Κεφάλαιο 3

Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Α   Σ Υ Σ Τ Η Μ Α Τ Α

3.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 3.1

Ένα σύνολο m εξισώσεων και n αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που έχει τη μορφή

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{3.1}$$

*ονομάζεται **γραμμικό σύστημα** m εξισώσεων με n αγνώστους ή πιο απλά $m \times n$ γραμμικό σύστημα, όπου $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Μια $n-$ άδα αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του (3.1), *λέγεται **λύση** του συστήματος και το σύνολο όλων των λύσεων **γενική λύση** του συστήματος. Η διαδικασία, που ακολουθείται για τον έλεγχο ύπαρξης και την εύρεση ή μη ύπαρξης της γενικής λύσης του συστήματος, λέγεται **επίλυση** του συστήματος. Όταν το γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστο μία λύση λέγεται **συμβιβαστό**, διαφορετικά **αδύνατο** ή **μη συμβιβαστό.***

*Στην περίπτωση όπου $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ το σύστημα ονομάζεται **ομογενές**, διαφορετικά λέγεται **μη ομογενές.*** Είναι φανερό πως ένα ομογενές γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό, αφού μία λύση του είναι η μηδενική, η οποία ονομάζεται και ***τετριμμένη λύση***.

Εφαρμόζοντας λογισμό πινάκων, το σύστημα (3.1), μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Ορισμός 3.2

Ο $m\times n$ *πίνακας* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *ονομάζεται* ***πίνακας των συντελεστών***

του συστήματος, ο πίνακας – στήλη $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *ονομάζεται* ***πίνακας των αγνώστων*** *και*

ο πίνακας $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *λέγεται* ***πίνακας των σταθερών όρων*** *του συστήματος.*

Ο $m\times(n+1)$ *πίνακας*

$$\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ονομάζεται ***επαυξημένος πίνακας*** *του συστήματος. Ο πίνακας* $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ *προκύπτει από*

τον A *αν επισυνάψουμε σε αυτόν μια επιπλέον στήλη, τη* $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Για παράδειγμα, αν το γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1+4x_2+\ x_3 &=-6 \\ -2x_1+3x_2-3x_3 &=-5 \end{aligned}$$

τότε οι αντίστοιχοι πίνακες είναι

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}\quad \left(A\mid \boldsymbol{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

Αν με ε_i συμβολίζουμε την $i-$ εξίσωση του γραμμικού συστήματος (3.1), είναι φανερό ότι :

- αν εναλλάξουμε δυο εξισώσεις $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_j$ του αρχικού συστήματος (3.1), το νέο σύστημα, που θα προκύψει, θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό,

- αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση του συστήματος (3.1) με πολλαπλάσιό της, $\varepsilon_i \to a\varepsilon_i$, $a \neq 0$, το νέο σύστημα, που θα προκύψει, θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό,
- αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση του (3.1) με μια άλλη που προκύπτει από την πρόσθεση σε αυτήν των αντίστοιχων μελών μιας άλλης εξίσωσης, η οποία έχει πολλαπλασιασμένα τα μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, $\varepsilon_j \to \varepsilon_j + a\varepsilon_i$, $a \neq 0$, το νέο σύστημα, που θα προκύψει, θα έχει την ίδια γενική λύση με το αρχικό.

Παρατήρηση 3.1 Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω «πράξεις», οι οποίες ονομάζονται **στοιχειώδεις πράξεις** ή **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί**, κατασκευάζεται από το αρχικό σύστημα ένα νέο σύστημα, το οποίο έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό και γι΄ αυτό τα δύο συστήματα ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Αν σκεφτούμε ότι κάθε μία από τις προαναφερθείσες στοιχειώδεις πράξεις του γραμμικού συστήματος αντιστοιχεί και σε μία ανάλογη «πράξη» στις αντίστοιχες γραμμές του επαυξημένου του πίνακα, είμαστε σε θέση να δικαιολογήσουμε αφενός μεν τον όρο **γραμμοπράξεις**, αφετέρου το συμβολισμό που χρησιμοποιείται και να κατανοήσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.3

