώς αποτελούν βάση του.

Αντικαθιστώντας τα διανύσματα-πολυώνυμα στην (4.22) έχουμε :

$$a_1 \cdot 1 + a_2(2x^2+1) + a_3(x^3+2x-1) + a_4(2x^3+4x^2-2) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]} \Leftrightarrow$$
$$(a_1+a_2-a_3-2a_4) + 2a_3x + (2a_2+4a_4)x^2 + (a_3+2a_4)x^3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}$$

Οπότε, από την ισότητα πολυωνύμων καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - a_3 - 2a_4 &= 0 \\ 2a_3 \qquad &= 0 \\ 2a_2 \qquad + 4a_4 &= 0 \\ a_3 + 2a_4 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Άρα, τα πολυώνυμα $1, 2x^2 + 1, x^3 + 2x - 1, 2x^3 + 4x^2 - 2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}_3[x]$ (Ορισμός 4.12). ♦♦♦

Το Πόρισμα 4.4 που ακολουθεί, είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 4.15 και 4.9 και του Πορίσματος 4.3.

Πόρισμα 4.4

Έστω $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και ο $n \times n$ πίνακας $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ με στήλες τα διανύσματα αυτά.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη διάσταση ενός διανυσματικού χώρου και ενός υποχώρου του.

Πρόταση 4.16

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και U ένας υπόχωρος του V. Τότε:

i) $\dim U \leq \dim V$.

ii) $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$.

Απόδειξη : i) Έστω B μία βάση του V και B_U μία βάση του υποχώρου U. Θεωρώντας το B_U ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, αυτό μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του V, σύμφωνα με την Πρόταση 4.14.

Άρα, $B_U \subseteq B$, από όπου είναι φανερό ότι $\dim U \leq \dim V$.

ii) Αν $U = V$, είναι φανερό ότι $\dim U = \dim V$. Αντίστροφα, εφόσον ισχύει $\dim U = \dim V$, υπάρχει μία βάση B_U του U, άρα το B_U είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο και του διανυσματικού χώρου V. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.14, το B_U μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση B του V, με $B_U \subseteq B$. Από $\dim U = \dim V$, οι δύο βάσεις πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, οπότε $B_U = B$, από όπου προκύπτει $U = V$. ♦♦♦

Η προηγούμενη πρόταση βρίσκει εφαρμογή στην επίλυση ενός ομογενούς συστήματος.

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ο πίνακας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Επειδή ο χώρος λύσεων, $N(A)$, είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.2(iv)) και $\dim M_{n\times 1}(\mathbb{R}) = n$ (Παράδειγμα 4.10 (ii)), σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 ισχύει $\dim N(A) \le n$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι[6] :

Εφαρμογή 4.6

Έστω το ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *με* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Ο χώρος λύσεων,* $N(A)$, *έχει*

$$\dim N(A) = n - r(A)\,^{7},$$

όπου $r(A)$ *είναι ο βαθμός (τάξη) του πίνακα των συντελεστών του συστήματος.*

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **θεώρημα διαστάσεων**, επειδή δίνεται η σχέση που συνδέει τις διαστάσεις δύο υποχώρων U, W ενός διανυσματικού χώρου V με τις διαστάσεις των υποχώρων της τομής $U \cap W$ και του αθροίσματος $U + W$.

Πρόταση 4.17

Έστω V *ένας* $\mathbb{F}-$*διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και* U, W *δύο υπόχωροι του* V. *Τότε*

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \tag{4.35}$$

[6] Η απόδειξη δίνεται στο Κεφάλαιο 5, Πρόταση 5.2.
[7] Η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ακριβώς το πλήθος παραμέτρων του συστήματος.

Απόδειξη : Επειδή το άθροισμα $U+W$ και η τομή $U\cap W$ είναι υπόχωροι του V (Πρόταση 4.6) και V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, από την Πρόταση 4.16 (i) συμπεραίνουμε ότι οι υπόχωροι U, W, $U+W$ και $U\cap W$ είναι πεπερασμένης διάστασης χώροι, κατά συνέπεια κάθε υπόχωρος έχει μία βάση (Πρόταση 4.11). Θεωρούμε $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\}$ μία βάση του $U\cap W$. Από τις ιδιότητες των συνόλων $U\cap W\subseteq U$, $U\cap W\subseteq W$ και το θεώρημα επέκτασης (Πρόταση 4.14), συμπεραίνουμε ότι : a) το γραμμικά ανεξάρτητο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\}$ του U μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του U, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_q\}$, και b) το γραμμικά ανεξάρτητο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p\}$ του W μπορεί να επεκταθεί στην $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_r\}$ βάση του W. Έτσι έχουμε,

$$\dim(U\cap W)=p,\quad \dim U=p+q,\quad \dim W=p+r. \tag{4.36}$$

Θα αποδείξουμε ότι το $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_q,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_r\}$ είναι μία βάση του $U+W$. Έστω $\boldsymbol{x}\in U+W$, από τον ορισμό του αθροίσματος στην (4.16) υπάρχουν $\boldsymbol{u}\in U$ και $\boldsymbol{w}\in W$ έτσι ώστε $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$. Επιπλέον, τα στοιχεία της βάσης του U είναι γεννήτορες του U, επομένως

$$\boldsymbol{u}\in U \Rightarrow \boldsymbol{u}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_p\boldsymbol{v}_p+b_1\boldsymbol{u}_1+b_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+b_q\boldsymbol{u}_q.$$

Όμοια, από τους γεννήτορες του W γράφουμε

$$\boldsymbol{w}\in W \Rightarrow \boldsymbol{w}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{v}_p+d_1\boldsymbol{w}_1+d_2\boldsymbol{w}_2+\cdots+d_r\boldsymbol{w}_r,$$

όπου $a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q,c_1,c_2,\ldots,c_p,d_1,d_2,\ldots,d_r\in\mathbb{F}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις προηγούμενες ισότητες έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}&=(a_1+c_1)\boldsymbol{v}_1+(a_2+c_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(a_p+c_p)\boldsymbol{v}_p\\&\quad+b_1\boldsymbol{u}_1+b_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+b_q\boldsymbol{u}_q+d_1\boldsymbol{w}_1+d_2\boldsymbol{w}_2+\cdots+d_r\boldsymbol{w}_r\end{aligned}$$

από όπου είναι φανερό ότι

$$U+W=span(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_q,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_r).$$

Για $k_1,k_2,\ldots,k_p,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_q,m_1,m_2,\ldots,m_r\in\mathbb{F}$ γράφουμε

$$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p+\ell_1\boldsymbol{u}_1+\ell_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\ell_q\boldsymbol{u}_q+m_1\boldsymbol{w}_1+m_2\boldsymbol{w}_2+\cdots+m_r\boldsymbol{w}_r=\boldsymbol{0}_V \tag{4.37}$$

$$\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p+\ell_1\boldsymbol{u}_1+\ell_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\ell_q\boldsymbol{u}_q=-m_1\boldsymbol{w}_1-m_2\boldsymbol{w}_2-\cdots-m_r\boldsymbol{w}_r=\boldsymbol{y}$$

Το διάνυσμα

$$\boldsymbol{y}=k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{v}_p+\ell_1\boldsymbol{u}_1+\ell_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\ell_q\boldsymbol{u}_q\in U,$$

ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του U. Επιπλέον, επειδή $\boldsymbol{w}_i \in W$, $i = 1, 2, \ldots, r$, με W υπόχωρο του V, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (ii) προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{y} = -m_1\boldsymbol{w}_1 - m_2\boldsymbol{w}_2 - \cdots - m_r\boldsymbol{w}_r \in W . \tag{4.38}$$

Επίσης, από $\boldsymbol{y} \in U$ και $\boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{y} \in U \cap W$. Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ ανήκει στο $U \cap W$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του $U \cap W$. Δηλαδή, υπάρχουν $t_1, t_2, \ldots, t_p \in \mathbb{F}$ τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{y} = t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_p\boldsymbol{v}_p . \tag{4.39}$$

Εξισώνοντας τα πρώτα μέλη στις (4.38), (4.39) καταλήγουμε στη σχέση

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_p\boldsymbol{v}_p + m_1\boldsymbol{w}_1 + m_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + m_r\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}_V ,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_p = m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 0 , \tag{4.40}$$

εξαιτίας της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων της βάσης του W.

Αντικαθιστώντας τα $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 0$ στην (4.37) έχουμε

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{v}_p + \ell_1\boldsymbol{u}_1 + \ell_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \ell_q\boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{0}_V ,$$

από όπου

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = \ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_q = 0 , \tag{4.41}$$

διότι τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία της βάσης του U.

Συνεπώς, οι συντελεστές στην εξίσωση (4.37) έχουν μοναδική λύση την τετριμμένη, όπως αποδεικνύεται στις (4.40) και (4.41).

Άρα, το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον υπόχωρο $U + W$. Επομένως, τα στοιχεία του παραπάνω συνόλου αποτελούν μία βάση του $U + W$ και έτσι

$$\dim(U + W) = p + q + r .$$

Αντικαθιστώντας τις διαστάσεις που δίνονται στην (4.36) έχουμε την ισότητα

$$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = (p + q) + (p + r) - p = p + q + r = \dim(U + W)$$

το οποίο επαληθεύει την (4.35). ◆◆◆

Υπενθυμίζουμε ότι, στο ευθύ άθροισμα, $U \oplus W$, ισχύει $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, (Ορισμός 4.9), καθώς επίσης $\dim \mathbf{0}_V = 0$, (Ορισμός 4.15). Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.17 είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.5

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και U,W δύο υπόχωροι του V. Τότε

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W. \tag{4.42}$$

Για παράδειγμα, θεωρούμε τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ του δ. χ. $\mathbb{R}^3$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (1,4,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{w}_1 = (2,1,-1)$ και $\boldsymbol{w}_2 = (3,1,4)$, με $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ και $W = span(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$. Τα U,W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ (Πρόταση 4.7) και ο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2 ελέγχουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και επομένως $\dim U = 2$. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι $\dim W = 2$. Αν $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, από την (4.42) παίρνουμε $\dim \mathbb{R}^3 = 2 + 2$, άτοπο. Άρα, ο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των δύο υποχώρων U,W.

