ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ -–Διανυσματικοί Χώροι

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Έστω
$$U=\left\{A\in M_2(\mathbb{R}):\quad A\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}A\right\}.$$
   i) Να αποδείξετε ότι $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in U$ αν και μόνο αν $b=c+2a-2d=0$.

   ii) Να εξετάσετε αν το U είναι ένας υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ και να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του U.

2. Έστω το σύνολο
$$W=\left\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}):\quad A\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}A\right\}$$
   i) Να αποδείξετε ότι $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in W$ αν και μόνο αν $c=2b=2a-2d$.

   ii) Να βρείτε μία βάση του υποχώρου W καθώς και τη διάστασή της.

3. Έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=(1,2,-2,-1)$, $\boldsymbol{v}_2=(-1,1,0,1)$ και $\boldsymbol{v}_3=(0,2,1,4)$ και U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από $\boldsymbol{u}_1=(6,5,-5,-2)$ και $\boldsymbol{u}_2=(6,9,4,-9)$.

   i) Να βρείτε μία βάση του V,U.

   ii) Να βρείτε μία βάση του $V+U$ και τη διάστασή της καθώς και τη διάσταση του $V\cap U$.

   iii)Να εξετάστε αν ισχύει $\mathbb{R}^4=V\oplus U$.

4. Έστω τα υποσύνολα W_1, W_2 του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται ως ακολούθως:

$$W_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \quad x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 3x_3 + x_4 = 0\right\}$$

i) Να εξετάσετε αν W_1, W_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου $W_1 \cap W_2$.

iii) Να υπολογίσετε τη διάσταση των υπόχωρων W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$.

iv) Δικαιολογήστε γιατί ο $\mathbb{R}^4$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2.

Να αποδείξετε ότι για τον $\Delta = span\{(0,0,0,1)\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus \Delta$.

5. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

i) Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πραγματικοί πίνακες B για τους οποίους ισχύει $AB = BA$.

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πινάκων B αποτελεί υπόχωρο του διανυσματικού χώρου όλων των πραγματικών 2×2 πινάκων.

iii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του παραπάνω υπόχωρου.

6. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad a - b - 3c + d = 0 \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

7. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

iii) Βρείτε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^\perp$ και τη διάσταση του διανυσματικού χώρου $W^\perp$.

8. Έστω το σύνολο

$$W=\left\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:\quad x_1-2x_2+x_3=0,\ \ x_2+x_4=0\ \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

iii) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$ και τη διάσταση του $W^{\perp}$.

9. Θεωρούμε το σύνολο

$$S=\{\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ \langle\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=0,\ \ \text{με}\ \ \boldsymbol{y}=(2,-2,4)\}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το S αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του S.

iii) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του S, που περιέχει το διάνυσμα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

10. Έστω U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$(1,1,1,0),\ (2,1,0,1),\ (4,3,2,1),\ (0,1,2,-1)$$

και έστω V ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$:

$$V=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:\ x-y-z+w=x+y+z=2x+w=0\right\}.$$

i) Να εξετάσετε αν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μια βάση B_U και τη διάσταση του U.

ii) Να βρείτε μια βάση B_V και τη διάσταση του V.

iii)Να δείξετε ότι το σύνολο $B_U\cup B_V$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

11. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1=\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix},\ x,y,z,w\in\mathbb{R}:\quad x=y+2z-w\},$$

$$W_2=\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix},\ x,y,z,w\in\mathbb{R}:\quad x-2w=y-z=0\}.$$

i) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1 και $W_1\cap W_2$ του $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών υποχώρων W_2 και W_1+W_2.

iii)Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $M_2(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$, ενώ ο $M_2(\mathbb{R})$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2.

iv)Να αποδείξετε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος $W_3 = span\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ δεν είναι υποσύνολο του W_1 και ότι ισχύει $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_3$.

12. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x, y, z, w \in \mathbb{R}: \quad x = w = z\},$$

$$W_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x, y, z, w \in \mathbb{R}: \quad x - w = y + z\}.$$

i) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών υποχώρων $W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2$.

iii)Για το διανυσματικό χώρο $M_2(\mathbb{R})$ ισχύει $M_2(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$; Είναι το άθροισμα ευθύ; Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

13. Έστω V, W οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ με

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + y - z = 0\} \quad \text{και} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}.$$

i) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση και τη διάσταση των V και W, θεωρώντας το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση για την τομή $W \cap V$. Ισχύουν οι σχέσεις $\mathbb{R}^3 = V + W$ και $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$;

14. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ και έναν υπόχωρό του V που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 2, 2, -6)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 3, 2)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 9, -5)$.

i) Να βρείτε μία βάση του χώρου V και τη διάστασή του.

ii) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $V^{\perp}$ του υποχώρου V ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$.

15. Δίνεται ο διανυσματικός υπόχωρος $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0\}$ και ο υπόχωρος W_2, ο οποίος παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων $\{(1,2,1),(1,-1,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

i) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1, W_2 και $W_1 + W_2$ του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρείτε βάση και τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου $W_1 \cap W_2$.

iii) Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το άθροισμα των W_1, W_2; Είναι το άθροισμα ευθύ; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

16. Έστω τα πολυώνυμα

$$p_1(x) = x^3 - x^2 + x - 4, \quad p_2(x) = x^2 - 9 \quad \text{και} \quad p_3(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2.$$

i) Να διατυπώσετε συνθήκες για τους συντελεστές $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

ii) Να εκφράσετε, αν είναι δυνατό, τα πολυώνυμα $g_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 8$ και $g_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x - 8$ ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

iii) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

iv) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης να δώσετε μία βάση του παραπάνω διανυσματικού χώρου που να τα περιέχει.