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. *Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται* ***στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών*** *του πίνακα* A *ή πιο σύντομα* ***γραμμοπράξεις***, συγκεκριμένα

- *εναλλαγή δύο γραμμών,*
- *πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του* A *με ένα μη μηδενικό στοιχείο του*
- *πρόσθεση σε μια γραμμή του πολλαπλασίου μιας άλλης γραμμής.*

Αν r_i είναι η $i-$ γραμμή του A οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω γραμμοπράξεων είναι

- $r_i \leftrightarrow r_j$ (εναλλάσσουμε τις r_i, r_j)
- $r_i \to ar_i$ (πολλαπλασιάζουμε την r_i επί τον αριθμό $a \neq 0$)
- $r_i \to r_i + ar_j$ (στη γραμμή r_i προσθέτουμε $a \neq 0$ φορές την r_j).

Ορισμός 3.4

Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Θα λέμε ότι ο* A *είναι* ***γραμμοϊσοδύναμος*** *με τον* B, *αν ο* B *προκύπτει από τον* A *μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Για παράδειγμα, ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$, επειδή $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις στις εξισώσεις ενός συστήματος με σκοπό να πάρουμε ένα απλούστερο σύστημα, ισοδύναμο με το αρχικό. Τις ίδιες πράξεις θα εφαρμόσουμε ταυτόχρονα και στις γραμμές του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα, μια και από τους Ορισμούς 3.3, 3.4 και την Παρατήρηση 3.1, φαίνεται καθαρά ότι ισοδύναμα συστήματα αντιστοιχούν σε γραμμοϊσοδύναμους επαυξημένους πίνακες.

Παρατήρηση 3.2 Για διευκόλυνσή μας, στη συνέχεια για να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα χρησιμοποιούμε **μόνο** τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.

Παράδειγμα 3.1 Θεωρούμε το σύστημα $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$.

Από το σύστημα έχουμε τον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$.

Χρησιμοποιούμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος για να απαλείψουμε από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση τον x_1 άγνωστο. Αυτό επιτυγχάνεται:

– αν, αρχικά, πολλαπλασιάσουμε επί -3 την πρώτη εξίσωση και την προσθέσουμε στη δεύτερη ($\varepsilon_2 \to \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1$), ή με τη «γλώσσα» των γραμμοπράξεων στον επαυξημένο πίνακα ($r_2 \to r_2 - 3r_1$), και

– αν, ακολούθως, πολλαπλασιάσουμε επί -5 την πρώτη εξίσωση και την προσθέσουμε στην τρίτη ($\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 - 5\varepsilon_1$), ή με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα $r_3 \to r_3 - 5r_1$. Το σύστημα που θα προκύψει είναι :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + \ x_4 &= 1 \\ 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Έτσι, ο αρχικός επαυξημένος πίνακας γίνεται :

$$\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right). \tag{3.2}$$

Με την ίδια διαδικασία, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη εξίσωση, απαλείφουμε από την τρίτη εξίσωση τον άγνωστο x_2. Τούτο επιτυγχάνεται αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση επί -1 και την προσθέσουμε στην τρίτη $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + (-1)\varepsilon_2$, ή αντίστοιχα από τον επαυξημένο $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ στην (3.2) κάνοντας τη γραμμοπράξη $r_3 \to r_3 + (-1) r_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + \ x_4 &= 1 \\ 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\hat{A} \,\middle|\, \hat{\boldsymbol{b}}\right).$$

Τέλος, αν πολλαπλασιάσουμε επί $\frac{1}{2}$ τη δεύτερη εξίσωση ($\varepsilon_2 \to \frac{1}{2}\varepsilon_2$) και επί (-1) την τρίτη εξίσωση ($\varepsilon_3 \to (-1)\varepsilon_3$) θα πάρουμε ένα ισοδύναμο σύστημα με το αρχικό, αφού οι μόνες πράξεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί . Το νέο σύστημα πολύ εύκολα επιλύεται, μια και έχει την μορφή