Πρόταση 4.18

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Κάθε υπόχωρος U του V έχει ένα συμπλήρωμα.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι, ο πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος V έχει $\dim V = n$. Επειδή U είναι υπόχωρος του V ισχύει $\dim U = p \le n$ (Πρόταση 4.16 (i)), και έστω ότι μία βάση του U αποτελείται από τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p$. Η βάση του U μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.14 μπορεί να επεκταθεί στο σύνολο

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{u}_{p+1}, \boldsymbol{u}_{p+2}, \dots, \boldsymbol{u}_n,$$

το οποίο αποτελεί μία βάση του V. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, για κάθε $\boldsymbol{v} \in V$ υπάρχουν μοναδικοί $k_1, k_2, \dots, k_p, k_{p+1}, k_{p+2}, \dots, k_n \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v} = (k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{u}_p) + (k_{p+1}\boldsymbol{u}_{p+1} + k_{p+2}\boldsymbol{u}_{p+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}. \tag{4.43}$$

Επειδή στην (4.43) η γραφή $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ είναι μοναδική, (εξαιτίας της μοναδικότητας των k_i), και $\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{u}_p\in U$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του U, θέτουμε $\boldsymbol{w}=k_{p+1}\boldsymbol{u}_{p+1}+k_{p+2}\boldsymbol{u}_{p+2}+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n\in W$, θεωρώντας ότι W είναι ένας υπόχωρος του V, τέτοιος ώστε $W=span(\boldsymbol{u}_{p+1},\boldsymbol{u}_{p+2},\ldots,\boldsymbol{u}_n)$. Σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.5 (ii), επειδή $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο, μπορούμε να γράψουμε $V=U\oplus W$, και τότε ο υπόχωρος U έχει ένα συμπλήρωμα τον υπόχωρο W (Ορισμός 4.9). ◆◆◆

Υπενθυμίζουμε ότι η επέκταση ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου σε βάση δεν είναι μοναδική (Παρατήρηση 4.9), επομένως και στην Πρόταση 4.18, το συμπλήρωμα του U ως προς το V δεν είναι μοναδικός υπόχωρος του V.

Παράδειγμα 4.13 Έστω $U=span(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$, όπου $\boldsymbol{v}_1=(-5,3,-2,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(-3,1,0,2)$.
Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2 διαπιστώνουμε ότι, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως $\dim U=2$.
Αναζητούμε ένα άλλον υπόχωρο W του $\mathbb{R}^4$, έτσι ώστε $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.
Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.18, πρέπει να υπολογίσουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in\mathbb{R}^4$, τέτοια ώστε το $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$ να είναι μία βάση του $\mathbb{R}^4$, οπότε το $W=span(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$ θα έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Επιλέγοντας τυχαία δύο στοιχεία από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$, ελέγχουμε αν η συγκεκριμένη επιλογή αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^4$, διαφορετικά ξαναδοκιμάζουμε.
Έστω $\boldsymbol{w}_1=(1,0,0,0)$ $\boldsymbol{w}_2=(0,1,0,0)$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2 (βήμα 1 και 2), έχουμε ότι $k=n=4$, οπότε χρειάζεται να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A=(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2)$ που είναι $\det\begin{pmatrix}-5 & -3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=-4\neq 0$.

Συνεπώς, τα διανύσματα $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$, άρα $W=span(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$. ◆◆◆

4.6 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 4.14 Έστω $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ με $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle=1$, $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=4$ και $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=-1$.

Να υπολογιστούν :

i) το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle 4\boldsymbol{u}+6\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v}\rangle$,

ii) το μέτρο του $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

iii) η γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

Απόδειξη : i) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της Πρότασης 4.2 έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\langle 4\boldsymbol{u}+6\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v}\rangle &= \langle 4\boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v}\rangle+\langle 6\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v}\rangle\\ &=\langle 4\boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle 4\boldsymbol{u},-5\boldsymbol{v}\rangle+\langle 6\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle 6\boldsymbol{v},-5\boldsymbol{v}\rangle\\ &=8\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle-20\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+12\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle-30\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\\ &=8\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle-8\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle-30\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\\ &=8\cdot1-8\cdot(-1)-30\cdot4=-104\end{aligned}$$

ii) Το μέτρο του διανύσματος $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ δίνεται από τον τύπο (4.7) του Ορισμού 4.4 και είναι $\|2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\langle 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle}$. Γι' αυτό χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της Πρότασης 4.2. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}\langle 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle &= \langle 2\boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle+\langle -\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle\\ &=\langle 2\boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle 2\boldsymbol{u},-\boldsymbol{v}\rangle+\langle -\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle -\boldsymbol{v},-\boldsymbol{v}\rangle\\ &=4\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle-4\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\\ &=4\cdot1-4\cdot(-1)+1\cdot4=12\end{aligned}$$

Άρα $\|2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\langle 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

iii) Από τη σχέση στην (4.10) έχουμε $\cos\vartheta=\dfrac{\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\cdot\|2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|}$, όπου ϑ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

Αρχικά, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της Πρότασης 4.2, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle &= \langle \boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle+\langle \boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle\\ &=\langle \boldsymbol{u},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle \boldsymbol{u},-\boldsymbol{v}\rangle+\langle \boldsymbol{v},2\boldsymbol{u}\rangle+\langle \boldsymbol{v},-\boldsymbol{v}\rangle\\ &=2\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle+\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle-\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\\ &=2\cdot1+1\cdot(-1)-1\cdot4=-3.\end{aligned}$$

Επίσης, όπως και στο ερώτημα (ii), από τη σχέση στην (4.7) υπολογίζουμε το μέτρο του $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, αφού πρώτα υπολογίσουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle &= \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle + 2\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \\ &= 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 = 3.\end{aligned}$$

Οπότε, από τη σχέση του μέτρου στην (4.7) έχουμε $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{3}$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στη σχέση (4.10), έχουμε :

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\cdot\|2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα, η γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ είναι $\vartheta = \dfrac{2\pi}{3}$. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.15 Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$, για τις οποίες το διάνυσμα $\boldsymbol{u}=(a,2,-1)$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1=(1,4,1)$ και $\boldsymbol{u}_2=(2,1,1)$.

Απόδειξη : Ένας τρόπος λύσης βασίζεται στον Ορισμό 4.11 και ένας δεύτερος τρόπος στην Πρόταση 4.8.

Πρώτος τρόπος: Από την (4.18) πρέπει να υπάρχουν $k_1,k_2\in\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2 \iff (a,2,-1)=k_1(1,4,1)+k_2(2,1,1).$$

Το ισοδύναμο σύστημα, που προκύπτει από την προηγούμενη ισότητα, είναι :

$$\begin{aligned} k_1+2k_2&=a\\ 4k_1+k_2&=2\\ k_1+k_2&=-1\end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\4&1&2\\1&1&-1\end{array}\right)$, με γραμμοϊσοδύναμο τον πίνακα $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&1&a+1\\0&0&3a+9\end{array}\right)$. Προφανώς, για να έχει λύση το σύστημα, πρέπει $a=-3$.

Δεύτερος τρόπος : Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{u}=(a,2,-1)$ ανήκει στο $span(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, είναι φανερό ότι το $\boldsymbol{u}$ εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (Πρόταση 4.8). Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.4, τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν ισχύει

$$\det(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)=\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $a=-3$. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.16 i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\boldsymbol{v}=(2,-4,3)$, ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1=(1,-5,6)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,-5,7)$, $\boldsymbol{v}_3=(2,-4,4)$.

ii) Να εκφράσετε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

iii) Να εκφράσετε το πολυώνυμο $p(x)=x^2-5x+3$, ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1(x)=x^2-3x+2$, $p_2(x)=2x^2-4x-1$, $p_3(x)=x^2-5x+7$.

Απόδειξη : Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.10, πρέπει να υπολογίσουμε (αν υπάρχουν) πραγματικούς αριθμούς k_1,k_2,k_3, τέτοιους ώστε να ισχύει η (4.18). Δηλαδή

$$\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+k_3\boldsymbol{v}_3,$$

όπου $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ είναι τα διανύσματα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων.

i) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$(2,-4,3)=k_1(1,-5,6)+k_2(1,-5,7)+k_3(2,-4,4).$$

Το ισοδύναμο σύστημα, που προκύπτει, είναι :

$$\begin{aligned} k_1+k_2+2k_3 &= 2 \\ -5k_1-5k_2-4k_3 &= -4 \\ 6k_1+7k_2+4k_3 &= 3 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση

$$k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1.$$

Άρα, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$.

ii) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & k_1 + 2k_2 + k_3 \\ k_1 + 3k_2 + 4k_3 & k_1 + 4k_2 + 5k_3 \end{pmatrix}$$

Η προηγούμενη ισότητα πινάκων καταλήγει στο σύστημα εξισώσεων :

$$k_1 + k_2 + k_3 = 4,\; k_1 + 2k_2 + k_3 = 7,\, k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 7,\; k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 9.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right)$ και η κλιμακωτή μορφή είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Είναι φανερό ότι, υπάρχει μοναδική λύση, η οποία είναι

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = -1.$$

Άρα, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $A = 2A_1 + 3A_2 - A_3$, και επαληθεύεται κάνοντας τις πράξεις.

iii) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$x^2 - 5x + 3 = k_1(x^2 - 3x + 2) + k_2(2x^2 - 4x - 1) + k_3(x^2 - 5x + 7) \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 5x + 3 = (k_1 + 2k_2 + k_3)x^2 + (-3k_1 - 4k_2 - 5k_3)x + 2k_1 - k_2 + 7k_3$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + k_3 &= 1 \\ -3k_1 - 4k_2 - 5k_3 &= -5 \\ 2k_1 - k_2 + 7k_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right)$ και η κλιμακωτή μορφή είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$.

Είναι φανερό ότι, **δεν** υπάρχει λύση, άρα **δεν** υπάρχει γραμμικός συνδυασμός αυτών των πολυωνύμων. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.17 Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -2x-3y+z=0\}$

$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -2x+3y-z=1\}$

$U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -2x+3y-z=2x-y=0\}$

$U_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0\}$

i) Να εξετάσετε ποια από τα παραπάνω υποσύνολα είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση των υποχώρων του ερωτήματος (i).

iii) Να επεκτείνετε κάθε βάση του ερωτήματος (ii) σε μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

Απόδειξη : i) • *Για το υποσύνολο* U_1 :

Το $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -2x-3y+z=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι ισχύει η Πρόταση 4.5 (ii). Πράγματι, το $U_1 \neq \varnothing$, επειδή το $(0,0,0) \in U_1$.

Έστω ότι $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ με $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U_1$. Από την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του U_1, έχουμε

$$\boldsymbol{u}_1 \in U_1 \;\Rightarrow\; -2x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \;\text{ και }\; \boldsymbol{u}_2 \in U_1 \;\Rightarrow\; -2x_2 - 3y_2 + z_2 = 0. \qquad (4.44)$$

Επειδή $k\boldsymbol{u}_1 + \ell\boldsymbol{u}_2 = k(x_1, y_1, z_1) + \ell(x_2, y_2, z_2) = (kx_1 + \ell x_2, ky_1 + \ell y_2, kz_1 + \ell z_2)$,

χρησιμοποιώντας τις ισότητες στην (4.44), αποκτούμε την επόμενη ισότητα :

$$-2(kx_1 + \ell x_2) - 3(ky_1 + \ell y_2) + (kz_1 + \ell z_2) = k(-2x_1 - 3y_1 + z_1) + \ell(-2x_2 - 3y_2 + z_2) = 0$$

Άρα, το $k\boldsymbol{u}_1 + \ell\boldsymbol{u}_2$ επαληθεύει την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του συνόλου. Συνεπώς, για τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U_1$ με $k, \ell \in \mathbb{R}$, ισχύει $k\boldsymbol{u}_1 + \ell\boldsymbol{u}_2 \in U_1$, και σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (ii) το υποσύνολο U_1 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

• *Για το υποσύνολο* U_2:

Το σύνολο $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -2x+3y-z=1\}$ **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι το $(0,0,0) \notin U_2$, (Πρόταση 4.5 (i)). Επιπλέον, αξιοποιώντας την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του U_2, αυτό θα μπορούσε να περιγραφεί και $U_2 = \{(x, y, -2x+3y-1) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Έστω δύο στοιχεία του U_2, τα $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, -2x_1 + 3y_1 - 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, -2x_2 + 3y_2 - 1)$, με $x_1, x_2, y_1, y_2, \in \mathbb{R}$. Προσθέτοντας αυτά καταλήγουμε στο στοιχείο

$$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\left(x_1+x_2, y_1+y_2, -2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-2\right),$$

το οποίο **δεν** ανήκει στο U_2. Άρα, δεν επαληθεύεται ο Ορισμός 4.8 ως προς την πράξη της πρόσθεσης.

- *Για το υποσύνολο* U_3 :

Από τις ιδιότητες που ικανοποιούν τα στοιχεία του U_3, μπορούμε να έχουμε

$$\boldsymbol{v}=(x,y,z)\in U_3 \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x+3y-z&=0\\ 2x-y&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} z&=4x\\ y&=2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{v}=(x,2x,4x),\ x\in\mathbb{R},$$

οπότε το σύνολο U_3 περιγράφεται ως εξής: $U_3=\{(x,2x,4x):\ x\in\mathbb{R}\}$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι το

$$U_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -2x+3y-z=2x-y=0\}=\{(x,2x,4x):\ x\in\mathbb{R}\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, το $(0,0,0)\in U_3$, άρα το $U_3\neq\varnothing$.

Έστω $\boldsymbol{v}_1=(x_1,2x_1,4x_1)\in U_3$, $\boldsymbol{v}_2=(x_2,2x_2,4x_2)\in U_3$ με $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ και $k,\ell\in\mathbb{R}$.

Ακόμη, κάνοντας πράξεις όπως ορίστηκαν στις (4.1) και (4.2), έχουμε

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{v}_1+\ell\boldsymbol{v}_2&=k(x_1,2x_1,4x_1)+\ell(x_2,2x_2,4x_2)=(kx_1+\ell x_2,2kx_1+2\ell x_2,4kx_1+4\ell x_2)\\ &=\left(kx_1+\ell x_2,2(kx_1+\ell x_2),4(kx_1+\ell x_2)\right),\end{aligned}$$

από όπου είναι φανερό ότι, $k\boldsymbol{v}_1+\ell\boldsymbol{v}_2\in U_3$. Επομένως, ισχύει η Πρόταση 4.5 (ii), οπότε το U_3 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- *Για το υποσύνολο* U_4:

Το σύνολο $U_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0\}$ **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι δεν επαληθεύεται ο Ορισμός 4.8. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε το στοιχείο $(1,0,0)\in U_4$, το $-(1,0,0)=(-1,0,0)$, προφανώς, **δεν** ανήκει στο U_4. Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας ένα στοιχείο του συνόλου επί έναν πραγματικό αριθμό δεν προκύπτει στοιχείο του συνόλου. Άρα, το σύνολο δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, που σημαίνει ότι δεν επαληθεύεται η δεύτερη συνθήκη στην (4.14).

ii) Όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (i) οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι τα σύνολα U_1 και U_3. Επειδή $\dim\mathbb{R}^3=3$, σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 (i) ισχύει $\dim U_1\leq 3$ και $\dim U_3\leq 3$. Συνεπώς και οι δύο υπόχωροι είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, άρα έχουν τουλάχιστο μία βάση. Για να υπολογίσουμε μία βάση για τον κάθε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολο του υποχώρου που τα στοιχεία του να επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14.

- *Για τον υπόχωρο* U_1:

Από τις ιδιότητες που ικανοποιούν τα στοιχεία του U_1, μπορούμε να γράψουμε $-2x-3y+z=0 \Leftrightarrow z=2x+3y$. Οπότε ένα τυχαίο στοιχείο $(x,y,z)\in U_1$ αναλύεται ως εξής:

$$(x,y,z)=(x,y,2x+3y)=x(1,0,2)+y(0,1,3), \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \tag{4.45}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $B_1=\{(1,0,2),\ (0,1,3)\}$ είναι βάση του U_1.

(a) Στην (4.45) αποδείχθηκε ότι, το U_1 παράγεται από το B_1.

(b) Τα διανύσματα $\tilde{\boldsymbol{u}}_1=(1,0,2)$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_2=(0,1,3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε τον Αλγόριθμο 4.2, έχουμε ότι $k=2$ και ότι ο πίνακας $A=(\tilde{\boldsymbol{u}}_1\ \tilde{\boldsymbol{u}}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $K=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $r(A)=2$. Από τον Αλγόριθμο 4.2, βήμα 3(i), διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\tilde{\boldsymbol{u}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα, από (a) και (b) συμπεραίνουμε ότι, επαληθεύονται οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14. Συνεπώς το $B_1=\{\tilde{\boldsymbol{u}}_1,\tilde{\boldsymbol{u}}_2\}$ αποτελεί βάση του U_1 με $\dim U_1=2$.

- *Για τον υπόχωρο* U_3:

Όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (i), ο υπόχωρος περιγράφεται $U_3=\{(x,2x,4x):\ x\in\mathbb{R}\}$. Επειδή ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου U_3 είναι $\boldsymbol{v}=(x,2x,4x)=x(1,2,4)=x\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το μονοσύνολο $B_3=\{\tilde{\boldsymbol{v}}_3=(1,2,4)\}$ ισχυριζόμαστε ότι είναι μία βάση του U_3.

Πράγματι, από τον τρόπο γραφής των στοιχείων του U_3 είναι φανερό ότι $U_3=span(\tilde{\boldsymbol{v}}_3)$ και το διάνυσμα $\tilde{\boldsymbol{v}}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως μη μηδενικό διάνυσμα, (Πόρισμα 4.1 (ii)). Επομένως, οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14 επαληθεύονται, άρα $B_3=\{\tilde{\boldsymbol{v}}_3\}$ είναι μία βάση του U_3 με $\dim U_3=1$.

iii) Τη νέα βάση την κατασκευάζουμε συμπληρώνοντας το σύνολο της αρχικής βάσης με διανύσματα από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, έχοντας ως κριτήρια αυτά που διατυπώνονται στην Παρατήρηση 4.9.

- Για την επέκταση της βάσης $B_1 = \{\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2\}$ του υποχώρου U_1:

Επειδή $\dim U_1 = 2$ και $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, απαιτείται ένα διάνυσμα από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ για να συμπληρώσουμε τα στοιχεία του συνόλου B_1. Έστω ότι επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{e}_3$ και δημιουργούμε το νέο σύνολο $S_1 = \{\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.4, το σύνολο $S_1 = \{\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$, επειδή ισχύει

$$\det(\tilde{\boldsymbol{u}}_1 \ \ \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \ \ \boldsymbol{e}_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Παρατηρείστε ότι, αν επιλέγαμε το $\boldsymbol{e}_1$ ή το $\boldsymbol{e}_2$, για να συμπληρώσουμε το σύνολο B_1, τα νέα σύνολα, που κατασκευάζονται, $S_2 = \{\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ ή $S_3 = \{\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \boldsymbol{e}_2\}$ είναι επίσης βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

- Για την επέκταση της βάσης $B_3 = \{\tilde{\boldsymbol{v}}_3\}$ του υποχώρου U_3:

Επειδή $\dim U_3 = 1$, το σύνολο B_3 το συμπληρώνουμε με δύο διανύσματα από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω ότι επιλέγουμε τα $\boldsymbol{e}_2$ και $\boldsymbol{e}_3$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.4, το νέο σύνολο $H_1 = \{\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, επειδή

$$\det(\tilde{\boldsymbol{v}}_3 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \boldsymbol{e}_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

◆◆◆

Παράδειγμα 4.18 i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο U των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, που είναι κάθετα στο $\boldsymbol{v} = (1, -4, -5)$, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υποχώρου U.

iii) Να υπολογίσετε ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του U.