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \ x_3 + \ x_4 \ &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \left(\hat{A} \,\middle|\, \hat{\boldsymbol{b}}\right) \xrightarrow[r_3 \to (-1) r_3]{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \tag{3.3}$$

Πράγματι, αν λύσουμε το σύστημα της (3.3) κάνοντας αντικατάσταση από την τελευταία εξίσωση προς την αρχική, έχουμε

$$x_4 = -1, \quad x_2 - 2x_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1 + 2x_3, \quad x_1 - (1 + 2x_3) + x_3 + (-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 + x_3,$$

οπότε η γενική λύση είναι το σύνολο

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + x_3,\ 1 + 2x_3,\ x_3,\ -1), \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ή όπως συνηθίζουμε να γράφουμε τη λύση του συστήματος με μορφή πινάκων

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x_3\\1+2x_3\\x_3\\-1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}.$$

Η μορφή του επαυξημένου πίνακα στην (3.3) είναι γνωστή ως «κλιμακωτή» μορφή πίνακα ή όπως διαφορετικά λέμε ο πίνακας είναι «κλιμακωτός».

Ορισμός 3.5

- *Ένας πίνακας A ονομάζεται **κλιμακωτός** αν*
  - i) *το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής (το οποίο ονομάζεται ηγετικό ή οδηγούν στοιχείο της γραμμής) βρίσκεται σε θέση δεξιότερα από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής*
  - ii) *οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.*
- *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν επιπλέον ισχύουν*
  - iii) *το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το* 1
  - iv) *το ηγετικό στοιχείο* 1 *είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.*

Για παράδειγμα, από τους επόμενους πίνακες

$$\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός, αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός. Ξαναβλέποντας την Παρατήρηση 3.1, τους Ορισμούς 3.3, 3.4, 3.5 και το Παράδειγμα 3.1, εύκολα καταλήγουμε στις επόμενες προτάσεις :

Πρόταση 3.1

Κάθε $m\times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $m\times n$ κλιμακωτό πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Πρόταση 3.2

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός ή μπορεί να είναι ανηγμένος κλιμακωτός .

Η προηγούμενη πρόταση είναι σημαντική μια και όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 3.2, στο εξής θα ασχολούμαστε μόνο με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Συνεπώς θα διευκολύνουμε τη διαδικασία επίλυσης του γραμμικού συστήματος, αν ο πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, ακόμη καλύτερα δε, αν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή. Γι΄ αυτό, εδώ παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που μετασχηματίζει έναν πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Αλγόριθμος 3.1

Μετασχηματισμός πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

Βήμα 1	Εντοπίζουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη και μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.
Βήμα 2	Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής σε 1.
Βήμα 3	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη του πρώτου 1 της πρώτης γραμμής και κάτω από αυτό.
Βήμα 4	Στη συνέχεια αγνοούμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 – 3 για τις επόμενες γραμμές. (Αν οι επόμενες γραμμές είναι όλες μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και πάμε στο επόμενο βήμα.)
Βήμα 5	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο 1 μιας γραμμής

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

3.2 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην Πρόταση 3.2 χρησιμοποιώντας την λογική του Αλγορίθμου 3.1 μπορούμε να μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτό ή και σε ανηγμένο κλιμακωτό, οπότε τότε η επίλυση του συστήματος απλοποιείται. Η **μέθοδος απαλοιφής του Gauss** περιγράφει ακριβώς αυτή τη διαδικασία.

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα και τον αντίστοιχο επαυξημένο του πίνακα

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}, \quad \left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Έστω ότι $\alpha_{11} \neq 0$, (αν δε συμβαίνει κάνουμε εναλλαγή εξισώσεων ή ακόμη και αγνώστων, δηλαδή εναλλαγή στηλών, προκειμένου να έχουμε πρώτο στοιχείο στην πρώτη γραμμή μη μηδενικό). Χρησιμοποιώντας την πρώτη γραμμή και κάνοντας γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία των επόμενων γραμμών που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το α_{11}. Μέχρι εδώ έχουμε εφαρμόσει ουσιαστικά το 1^{o} και 3^{o} βήμα του Αλγορίθμου 3.1.
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία που περιγράφηκε με τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής. Έστω ότι $\tilde{\alpha}_{22} \neq 0$ είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής, τότε κάνοντας γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία των επόμενων γραμμών που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το $\tilde{\alpha}_{22}$.
- Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα, για όλες τις γραμμές των γραμμοϊσοδύναμων επαυξημένων πινάκων που προκύπτουν,

οπότε καταλήγουμε σε έναν γραμμοϊσοδύναμο με τον αρχικό επαυξημένο πίνακα της μορφής

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1r} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2r} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right). \tag{3.4}$$

Συνεπώς το αντίστοιχο σύστημα θα είναι

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{11}x_{i1} + \tilde{a}_{12}x_{i2} + \cdots + \tilde{a}_{1r}x_{ir} + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_{in} &= \tilde{b}_1 \\
\tilde{a}_{22}x_{i2} + \cdots + \tilde{a}_{2r}x_{ir} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_{in} &= \tilde{b}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\
\tilde{a}_{rr}x_{ir} + \cdots + \tilde{a}_{rn}x_{in} &= \tilde{b}_r \;, \\
0 &= \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots \quad & \vdots \\
0 &= \tilde{b}_m
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

όπου $\tilde{a}_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

Από τη μορφή του συστήματος (3.5) προκύπτουν τα εξής :

Παρατήρηση 3.3

i) Αν $r < m$ και κάποιο από τα $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m \neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**, άρα ο πίνακας (3.4) θα έχει κάποια γραμμή της μορφής $\left(0\,0\cdots0 \,|\, c\right)$, όπου $c \neq 0$.

ii) Αν $r \leq m$ και $\tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$, το σύστημα είναι **συμβιβαστό**.

Ειδικότερα, αν $r = m$ και επιπλέον,

α) αν $r = n$, το σύστημα έχει **ακριβώς μία λύση** (είναι σύστημα Crammer, βλέπε Πρόταση 2.5 και Παρατήρηση 3.4),

β) αν $r < n$, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**. Οι $n - r$ άγνωστοι $x_{i\,r+1}, x_{i\,r+2}, \ldots, x_{i\,r+n}$ ορίζονται αυθαίρετα, και οι υπόλοιποι προσδιορίζονται πλήρως από τη λύση του συστήματος (3.5), ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση προς την πρώτη, ακολουθώντας τη μέθοδο αντικατάστασης.

Παρατήρηση 3.4 ◆ Σχετικά με την Παρατήρηση 3.3 περίπτωση ii) β), οι άγνωστοι που ορίζονται αυθαίρετα ονομάζονται **παράμετροι** ή **ελεύθεροι άγνωστοι** ή **ελεύθερες μεταβλητές**, το δε σύστημα λέμε ότι έχει $n - r$ πλήθος παραμέτρων ή $n - r$ παραμετρική απειρία λύσεων.

◆ Ο αριθμός, που ισούται με r στον πίνακα του συστήματος (3.5), δηλώνει το βαθμό του, όπως φαίνεται από τον επόμενο ορισμό. Συνεπώς ο βαθμός του πίνακα παίζει σημαντικότατο ρόλο στην ύπαρξη ή όχι λύσεων ενός γραμμικού συστήματος.

◆ Ειδικά στην περίπτωση όπου $r = m$ και $n - r = 0 \Leftrightarrow r = n$, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι η τελευταία σχέση δείχνει ότι δεν υπάρχει καμία παράμετρος και επειδή το σύστημα είναι συμβιβαστό, έχει **ακριβώς μία λύση**, η οποία μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο Cramer, (βλέπε Πρόταση 2.5).

Ορισμός 3.6

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. ***Βαθμός*** *ή* ***τάξη*** *του* A *ονομάζεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού (ή ανηγμένου κλιμακωτού) πίνακα του* A *και συμβολίζεται με* $r(A)$ *ή* $rank(A)$.

Προφανώς για τον βαθμό του πίνακα ισχύει $r(A) \le \min\{m, n\}$.

Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ έχουμε $r(A) = 1$, γιατί η κλιμακωτή μορφή του A είναι $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ενώ ο βαθμός του $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $r(B) = 3$, επειδή ο πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές, τέλος, για να υπολογίσουμε το βαθμό του $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, χρησιμοποιούμε γραμμοπράξεις $r_2 \to r_2 - r_1$, οπότε ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας του Γ είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, ο οποίος βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή, συνεπώς $r(\Gamma) = 3$.

Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.3 (i), το σύστημα είναι αδύνατο όταν και μόνο όταν ο επαυξημένος κλιμακωτός πίνακας έχει γραμμή της μορφής $\left(0\,0\cdots 0 \,\middle|\, c\right)$ με $c \neq 0$, οπότε είναι φανερό ότι ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας έχει γραμμή της μορφής $\left(0\,0\cdots 0 \,\middle|\, 1\right)$. Επιπλέον, από τον Ορισμό 3.6 συμπεραίνουμε ότι σ’ αυτήν την περίπτωση ισχύει $r(A) \neq r\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b}\right)$.

Συνοψίζοντας έχουμε :

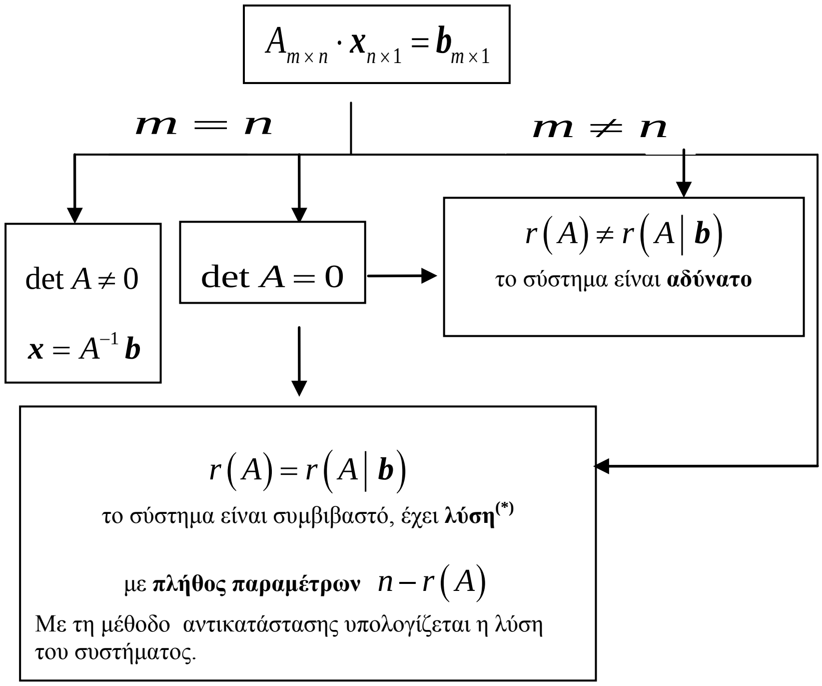
Πρόταση 3.3

i) *Έστω* $\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)$ *ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και* K *ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα* $\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)$. *Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο* K ***δεν*** *περιέχει γραμμή της μορφής* $\left(0\,0\cdots0\,\middle|\,1\right)$.

ii) *Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ισχύει* $r\left(A\right)=r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.3 και των Παρατηρήσεων 3.3 και 3.4 καταλήγουμε στο επόμενο διάγραμμα, όπου απεικονίζεται η ροή επίλυσης ενός μη ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Διάγραμμα 3.1



(*) Αν το πλήθος παραμέτρων είναι **μηδέν**, τότε το σύστημα παρουσιάζει **μοναδική λύση**, διαφορετικά οι λύσεις είναι **άπειρες.**

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες είναι συμβιβαστό το επόμενο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= a \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= a \end{aligned}$$

Μετά από σειρά στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 4 & 1 & -2 & a \end{array}\right)$ του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$K \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 3a-19 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών είναι 3. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $r(K)=3$, δηλαδή αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή του K είναι μηδενική, οπότε θα πρέπει $a=3$.