Απόδειξη : i) Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, το οποίο είναι κάθετο στο $\boldsymbol{v}$. Σύμφωνα με την συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων (Εφαρμογή 4.1), πρέπει να ισχύει $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 5z = 0$. Άρα, το σύνολο διανυσμάτων, που είναι κάθετα στο $\boldsymbol{v}$, περιγράφεται από το σύνολο $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y - 5z = 0\}$.

Επειδή $(0,0,0) \in U$, είναι φανερό ότι $U \neq \varnothing$.

Επιπλέον, κάθε στοιχείο του U πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα $x - 4y - 5z = 0 \Leftrightarrow x = 4y + 5z$. Άρα το σύνολο U περιγράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$U = \{(4y + 5z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \tag{4.46}$$

Θεωρώντας ένα τυχαίο στοιχείο $\boldsymbol{u} \in U$ της μορφής (4.46), μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{u} = (4y + 5z, y, z) = y(4,1,0) + z(5,0,1).$$

Από τον τελευταίο γραμμικό συνδυασμό συμπεραίνουμε ότι το $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (4,1,0)$ και $\boldsymbol{u}_2 = (5,0,1)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7, το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι να θεωρήσουμε δύο στοιχεία του συνόλου U, που το καθένα έχει τη μορφή που δίνεται στην (4.46), και για αυτά να επαληθεύσουμε ότι ισχύουν οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.8.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$. Άρα ικανοποιείται η ιδιότητα (b) του Ορισμού 4.14.

Επίσης, τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι ο πίνακας με στήλες αυτά τα διανύσματα, $A = (\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει $r(A) = 2$, (Αλγόριθμος 4.2, βήμα 3 (i)). Επομένως, ικανοποιούνται οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14. Άρα το σύνολο $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ είναι μία βάση του U με $\dim U = 2$.

iii) Επειδή ο υπόχωρος U έχει $\dim U = 2$ και $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, επιλέγουμε ένα διάνυσμα από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, για να επεκτείνουμε το U. Έστω ότι επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{e}_1$. Το νέο σύνολο $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$, διότι ισχύει $\det(\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \boldsymbol{e}_1) = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, (Πόρισμα 4.4). Συνεπώς, ένα συμπλήρωμα του U ως προς τον $\mathbb{R}^3$ είναι ο υπόχωρος $W = span(\boldsymbol{e}_1)$ με $\dim W = 1$.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του W προτείνεται στην ενότητα 6.2. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.19 Δίνονται τα υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$

$$U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}):\ \det A = 1\}$$

$$U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}):\ \det A = 0\}$$

$$U_3 = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}):\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_4 = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}):\ a + d = c + b\right\}$$

i) Να εξετάσετε ποια από τα παραπάνω υποσύνολα είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση των υποχώρων του ερωτήματος (i).

Απόδειξη : i) • *Για το υποσύνολο* U_1:

Το U_1 **δεν** είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$, διότι δεν ισχύει η Πρόταση 4.5 (i). Πράγματι, ο μηδενικός πίνακας, που είναι το μηδενικό στοιχείο του δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$, έχει $\det \mathbb{O} = 0$. Κατά συνέπεια $\mathbb{O} \notin U_1$.

• *Για το υποσύνολο* U_2:

Το $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}):\ \det A = 0\}$ **δεν** είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τους πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, ισχύει προφανώς ότι $\det A_1 = \det A_2 = 0$. Άρα $A_1, A_2 \in U_2$. Επίσης, $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, οπότε $\det(A_1 + A_2) = -9 \neq 0$, άρα $A_1 + A_2 \notin U_2$, δηλαδή το σύνολο U_2 δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Κατά συνέπεια δεν επαληθεύεται η πρώτη συνθήκη του Ορισμού 4.8 στην (4.14).

• *Για το υποσύνολο* U_3:

Το $U_3 = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}):\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\}$ είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$, διότι ισχύει η Πρόταση 4.5 (ii). Πράγματι, το $\mathbb{O} \in U_3$, και επομένως $U_3 \neq \varnothing$.

Έστω $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in U_3$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in U_3$ και $k, \ell \in \mathbb{R}$. Η πράξη των πινάκων δίνει

$$kA_1 + \ell A_2 = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + \ell a_2 & kb_1 + \ell b_2 \\ 0 & kc_1 + \ell c_2 \end{pmatrix},$$

από όπου είναι φανερό ότι $kA_1 + \ell A_2 \in U_3$. Άρα, ισχύει η Πρόταση 4.5 (ii), κατά συνέπεια ο U_3 είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$.

- *Για το υποσύνολο* U_4:

Επειδή τα στοιχεία του U_4 πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν τη σχέση $a + d = c + b \Leftrightarrow d = c + b - a$, είναι φανερό ότι το σύνολο U_4 περιγράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$U_4 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c + b - a \end{pmatrix} :\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.47}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι το σύνολο U_4 στην (4.47) είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$.

Για $a = b = c = 0$, προφανώς, το $\mathbb{O} \in U_4$, και επομένως $U_4 \neq \varnothing$.

Έστω $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 + b_1 - a_1 \end{pmatrix} \in U_4$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & c_2 + b_2 - a_2 \end{pmatrix} \in U_4$.

Κάνοντας πράξεις στους πίνακες έχουμε

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 + b_1 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & c_2 + b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & (c_1 + b_1 - a_1) + (c_2 + b_2 - a_2) \end{pmatrix}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $A_1 + A_2 \in U_4$, άρα επαληθεύεται η πρώτη συνθήκη του Ορισμού 4.8 στην (4.14).

Επίσης, αν $k \in \mathbb{R}$, η πράξη του πολλαπλασιασμού πίνακα επί αριθμό δίνει :

$$kA_1 = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 + b_1 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & k(c_1 + b_1 - a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kc_1 + kb_1 - ka_1 \end{pmatrix}$$

Οπότε $kA_1 \in U_4$, δηλαδή το σύνολο U_4 είναι κλειστό ως προς την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Κατά συνέπεια επαληθεύεται και η δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 4.8 στην (4.14).

ii) Όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (i) οι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$ είναι τα σύνολα U_3 και U_4. Ο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ έχει $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, (Παράδειγμα 4.10 (ii)), και για τους υποχώρους ισχύει $\dim U_3 \leq 4$ και $\dim U_4 \leq 4$ (Πρόταση 4.16 (i)). Συνεπώς και οι δύο υπόχωροι είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης. Για να υπολογίσουμε μία βάση για τον κάθε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολο του υποχώρου που τα στοιχεία του επαληθεύουν τις ιδιότητες του Ορισμού 4.14.

- *Για τον υπόχωρο* U_3:

Έστω ένα τυχαίο $A \in U_3$. Τότε για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}, \tag{4.48}$$

όπου E_{11}, E_{12}, E_{22} οι πίνακες της κανονικής βάσης του $M_2(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.8 (iii)-(iv)).

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $B_3 = \{E_{11},\ E_{12},\ E_{22}\}$ είναι μία βάση του U_3.

Στην (4.48) αποδείχθηκε ότι το U_3 παράγεται από το B_3. Επιπλέον, είναι φανερό ότι από την εξίσωση

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Άρα τα διανύσματα του B_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, επαληθεύονται οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, δηλαδή το B_3 αποτελεί μία βάση του U_3 με $\dim U_3 = 3$.

- *Για τον υπόχωρο* U_4:

Όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (i), ο υπόχωρος περιγράφεται από την ισοδύναμη έκφραση στην (4.47), δηλαδή την $U_4 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c+b-a \end{pmatrix} :\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$, ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου U_4 είναι

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c+b-a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $B_4 = \{X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ είναι μία βάση του U_4.

Πράγματι, από την (4.49) συμπεραίνουμε ότι ο υπόχωρος U_4 παράγεται από τους πίνακες $X_1,\ X_2,\ X_3$. Επίσης, από τη διανυσματική εξίσωση (4.22) για κάθε $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

από όπου είναι φανερό ότι $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Άρα, οι πίνακες X_1, X_2, X_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Επομένως, επαληθεύονται οι ιδιότητες του Ορισμού 4.14, δηλαδή, το B_4 είναι μία βάση του U_4 με $\dim U_4 = 3$. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.20 Έστω τα πολυώνυμα

$$p_1(x) = x^3 + x^2 + x - 2, \quad p_2(x) = x^2 - 1 \quad \text{και} \quad p_3(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$$

i) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Να εκφράσετε το πολυώνυμο $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, όταν αυτό είναι δυνατό.

iii) Να εκφράσετε, αν είναι δυνατό, τα πολυώνυμα $q(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10$ και $g(x) = x^3 - 8x^2 - 5x - 2$ ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$.

Απόδειξη : i) Επειδή ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_3[x]$ είναι πεπερασμένης διάστασης, με $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$, (Παράδειγμα 4.10 (iii)), και το πλήθος των πολυωνύμων που δόθηκαν είναι λιγότερα από τη διάσταση του δ.χ., θα εξετάσουμε τη γραμμική ανεξαρτησία εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.1.

Από την εξίσωση

$$a_1(x^3 + x^2 + x - 2) + a_2(x^2 - 1) + a_3(x^3 + x^2 + 3x + 2) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]} \Leftrightarrow$$
$$(a_1 + a_3)x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1 + 3a_3)x - 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\;\; + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 \;\; + a_3 &= 0 \\ a_1 \qquad\; + 3a_3 &= 0 \\ -2a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας, $A \in M_{4\times3}(\mathbb{R})$, των συντελεστών του ομογενούς γραμμικού συστήματος, είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, ο οποίος έχει $r(A) = 3$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.1, βήμα 4(i), διαπιστώνουμε ότι τα $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.10, αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε

$$p(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x).$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= k_1(x^3 + x^2 + x - 2) + k_2(x^2 - 1) + k_3(x^3 + x^2 + 3x + 2) \\ &= (k_1 + k_3)x^3 + (k_1 + k_2 + k_3)x^2 + (k_1 + 3k_3)x - 2k_1 - k_2 + 2k_3 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} k_1 \qquad + k_3 &= a \\ k_1 + k_2 + k_3 &= b \\ k_1 \qquad + 3k_3 &= c \\ -2k_1 - k_2 + 2k_3 &= d \end{aligned} \tag{4.50}$$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Εφαρμόζουμε διαδοχικά στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to r_2 - r_1$, $r_3 \to r_3 - r_1$, $r_4 \to r_4 + 2r_1$, ακολούθως $r_4 \to r_4 + r_2$ και τέλος $r_4 \to -2r_3 + r_4$.

Έτσι, προκύπτει ο πίνακας

$$\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 3 & c \\ -2 & -1 & 2 & d \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 3a+b-2c+d \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι ο πίνακας του ερωτήματος (i), όπου αποδείξαμε ότι $r(A) = 3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 (ii), το σύστημα για να έχει λύση πρέπει να ισχύει

$$r(A|\boldsymbol{b}) = r(A) = 3.$$

Επομένως, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί συντελεστές του $p(x)$ είναι :

$$3a + b - 2c + d = 0 \tag{4.51}$$

Αν ισχύει η ισότητα στην (4.51), το σύστημα στην (4.50) έχει μοναδική λύση

$$(k_1 \quad k_2 \quad k_3)^t = \left(\frac{3a-c}{2} \quad b-a \quad \frac{c-a}{2}\right)^t. \tag{4.52}$$

iii) Το $q(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, διότι οι συντελεστές του επαληθεύουν τη συνθήκη στην (4.51).

Από την (4.52) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του γραμμικού συνδυασμού $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ και $k_3 = -1$. Επομένως το πολυώνυμο $q(x)$ γράφεται:

$$q(x) = 3p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x).$$

Είναι φανερό ότι οι συντελεστές του $g(x)$ δεν επαληθεύουν την ισότητα στην (4.51) και επομένως το $g(x)$ δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.21 Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ των πολυωνύμων δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και τα σύνολα :

$P_1 = \{x^2 - 1, -2x^2 - 6x - 4, x^2 + x - 2, x^2 - 5x - 6\}$

$P_2 = \{3x^2 - x + 1, x^2 + x - 2, -4x^2 + x + 5\}$

$P_3 = \{2x^2 + 2, -2x^2 + 2x + 6, x^2 + x + 5\}$

i) Να εξετάσετε ποια από τα παραπάνω σύνολα πολυωνύμων είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$.

ii) Να αποδείξετε ότι το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του ερωτήματος (i) αποτελεί μία βάση του δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$, και να εκφράσετε το πολυώνυμο $p(x) = x^2 - 2x + 4$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.

iii) Να εξετάσετε αν το σύνολο $P_4 = \{x^2 + 2x + 1, x^2 + 6x + 7\}$ αποτελεί μία άλλη βάση του δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$.

Απόδειξη : i) Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ είναι πεπερασμένος με $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, (Παράδειγμα 4.10 (iii)).

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2 το σύνολο P_1 είναι γραμμικά εξαρτημένο, διότι έχει στοιχεία περισσότερα από τη διάσταση του χώρου. Τα σύνολα P_2 και P_3 έχουν πλήθος στοιχείων, όσο και η διάσταση του χώρου. Επομένως μόνο αυτά ελέγχουμε ως προς τη γραμμική ανεξαρτησία των στοιχείων τους.

- Για το σύνολο P_2, με στοιχεία $p_1(x) = 3x^2 - x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x - 2$ και $p_3(x) = -4x^2 + x + 5$, εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 4.1. Από την εξίσωση

$$a_1(3x^2 - x + 1) + a_2(x^2 + x - 2) + a_3(-4x^2 + x + 5) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_2[x]} \Leftrightarrow$$
$$(3a_1 + a_2 - 4a_3)x^2 + (-a_1 + a_2 + a_3)x + a_1 - 2a_2 + 5a_3 = 0$$

προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 - 4a_3 &= 0 \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 - 2a_2 + 5a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 23$, σύμφωνα με το βήμα 3 (i) του Αλγορίθμου 4.1, τα πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Για το σύνολο P_3, με όμοιο τρόπο όπως προηγούμενα για το P_2, αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα $q_1(x) = 2x^2 + 2$, $q_2(x) = -2x^2 + 2x + 6$ και $q_3(x) = x^2 + x + 5$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, διότι η διανυσματική εξίσωση

$$a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) + a_3 q_3(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_2[x]},$$

καταλήγει σε ομογενές σύστημα με πίνακα συντελεστών $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, για τον οποίο ισχύει $\det A = 0$, (Αλγόριθμος 4.1, βήμα 3 (ii)).

ii) Το σύνολο $P_2 = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε παράγει και το δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$, σύμφωνα με την Πρόταση 4.15. Άρα, το $P_2 = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

Για το επόμενο ερώτημα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, υπάρχουν μοναδικοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $p(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x)$. Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4 &= k_1(3x^2 - x + 1) + k_2(x^2 + x - 2) + k_3(-4x^2 + x + 5) \\ &= (3k_1 + k_2 - 4k_3)x^2 + (-k_1 + k_2 + k_3)x + (k_1 - 2k_2 + 5k_3) \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} 3k_1 + k_2 - 4k_3 &= 1 \\ -k_1 + k_2 + k_3 &= -2 \\ k_1 - 2k_2 + 5k_3 &= 4 \end{aligned}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $k_1 = \frac{21}{23}$, $k_2 = -\frac{28}{23}$ και $k_3 = \frac{3}{23}$.

Επομένως, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι :

$$p(x)=\frac{21}{23}p_1(x)-\frac{28}{23}p_2(x)+\frac{3}{23}p_3(x)$$

iii) Το σύνολο P_4 **δεν** παράγει το χώρο $\mathbb{R}_2[x]$, διότι έχει λιγότερα στοιχεία από τη διάσταση του χώρου, (Πόρισμα 4.2). Επομένως, δεν μπορεί να αποτελεί βάση του χώρου επειδή δεν επαληθεύεται η ιδιότητα (b) του Ορισμού 4.14. ◆◆◆

Παράδειγμα 4.22 Έστω $N(A)$ ο χώρος λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος :

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2-2x_3+2x_4-5x_5&=0\\
x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5&=0\\
2x_1+4x_2-7x_3-9x_4+x_5&=0\\
3x_1+6x_2-6x_3+x_4-5x_5&=0
\end{aligned}$$

i) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του $N(A)$.

ii) Να επεκταθεί η βάση του $N(A)$ του ερωτήματος (i) σε μία βάση του $M_{5\times1}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη : i) Ο χώρος λύσεων, $N(A)$, είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{5\times1}(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.2 (iv)) και σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.6 έχει $\dim N(A)=n-r(A)$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος , $n=5$ το πλήθος των αγνώστων του συστήματος και $r(A)$ ο βαθμός του πίνακα A. Συνεπώς, η ζητούμενη βάση και η διάσταση υπολογίζονται, αφού μετατρέψουμε τον πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή.

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $r_2\to r_2-r_1$, $r_3\to r_3-2r_1$, $r_4\to r_4-3r_1$, $r_3\to 3r_2+r_3$, $r_3\to\frac{-1}{10}r_3$ και $r_4\to 5r_3+r_4$ στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & -2 & 2 & -5 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

από όπου είναι φανερό ότι $r(A)=3$. Επομένως, $\dim N(A)=n-r(A)=5-3=2$.

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, και από την παραπάνω κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα, προκύπτει το ισοδύναμο ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-5x_5=0 \\ \qquad\qquad x_3+x_4+3x_5=0 \\ \qquad\qquad\quad +x_4-2x_5=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=-2x_2-9x_5 \\ x_3=\qquad -5x_5 \\ x_4=\qquad\ \ 2x_5 \end{array}$$

Συνεπώς, η λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_2-9x_5\\ x_2\\ -5x_5\\ 2x_5\\ x_5 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix} -9\\ 0\\ -5\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}=x_2\boldsymbol{u}_1+x_5\boldsymbol{u}_2,\quad x_2,x_5\in\mathbb{R}. \tag{4.53}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $B=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ είναι μία βάση του υποχώρου $N(A)$, όπου

$\boldsymbol{u}_1=(-2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^t$ και $\boldsymbol{u}_2=(-9\ \ 0\ \ -5\ \ 2\ \ 1)^t$.

(a) Από την (4.53) είναι φανερό ότι τα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ παράγουν το χώρο $N(A)$, δηλαδή κάθε πίνακας-στοιχείο του $N(A)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B.

(b) Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.2, βήμα 3 (i) διαπιστώνουμε ότι τα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι ο πίνακας $H=(\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2)$ έχει $r(H)=2$.

Από τις (a) και (b) επαληθεύεται ο Ορισμός 4.14, επομένως επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός ότι το σύνολο $B=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ είναι μία βάση του υποχώρου $N(A)$.

ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 4.14, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο B του ερωτήματος (i) μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του δ.χ. $M_{5\times1}(\mathbb{R})$.

Μία βάση του $M_{5\times1}(\mathbb{R})$ είναι η κανονική βάση, $E=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5\}$, όπου ο πίνακας-στήλη $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $1\le i\le 5$, έχει στην i θέση το 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 (Παράδειγμα 4.8 (iv)). Άρα, $\dim M_{5\times1}(\mathbb{R})=5$.

Επιλέγοντας τρεις πίνακες από το σύνολο E συμπληρώνουμε το σύνολο B και ελέγχουμε αν το νέο σύνολο αποτελεί βάση του $M_{5\times1}(\mathbb{R})$.

Έστω $S_1=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.4, αρκεί να εξετάσουμε αν ο πίνακας, με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$, έχει $\det(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\neq 0$.

Επειδή $\det(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \det\begin{pmatrix} -2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, το σύνολο S_1 δεν αποτελεί βάση του $M_{5\times 1}(\mathbb{R})$.

Αν συμπληρώσουμε το σύνολο B με τους πίνακες $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4$, διαπιστώνουμε ότι, το σύνολο $S_2 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ αποτελεί μία βάση του $M_{5\times 1}(\mathbb{R})$, επειδή

$$\det(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\ \boldsymbol{\varepsilon}_4) = \det\begin{pmatrix} -2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 .$$

◆◆◆

Παράδειγμα 4.23 Έστω U και W υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x-y, 2x+y+2z, -2x+z, -x+y+4z) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(6x-y, 5x-8y, -5x+3y, -2x+3z) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

i) Να αποδείξετε ότι U και W είναι υπόχωροι του χώρου $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε τη διάσταση και μία βάση για καθέναν από τους υπόχωρους U, W, $U+W$ και $U \cap W$.