Παρατήρηση 3.5 Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα (3.1) είναι **ομογενές**, δηλαδή, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, η μέθοδος των γραμμοπράξεων οδηγεί σε έναν επαυξημένο πίνακα της μορφής (3.4), στον οποίο $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \cdots \tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 (i) είναι **πάντα συμβιβαστό**, μια και δεν περιέχει γραμμή της μορφής $\left(0\,0 \cdots 0 \,|\, c\right)$ με $c \neq 0$.

- Όταν $r = m = n$, προφανώς η γενική λύση είναι η μηδενική, (συνδύασε σχόλια Παρατήρησης 3.4 και αποτελέσματα Παρατήρησης 2.1).
- Αν $r < n$ έχει **άπειρες λύσεις** με $n-r$ παραμέτρους, όπως προκύπτει άμεσα από την Παρατήρηση 3.4 περίπτωση (ii) β).
- Στην περίπτωση $m < n$, οι λύσεις είναι άπειρες, διαφορετικές από τη μηδενική, μια και ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα είναι $r \le \min\{m, n\} = m$.

Έτσι έχουμε αποδείξει την επόμενη πρόταση που αναφέρεται σε ομογενή γραμμικά συστήματα.

Πρόταση 3.4

Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m *εξισώσεων,* n *αγνώστων και* r *να είναι ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών του.*

i) *Το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει τη μηδενική λύση όταν* $r = m = n$.

ii) *Αν* $m < n$ *έχει άπειρες λύσεις και τότε το πλήθος παραμέτρων ισούται με τη διαφορά* $n - r$.

Παράδειγμα 3.3 Το πλήθος των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

υπολογίζεται ως ακολούθως: Με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to r_2 - r_1$ και $r_3 \to r_3 - 2r_1$, ο πίνακας των συντελεστών έχει τη μορφή $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, οπότε μετά από την γραμμοπράξη $r_3 \to r_3 - 3r_2$ έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{A}$ και όταν εφαρμόσουμε και $r_2 \to \frac{1}{2} r_2$ καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}$. Ο βαθμός του πίνακα $\tilde{A}$ είναι $r = r\left(\tilde{A}\right) = 2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4, το πλήθος των λύσεων αποτελείται από $n - r = 4 - 2 = 2$ σύνολα, αφού έχει 2 παραμέτρους. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αντικατάστασης στο σύστημα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + 2x_4 - 3x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 \end{aligned},$$

από όπου τελικά προκύπτει $x_1 = -2x_2 - x_4$, $x_3 = \frac{1}{2}x_4$, για τις τυχαίες παραμέτρους $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Οπότε η λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} .$$

3.3 Αντιστρέψιμοι πίνακες

Οι γραμμοπράξεις και ιδιαίτερα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα μας πληροφορούν για την ύπαρξη ή όχι του αντίστροφου πίνακα, επίσης δίνουν και μια μέθοδο υπολογισμού του, όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση και τον αλγόριθμο που την ακολουθούν.

Πρόταση 3.5

Ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα.

Αλγόριθμος 3.2

Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα $(A|\,I)$ στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με σκοπό να μετατραπεί ο A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα K. Τότε ο $(A|\,I)$ έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής $(K\,|\,B)$.

- Αν $K = I$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.
- Αν $K \neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Για παράδειγμα, εξετάζοντας αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο 3.2, διαπιστώνουμε ότι αυτός δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι,

$$(A|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = (K\,|\,B).$$

Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί ο πίνακας $K = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ενώ είναι ανηγμένος κλιμακωτός, δεν είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

3.4 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 3.4 Να βρεθεί ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

Απόδειξη : Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 3.1 μετασχηματίζουμε τον πίνακα A στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του, συνεπώς έχουμε:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to r_4+2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\\0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to\frac{1}{3}r_4}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό. ◆◆◆