Απόδειξη : i) • Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, ένα τυχαίο στοιχείο $\boldsymbol{u} \in U$ γράφεται

$$\boldsymbol{u} = (x-y, 2x+y+2z, -2x+z, -x+y+4z) = x(1,2,-2,-1) + y(-1,1,0,1) + z(0,2,1,4)$$
$$= x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3,$$

συμπεραίνουμε ότι το σύνολο U έχει στοιχεία όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,2,-2,-1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (-1,1,0,1) \ \text{ και } \ \boldsymbol{u}_3 = (0,2,1,4). \tag{4.54}$$

Άρα, έχουμε $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7, το σύνολο U είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^4$.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει διαφορετικά, δηλαδή να βασιστεί στην (4.14) του Ορισμού 4.8. Συγκεκριμένα :

Επειδή το $(0,0,0,0) \in U$, το U είναι μη κενό σύνολο.

Έστω $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_1 = (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1 + 2z_1, -2x_1 + z_1, -x_1 + y_1 + 4z_1) \in U$ και

$\boldsymbol{a}_2 = (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2 + 2z_2, -2x_2 + z_2, -x_2 + y_2 + 4z_2) \in U$ για κάθε $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Κάνοντας αντικατάσταση των $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ και πράξεις, όπως ορίζονται στην (4.1) και (4.2), συμπεραίνουμε ότι ισχύουν $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in U$ και $k\boldsymbol{a}_1 \in U$. Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.8, το U είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{R}^4$.

• Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι το σύνολο W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, αρκεί να γράψουμε, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, ένα τυχαίο στοιχείο $\boldsymbol{w} \in W$ ως εξής :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= (6x - y, 5x - 8y, -5x + 3y, -2x + 3z) = x(6, 5, -5, -2) + y(-1, -8, 3, 0) + z(0, 0, 0, 3)\\ &= x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + z\boldsymbol{w}_3\end{aligned}$$

όπου

$$\boldsymbol{w}_1 = (6, 5, -5, -2),\ \boldsymbol{w}_2 = (-1, -8, 3, 0) \text{ και } \boldsymbol{w}_3 = (0, 0, 0, 3). \tag{4.55}$$

ii) Στο (i) αποδείχθηκε ότι τα U, W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$, επίσης τα σύνολα $U + W$ και $U \cap W$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ (Πρόταση 4.6). Άρα, υπάρχει τουλάχιστο μία βάση για καθέναν από τους υποχώρους.

• Ισχυριζόμαστε ότι μία βάση για τον υπόχωρο U είναι $B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, όπου $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ είναι τα διανύσματα στην (4.54).

(a) Στο ερώτημα (i) αποδείχθηκε $U = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.

(b) Ο πίνακας, με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ όπως αυτά δίνονται στην (4.54), μετά από κατάλληλους μετασχηματισμούς καταλήγει στον γραμμοϊσοδύναμό του $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ο οποίος έχει βαθμό 3, όσα και τα διανύσματα του υποχώρου, οπότε, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 4.2 , βήμα 3 (i), τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Από (a) και (b) συμπεραίνουμε ότι $B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ είναι μία βάση του U (Ορισμός 4.14), με $\dim U = 3$.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει και με διαφορετικό τρόπο.

Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.3, ο πίνακας A με γραμμές τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ μετά από κατάλληλες γραμμοπράξεις γίνεται

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

από όπου είναι φανερό ότι, $r(A)=3$. Έτσι διαπιστώνουμε ότι, $B_U=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ είναι μία βάση του U (Αλγόριθμος 4.3, βήμα 4).

• Μία βάση για τον υπόχωρο W είναι $B_W=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$, όπου $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ είναι τα διανύσματα στην (4.55), και ισχύει $\dim W=3$. Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο, όπως παρουσιάστηκε για τον υπόχωρο U.

• Μία βάση για τον υπόχωρο $U+W$. Σύμφωνα με την (4.16) ο υπόχωρος $U+W$ παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$, όπως αυτά ορίζονται στις (4.54) και (4.55). Η βάση του $U+W$ υπολογίζεται με εφαρμογή του Αλγορίθμου 4.3.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & -5 & -2 \\ -1 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ έχει γραμμοϊσοδύναμο τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός είναι 4. Μία βάση του $U+W$ είναι το σύνολο $B_{U+W}=\{(1,2,-2,-1),\ (0,1,-3,-4),\ (0,0,1,10),\ (0,0,0,1)\}$, με $\dim(U+W)=4$.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού βάσης με στοιχεία τα αρχικά διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$, στηρίζεται στον Αλγόριθμο 4.4. Δημιουργούμε τον πίνακα K με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$, και εφαρμόζουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών, οπότε καταλήγουμε

$$K=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{29/7} & 3 \end{pmatrix} \equiv \Lambda.$$

Από την κλιμακωτή μορφή Λ διαπιστώνουμε ότι οι στήλες που δεν αντιστοιχούν σε οδηγό είναι η 4η και η 6η στήλη, οπότε αφαιρούμε αυτά τα διανύσματα-στήλες από τον πίνακα K (Αλγόριθμος 4.4, βήμα 3). Επομένως, τα διανύσματα που απομένουν και αντιστοιχούν στην 1η, 2η, 3η και 5η στήλη αποτελούν μία άλλη βάση του $U+W$, δηλαδή $\tilde{B}_{U+W}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_2\}$.

• Σύμφωνα με την Πρόταση 4.17, από τη σχέση για τη διάσταση του αθροίσματος των υποχώρων

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

έχουμε $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\dim(U \cap W) = 3+3-4 = 2$.

Άρα για τον υπολογισμό μίας βάσης του υποχώρου $U \cap W$, αρκεί να υπολογίσουμε δύο διανύσματα, τα οποία

(α) παράγουν τον υπόχωρο $U \cap W$ και (β) είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Για το (α):

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in U \cap W$, τότε $\boldsymbol{v} \in U$ και $\boldsymbol{v} \in W$.

Όταν $\boldsymbol{v} \in U$, επειδή B_U είναι μία βάση του U, σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, υπάρχουν μοναδικοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3. \tag{4.56}$$

Όμοια, όταν $\boldsymbol{v} \in W$ και B_W είναι μία βάση του W, υπάρχουν μοναδικοί $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v} = \ell_1\boldsymbol{w}_1 + \ell_2\boldsymbol{w}_2 + \ell_3\boldsymbol{w}_3. \tag{4.57}$$

Από τις (4.56) και (4.57) συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $k_1, k_2, k_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3 = \ell_1\boldsymbol{w}_1 + \ell_2\boldsymbol{w}_2 + \ell_3\boldsymbol{w}_3,$$

από όπου γράφουμε ισοδύναμα

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3 - \ell_1\boldsymbol{w}_1 - \ell_2\boldsymbol{w}_2 - \ell_3\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4} = \boldsymbol{0}. \tag{4.58}$$

Από την (4.58) προκύπτει ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τους αριθμούς $k_1, k_2, k_3, -\ell_1, -\ell_2, -\ell_3$ και πίνακα συντελεστών, όπως διαπιστώνουμε, τον προηγούμενο πίνακα *K*. Από την κλιμακωτή μορφή *Λ* έχουμε ότι $r(K) = 4$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n - r(K) = 6 - 4 = 2$. Η λύση του συστήματος είναι :

$k_1 = 3\ell_1 + \dfrac{45}{29}\ell_3,\ k_2 = -3\ell_1 + \dfrac{24}{29}\ell_3,\ k_3 = \ell_1 + \dfrac{27}{29}\ell_3,\ \ell_2 = -\dfrac{21}{29}\ell_3$, για κάθε $\ell_1, \ell_3 \in \mathbb{R}$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (4.57) έχουμε :

$$\boldsymbol{v} = \ell_1 \boldsymbol{w}_1 + \ell_2 \boldsymbol{w}_2 + \ell_3 \boldsymbol{w}_3 = \ell_1(6,5,-5,-2) - \frac{21}{29}\ell_3(-1,-8,3,0) + \ell_3(0,0,0,3)$$

$$= \ell_1(6,5,-5,-2) + \frac{\ell_3}{29}(21,168,-63,87) \qquad (4.59)$$

Τα διανύσματα, που παράγουν τον υπόχωρο $U \cap W$, είναι τα $\boldsymbol{w}_1 = (6,5,-5,-2)$ και $\boldsymbol{v}_1 = (21,168,-63,87)$. Πράγματι, από την (4.59) είναι φανερό ότι, ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in U \cap W$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1$.

- Για το (β) :

Αποδείξαμε ότι ισχύει $\dim(U \cap W) = 2$ και από (α) τα $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1$ παράγουν τον υπόχωρο $U \cap W$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.15, τα $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Συνεπώς, από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι μία βάση της τομής $U \cap W$ είναι $B_{U \cap W} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1\}$, (Ορισμός 4.14). ◆◆◆

Παράδειγμα 4.24 Έστω οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$. Είναι το άθροισμα ευθύ;

Απόδειξη : Από την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των υποχώρων, μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή

$$U_1 = \{(x,y,x) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad (4.60)$$

$$U_2 = \{(x,y,-x-y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad (4.61)$$

Επειδή $U_1 + U_2$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (Πρόταση 4.6), είναι φανερό ότι

$$U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{R}^3. \qquad (4.62)$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει $\mathbb{R}^3 \subseteq U_1 + U_2$.

Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους γεννήτορες του $U_1 + U_2$.

Από την (4.60) κάθε στοιχείο $(x,y,x) \in U_1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, γράφεται

$$(x,y,x) = x(1,0,1) + y(0,1,0) = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2.$$

Άρα, ο υπόχωρος $U_1 = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, όπου $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1)$ και $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,0)$.

Όμοια, από την (4.61) κάθε στοιχείο $(x,y,-x-y) \in U_2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, γράφεται

$$(x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1) = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2.$$

Άρα, ο υπόχωρος $U_2 = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, όπου $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,-1)$ και $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,-1)$.

Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 4.4, τοποθετούμε στον πίνακα A ως στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ και με κατάλληλες γραμμοπράξεις έχουμε :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \end{pmatrix} \equiv B$$

Άρα, ο υπόχωρος $U_1 + U_2 = span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1)$, διότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1$ αντιστοιχούν σε οδηγούς του πίνακα B.

Έστω ένα τυχαίο στοιχείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Αναζητούμε κατάλληλους $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} &(x, y, z) = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{v}_1 \quad \Leftrightarrow \\ &(x, y, z) = k_1(1,0,1) + k_2(0,1,0) + k_3(1,0,-1) = (k_1 + k_3, k_2, k_1 - k_3), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} k_1 \quad + k_3 &= x \\ k_2 \quad &= y \\ k_1 \quad - k_3 &= z \end{aligned}$$

Μετά από γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος καταλήγουμε στον πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & x-z \end{array}\right)$, από όπου είναι φανερό ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$k_1 = \frac{x+z}{2}, \quad k_2 = y \text{ και } k_3 = \frac{x-z}{2}.$$

Άρα, $(x, y, z) = \dfrac{x+z}{2}\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + \dfrac{x-z}{2}\boldsymbol{v}_1 \in U_1 + U_2$, από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{R}^3 \subseteq U_1 + U_2 \tag{4.63}$$

Συνδυάζοντας τις (4.62) και (4.63) έχουμε το ζητούμενο, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$.

Έστω $(x, y, z) \in U_1 \cap U_2$. Τότε, είναι φανερό ότι ισχύουν

$$(x, y, z) \in U_1 \;\Rightarrow\; x = z,\; y \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (x, y, z) \in U_2 \;\Rightarrow\; z = -x - y$$

Το σύστημα

$$\begin{aligned} x &= z \\ z &= -x - y \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} x \quad - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x \quad y \quad z)^t = (x \quad -2x \quad x)^t$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, τα στοιχεία του συνόλου $U_1 \cap U_2$ είναι της μορφής $(x,-2x,x)$, από όπου είναι φανερό ότι $U_1 \cap U_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.9 και την Εφαρμογή 4.5(i), το άθροισμα δεν είναι ευθύ, διότι $U_1 \cap U_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Ένας άλλος τρόπος απάντησης στηρίζεται στο Πόρισμα 4.5. Από τα διανύσματα των υποχώρων U_1, U_2, που υπολογίστηκαν προηγούμενα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U_1$ και $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε αποτελούν βάσεις των U_1, U_2, με $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2$ και $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Αν το άθροισμα είναι ευθύ, επαληθεύεται η ισότητα στην (4.42), δηλαδή $\dim \mathbb{R}^3 = \dim U_1 + \dim U_2$. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν ισχύει, άρα το άθροισμα δεν είναι ευθύ. ◆◆◆

Εφαρμογή 4.7 *Έστω $S = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \ A^t = A\}$ το σύνολο των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων και $T = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \ : \ A^t = -A\}$ το σύνολο των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων. Να αποδείξετε ότι :*

i) *τα σύνολα S και T είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{F})$.*

ii) $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$

iii) *Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση των υποχώρων $S_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}): \ A^t = A\}$ και $T_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}): \ A^t = -A\}$ του $M_2(\mathbb{R})$.*

iv) *Να επεκτείνετε κάθε βάση, που υπολογίσατε στο ερώτημα* (iii), *σε μία βάση του $M_2(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη : i) Επειδή για το μηδενικό τετραγωνικό πίνακα ισχύει $\mathbb{O}^t = \mathbb{O}$, είναι φανερό ότι $\mathbb{O} \in S$, άρα $S \neq \varnothing$. Έστω $A, B \in S$ και $k, \ell \in \mathbb{F}$.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις ιδιότητες (ii) και (iii) της Πρότασης 1.2 έχουμε

$$(kA + \ell B)^t = (kA)^t + (\ell B)^t = kA^t + \ell B^t = kA + \ell B.$$

Άρα $kA + \ell B \in S$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (ii), το σύνολο S είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το σύνολο T είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

ii) Για να αποδείξουμε ότι ισχύει $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$, σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.5 (ii), αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Πράγματι, ένα τυχαίο στοιχείο $A \in M_n(\mathbb{F})$ γράφεται

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right),$$

όπου $\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$ είναι συμμετρικός πίνακας και $\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$ είναι αντισυμμετρικός, (βλέπε ιδιότητες (v), (iv) της Πρότασης 1.2) .

iii) Στο (i) αποδείχθηκε ότι τα σύνολα S_2 και T_2 είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$. Επειδή $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 (i), ισχύει $\dim S_2 \leq 4$ και $\dim T_2 \leq 4$. Συνεπώς και οι δύο υπόχωροι είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης. Για να υπολογίσουμε μία βάση για τον κάθε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολο του υποχώρου που να επαληθεύει τις ιδιότητες του Ορισμού 4.14.

- *Για τη βάση του υποχώρου* S_2:

Επειδή ένα τυχαίο στοιχείο $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ του συνόλου S_2 πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα

$$A = A^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c,$$

συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A πρέπει να είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Θα αποδείξουμε ότι τα στοιχεία $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του S_2.

(a) Οι πίνακες A_1, A_2, A_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

είναι $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, (Ορισμός 4.12).

(b) Οι πίνακες A_1, A_2, A_3 παράγουν το S_2, διότι το τυχαίο στοιχείο $A \in S_2$ γράφεται

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=aA_1+bA_2+aA_3 .$$

Από (a) και (b) είναι φανερό ότι το σύνολο $B_{S_2}=\{A_1,A_2,A_3\}$ είναι μία βάση του S_2 (Ορισμός 4.14), με $\dim S_2=3$.

- *Για τη βάση του υποχώρου* T_2:

Κάθε στοιχείο $K=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ του συνόλου T_2, πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα :

$$-K=K^t \Leftrightarrow -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Από την προηγούμενη ισότητα πινάκων, διαπιστώνουμε ότι $a=d=0$ και $c=-b$.

Άρα ο πίνακας $K\in T_2$ είναι της μορφής $K=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, για κάθε $b\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η τελευταία μορφή του πίνακα K γράφεται

$$K=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=bK_1,\ \text{για κάθε } b\in\mathbb{R}. \tag{4.64}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το μονοσύνολο $B_{T_2}=\{K_1\}$ είναι μία βάση του T_2, όπου $K_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Από την (4.64) είναι φανερό ότι ο υπόχωρος T_2 παράγεται από τον K_1 και ακόμη ότι ο πίνακας K_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο στοιχείο του T_2, ως μη μηδενικός πίνακας, (Πόρισμα 4.1 (ii)). Άρα, $B_{T_2}=\{K_1\}$ είναι βάση του T_2 (Ορισμός 4.14), με $\dim T_2=1$.

iv) Σύμφωνα με την Πρόταση 4.14, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο B_{S_2}, B_{T_2} μπορεί να επεκταθεί σε βάση του δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$, αρκεί το καθένα να συμπληρωθεί με πίνακες, ώστε το νέο σύνολο να αποτελεί μία βάση του $M_2(\mathbb{R})$. Οι πίνακες, με τους οποίους συμπληρώνονται τα σύνολα B_{S_2} και B_{T_2}, αναζητούνται ανάμεσα στα στοιχεία της κανονικής βάσης του $M_2(\mathbb{R})$, (Παράδειγμα 4.8 (iv)). Τα κριτήρια επιλογής των πινάκων αναφέρονται στην Παρατήρηση 4.9.

- *Για την επέκταση της βάσης* $B_{S_2}=\{A_1,A_2,A_3\}$ *του υποχώρου* S_2:

Επειδή ο δ. χ. $M_2(\mathbb{R})$ έχει $\dim(M_2(\mathbb{R}))=4$, (Παράδειγμα 4.10 (ii)), πρέπει να συμπληρώσουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο B_{S_2} του ερωτήματος (iii) με έναν πίνακα, έστω τον $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Ελέγχουμε αν το νέο σύνολο $\tilde{B}_{S_2}=\{A_1,A_2,A_3,E_{21}\}$ αποτελεί βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

(α) Οι πίνακες A_1,A_2,A_3,E_{21} είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι η διανυσματική εξίσωση

$$a_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\mathbb{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_2+a_4&a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $a_1=a_2=a_3=a_4=0$, (Ορισμός 4.12).

(β) Επειδή $\dim(M_2(\mathbb{R}))=4$ και το σύνολο $\tilde{B}_{S_2}=\{A_1,A_2,A_3,E_{21}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, σύμφωνα με την Πρόταση 4.15, οι πίνακες A_1,A_2,A_3,E_{21} παράγουν το δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$.

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι επαληθεύονται οι ιδιότητες του Ορισμού 4.14, άρα το σύνολο $\tilde{B}_{S_2}=\{A_1,A_2,A_3,E_{21}\}$ αποτελεί μία βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

- *Για την επέκταση της βάσης $B_{T_2}=\{K_1\}$ του υποχώρου T_2:*

Επειδή $\dim(M_2(\mathbb{R}))=4$, πρέπει να συμπληρώσουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο B_{T_2} με τρεις πίνακες, έστω τους $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ και $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Ελέγχουμε αν το νέο σύνολο $\tilde{B}_{T_2}=\{K_1,E_{11},E_{21},E_{22}\}$ αποτελεί βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

(α) Οι πίνακες K_1,E_{11},E_{21},E_{22} είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι η διανυσματική εξίσωση

$$a_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathbb{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_2&a_1\\-a_1+a_3&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $a_1=a_2=a_3=a_4=0$, (Ορισμός 4.12).

(β) Επειδή το σύνολο $\tilde{B}_{T_2}=\{K_1,E_{11},E_{21},E_{22}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, ο πεπερασμένης διάστασης δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ παράγεται από τα στοιχεία του συνόλου $\tilde{B}_{T_2}$, (Πρόταση 4.15).