Παράδειγμα 3.5 Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο Gauss:

i) $$\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3+3x_4&=4\\2x_1+3x_2+3x_3-x_4&=3\\5x_1+7x_2+4x_3+x_4&=5\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}x_1-4x_2&=1\\2x_1-x_2&=4\\3x_1+2x_2&=2\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}x_1+x_2+2x_3&=1\\3x_1-x_2-x_3&=2\\x_1+2x_2+6x_3&=-1\\5x_1+2x_2+3x_3&=-6\end{aligned}$$

iv) $$\begin{aligned}4x_1-3x_2-2x_3&=0\\-2x_1+3x_2+4x_3&=0\\3x_1-x_2-x_3&=0\\3x_1-x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

v) $$\begin{aligned}3x_1-3x_2-6x_3-2x_4&=1\\x_1-x_2-2x_3+5x_4&=6\end{aligned}$$

vi) $$\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5&=1\\2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=2\\3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5&=3\end{aligned}$$

Απόδειξη : Τα συστήματα είναι της μορφής $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Τους επαυξημένους πίνακες συμβολίζουμε $\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss. Επειδή σε όλα τα συστήματα είναι $m\neq n$, ακολουθώντας το Διάγραμμα 3.1, υπολογίζουμε πρώτα το βαθμό του αντίστοιχου γραμμοϊσοδύναμου επαυξημένου κλιμακωτού πίνακα του συστήματος.

i) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&4\\2&3&3&-1&3\\5&7&4&1&5\end{array}\right)$.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2\to(-2)r_1+r_2$, $r_3\to(-5)r_1+r_3$ και $r_3\to(-2)r_2+r_3$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&4\\2&3&3&-1&3\\5&7&4&1&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&4\\0&1&7&-7&-5\\0&2&14&-14&-15\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&4\\0&1&7&-7&-5\\0&0&0&0&-5\end{array}\right).$$

Από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει ότι $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c}1&-4&1\\2&-1&4\\3&2&2\end{array}\right)$. Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $r_2\to(-2)r_1+r_2$, $r_3\to(-3)r_1+r_3$, $r_2\to\frac{1}{7}r_2$, $r_3\to\frac{1}{14}r_3$ και $r_3\to(-1)r_2+r_3$ παίρνουμε διαδοχικά :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-4&1\\2&-1&4\\3&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-4&1\\0&7&2\\0&14&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-4&1\\0&1&\frac{2}{7}\\0&1&-\frac{1}{14}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&-4&1\\0&1&\frac{2}{7}\\0&0&-\frac{5}{14}\end{array}\right)$$

Επειδή ισχύει $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, το σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε τους μετασχηματισμούς $r_2\to(-3)r_1+r_2$, $r_3\to(-1)r_1+r_3$,

$r_4 \to (-5)r_1 + r_4$, $r_2 \leftrightarrow r_3$, κατόπιν $r_3 \to 4r_2 + r_3$ και $r_4 \to 3r_2 + r_4$, τέλος $r_3 \to \frac{1}{9}r_3$ και $r_4 \to (-5)r_3 + r_4$:

$$\left(A|\boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 5 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & -11 \end{array}\right).$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε $r\left(A \,|\, \boldsymbol{b}\right) = 4 \neq r\left(A\right) = 3$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

iv) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A \,|\, \boldsymbol{0}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Εναλλάσσουμε τις γραμμές $r_1 \leftrightarrow r_4$ και τις στήλες $c_1 \leftrightarrow c_3$, έτσι έχουμε τον πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)$. Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to (-4)r_1 + r_2$, $r_3 \to r_1 + r_3$, $r_4 \to 2r_1 + r_4$, κατόπιν $r_2 \to \frac{1}{7}r_2$, $r_3 \to (-\frac{1}{2})r_3$ και τέλος $r_4 \to (-\frac{1}{5})r_4$, οπότε διαδοχικά έχουμε :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα, όταν κάνουμε και τους μετασχηματισμούς $r_3 \to (-1)r_2 + r_3$, $r_4 \to (-1)r_2 + r_4$ και $r_3 \to (-1)r_3$, δηλαδή,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Επειδή $r\left(A|\,\mathbf{0}\right) = r\left(A\right) = 3$, το σύστημα έχει λύση και μάλιστα με πλήθος παραμέτρων $n - r\left(A\right) = 3 - 3 = 0$, οπότε η λύση είναι μοναδική και υπολογίζεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x_3 - x_2 + 3x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

v) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A|\,\boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right)$.