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι επαληθεύονται οι ιδιότητες του Ορισμού 4.14. Άρα, το σύνολο $\tilde{B}_{T_2} = \{K_1, E_{11}, E_{21}, E_{22}\}$ είναι μία άλλη βάση του $M_2(\mathbb{R})$. ◆◆◆

Εφαρμογή 4.8 *Αν $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V.*

i) *Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπου*

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3,\ \ \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \ \ \textit{και}\ \ \boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 + 8\boldsymbol{v}_3 .$$

ii) *Να εκφράσετε το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 9\boldsymbol{v}_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$.*

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.12, η διανυσματική εξίσωση

$$a_1(\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3) + a_2(-\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) + a_3(2\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 + 8\boldsymbol{v}_3) = \mathbf{0}_V \qquad (4.65)$$

όπου $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$, πρέπει να έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Από την (4.65) έχουμε

$$(a_1 - a_2 + 2a_3)\boldsymbol{v}_1 + (3a_1 - 2a_2 + 7a_3)\boldsymbol{v}_2 + (2a_1 + a_2 + 8a_3)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}_V . \qquad (4.66)$$

Επειδή τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης στην (4.66) είναι μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα :

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 3a_1 - 2a_2 + 7a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 + 8a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, διότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1, το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Άρα, τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.10, αρκεί να βρεθούν $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3 \Leftrightarrow$$
$$4\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 9\boldsymbol{v}_3 = k_1(\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3) + k_2(-\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) + k_3(2\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 + 8\boldsymbol{v}_3) \Leftrightarrow$$
$$4\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 9\boldsymbol{v}_3 = (k_1 - k_2 + 2k_3)\boldsymbol{v}_1 + (3k_1 - 2k_2 + 7k_3)\boldsymbol{v}_2 + (2k_1 + k_2 + 8k_3)\boldsymbol{v}_3$$

Από την τελευταία ισότητα, εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των ιδίων διανυσμάτων, προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 + 2k_3 &= 4 \\ 3k_1 - 2k_2 + 7k_3 &= -3 \\ 2k_1 + k_2 + 8k_3 &= 9 \end{aligned}$$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείχθηκε ότι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση (Πρόταση 2.5), η οποία είναι

$$(k_1 \quad k_2 \quad k_3)^t = (-149 \quad -61 \quad 46)^t .$$

Άρα, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $\boldsymbol{v} = -149\boldsymbol{u}_1 - 61\boldsymbol{u}_2 + 46\boldsymbol{u}_3$. ◆◆◆

Εφαρμογή 4.9 *Έστω $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ μία βάση ενός $\mathbb{F}-$διανυσματικού χώρου V.*

i) *Να αποδείξετε ότι το σύνολο $U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ είναι μία βάση του V, όπου*

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - 4\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_4$ *και* $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_4$.

ii) *Να εκφράσετε το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_4$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης U.*

Απόδειξη : i) Επειδή το σύνολο B είναι βάση του δ.χ. V, συμπεραίνουμε ότι $\dim V = 4$ και ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ορισμός 4.14). Σύμφωνα με την Πρόταση 4.15, αν το σύνολο $U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, το U παράγει το δ.χ. V. Συνεπώς το U θα αποτελεί μία άλλη βάση του V.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η διανυσματική εξίσωση

$$\begin{aligned} &a_1(\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - 4\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4) + a_2(2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4) \\ &\qquad + a_3(3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_4) + a_4(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}_V , \end{aligned} \tag{4.67}$$

όπου $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}$, πρέπει να έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Από την ισότητα στην (4.67) έχουμε :

$$\begin{aligned} &(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4)\boldsymbol{v}_1 + (2a_1 + 5a_2 + a_4)\boldsymbol{v}_2 \\ &\qquad + (-4a_1 + a_2 + a_3)\boldsymbol{v}_3 + (-a_1 - a_2 - 3a_3 - a_4)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}_V \end{aligned} \tag{4.68}$$

Τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε όλοι οι συντελεστές της (4.68) είναι μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα :

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+3a_3+a_4&=0\\ 2a_1+5a_2\qquad\quad +a_4&=0\\ -4a_1+a_2+a_3\qquad&=0\\ -a_1-a_2-3a_3-a_4&=0 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, διότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = -11 \neq 0 .$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1, το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση $a_1=a_2=a_3=a_4=0$. Άρα, τα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ii) Επειδή το U είναι βάση του V, κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης (Πρόταση 4.10).

Συνεπώς, υπάρχουν μοναδικά $x,y,z,w\in\mathbb{F}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= x\boldsymbol{u}_1+y\boldsymbol{u}_2+z\boldsymbol{u}_3+w\boldsymbol{u}_4\\ &= x(\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_4)+y(2\boldsymbol{v}_1+5\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_4)+z(3\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3-3\boldsymbol{v}_4)+w(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_4)\\ &= (x+2y+3z+w)\boldsymbol{v}_1+(2x+5y+w)\boldsymbol{v}_2+(-4x+y+z)\boldsymbol{v}_3+(-x-y-3z-w)\boldsymbol{v}_4. \end{aligned}$$

Επιπλέον, το $\boldsymbol{v}$ ως προς τα διανύσματα της βάσης B γράφεται $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_4$.

Επομένως εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές έχουμε το σύστημα :

$$\begin{aligned} x+2y+3z+w&=\ \ 1\\ 2x+5y\qquad +w&=-1\\ -4x+y+z\qquad&=\ \ 0\\ -x-y-3z-w&=\ \ 2 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αντιστρέψιμος, (υπολογίστηκε στο ερώτημα (i)). Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση (Πρόταση 2.5), που είναι :

$$(x\ y\ z\ w)^t = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} & 3 & \frac{47}{11} & \frac{-216}{11} \end{pmatrix}^t .$$

Άρα, ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι

$$\boldsymbol{v}=\frac{20}{11}\boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_2+\frac{47}{11}\boldsymbol{u}_3-\frac{216}{11}\boldsymbol{u}_4 .$$

◆◆◆

Εφαρμογή 4.10 *Έστω* $K=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ *υποσύνολο ενός* $\mathbb{F}-$*διανυσματικού χώρου* V *με* $V=span(K)$ *και ένα διάνυσμα* $\boldsymbol{w}\in V$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) Το σύνολο $S=\{\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

ii) $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = span(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.

iii) *Αν* $\boldsymbol{v}_i$ *είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε

$$V = span(K) = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m).$$

Απόδειξη : i) Επειδή $\boldsymbol{w} \in V$ και $V = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, υπάρχουν κατάλληλοι $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{F}$ τέτοιοι ώστε, $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m$, δηλαδή το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων διανυσμάτων του S. Επομένως, το σύνολο S είναι γραμμικά εξαρτημένο, (Πρόταση 4.8).

ii) Είναι φανερό ότι ισχύει

$$span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}) \subseteq V = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m). \tag{4.69}$$

Έστω $\boldsymbol{w} \in V = span(K)$. Άρα, υπάρχουν $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{w} = \ell_1\boldsymbol{v}_1 + \ell_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \ell_m\boldsymbol{v}_m \Rightarrow \ell_1\boldsymbol{v}_1 + \ell_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \ell_m\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}_V. \tag{4.70}$$

Επίσης, για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in V = span(K)$, υπάρχουν κατάλληλοι $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m \Rightarrow a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_V. \tag{4.71}$$

Συνδυάζοντας τις ισότητες στις (4.70) και (4.71) έχουμε:

$$\ell_1\boldsymbol{v}_1 + \ell_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \ell_m\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}_V = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{u} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{u} = (a_1 - \ell_1)\boldsymbol{v}_1 + (a_2 - \ell_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (a_m - \ell_m)\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{w},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{u} \in span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}),$$

δηλαδή το διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in V$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των υπολοίπων διανυσμάτων του S, επομένως

$$V \subseteq span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}). \tag{4.72}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις στις (4.69) και (4.72) προκύπτει

$$span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = V = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}).$$

iii) Είναι φανερό ότι ισχύει

$$span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subseteq V = span(K). \tag{4.73}$$

Απομένει να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1} \in \mathbb{F}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{v}_i = t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}.$$

Έστω $\boldsymbol{u} \in V = span(K)$. Άρα υπάρχουν κατάλληλοι $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$, για τους οποίους ισχύει

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + b_i\boldsymbol{v}_i + b_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m \\ &= b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + b_i(t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}) + b_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m \\ &= (b_1 + t_1 b_i)\boldsymbol{v}_1 + (b_2 + t_2 b_i)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (b_{i-1} + t_{i-1} b_i)\boldsymbol{v}_{i-1} + b_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m.\end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{u} = span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m),$$

οπότε,

$$V = span(K) \subseteq span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m). \tag{4.74}$$

Συνδυάζοντας τις (4.73) και (4.74) η απόδειξη είναι πλήρης. ◆◆◆

Εφαρμογή 4.11 *Έστω* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. *Να αποδείξετε ότι ισχύουν :*

i) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$, *αν και μόνο αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *είναι κάθετα.*

ii) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2$ *(νόμος παραλληλογράμμου)*

iii) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2\right)$

Απόδειξη : Για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, από τον τύπο στην (4.7), $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$, έχουμε

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle. \tag{4.75}$$

Για το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, εφαρμόζοντας τον τύπο στην (4.75) και τις ιδιότητες (iii),(iv), (i) της Πρότασης 4.2, με τη σειρά που αναφέρονται, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2. \tag{4.76}$$

Όμοια, για το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, προκύπτει

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2. \tag{4.77}$$

i) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.1, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 .$$

Έστω ότι ισχύει $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| \Rightarrow \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τις (4.76) και (4.77) και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε

$$4\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 .$$

Αντίστροφα, αντικαθιστώντας στις ισότητες των (4.76) και (4.77) το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0$, καταλήγουμε στην ισότητα

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 .$$

Επειδή οι ποσότητες $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$, $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

ii) Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες στις (4.76) και (4.77), προκύπτει ο νόμος του παραλληλογράμμου.

iii) Αφαιρώντας κατά μέλη τις ισότητες στις (4.76), (4.77), έχουμε

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 4\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle ,$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. ◆◆◆