Κάνοντας τους μετασχηματισμούς $r_1 \leftrightarrow r_2$ και $r_2 \to (-3)r_1 + r_2$ προκύπτει

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right).$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, επειδή ισχύει $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right) = r\left(A\right) = 2$. Το πλήθος των παραμέτρων είναι $n - r\left(A\right) = 4 - 2 = 2$ και η μορφή της λύσης υπολογίζεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \\ -17x_4 = -17 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{array}.$$

Συνεπώς οι άπειρες λύσεις είναι $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

vi) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(A|\,\boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right).$$

Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to (-2)r_1 + r_2$ και $r_3 \to (-3)r_1 + r_3$, εναλλάσσουμε τις γραμμές $r_2 \leftrightarrow r_3$, οπότε έχουμε

$$\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&3&1\\0&-3&6&0&0&0\\0&-1&2&-6&-18&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&3&1\\0&-1&2&-6&-18&0\\0&-3&6&0&0&0\end{array}\right)\equiv K\,.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_2\to(-1)r_2$, $r_3\to 3r_2+r_3$ και $r_3\to\frac{1}{18}r_3$, βρίσκουμε:

$$K\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&3&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&-3&6&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&3&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&0&0&18&54&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&-2&1&3&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&0&0&1&3&0\end{array}\right)$$

Επειδή $r\left(A\mid\boldsymbol{b}\right)=r\left(A\right)=3$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r\left(A\right)=5-3=2$, οι οποίες θα υπολογισθούν από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5&=1\\x_2-2x_3+6x_4+18x_5&=0\\x_4+3x_5&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=1\\x_2&=2x_3\\x_4&=-3x_5\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2x_3\\x_3\\-3x_5\\x_5\end{pmatrix},\quad x_3,x_5\in\mathbb{R}$$

◆◆◆

Παράδειγμα 3.6 Ένας τραπεζικός οργανισμός προγραμματίζει την επένδυση 30000 χρηματικών μονάδων σε δύο τομείς: στον τομέα (α) με απόδοση 6% και στον τομέα (β) με απόδοση 9%. Αν το ολικό ποσό, που προέρχεται από τα ετήσια έσοδα των προγραμματισμένων επενδύσεων, είναι το ίδιο, με το ποσό που θα κέρδιζε ο οργανισμός, αν επένδυε το ποσό των 30000 χρηματικών μονάδων με απόδοση 7%, να υπολογισθούν τα ποσά επένδυσης που αντιστοιχούν στους τομείς (α) και (β).

Απόδειξη : Έστω x_1 να είναι το ποσό, το οποίο θα επενδύσει ο οργανισμός με απόδοση 6% και x_2 να είναι το ποσό, το οποίο θα επενδύσει με απόδοση 9%. Τότε

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=30000\\0,06x_1+0,09x_2&=0,07\cdot 30000\end{aligned}\quad\text{ή}\quad\begin{aligned}x_1+x_2&=30000\\2x_1+3x_2&=70000\end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c}1&1&30000\\2&3&70000\end{array}\right)$. Κάνοντας τη γραμμοπράξη $r_2\to(-2)r_1+r_2$ προκύπτει

$$\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c}1&1&30000\\0&1&10000\end{array}\right).$$

Επειδή ισχύει $r(A|\boldsymbol{b}) = r(A) = 2$, το πλήθος των παραμέτρων είναι $n - r(A) = 2 - 2 = 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται με τη μέθοδο αντικατάστασης, λύνοντας το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 30000 \\ x_2 &= 10000 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 20000 \\ x_2 &= 10000 \end{aligned} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

Επομένως, στον τομέα (α) πρέπει να επενδυθούν 20000 χρηματικές μονάδες και στον τομέα (β) 10000 χρηματικές μονάδες.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης, είναι η λύση του συστήματος με τη μέθοδο Cramer, επειδή ο πίνακας των συντελεστών είναι τετραγωνικός και έχει $\det A = 1 \neq 0$, (βλέπε Πρόταση 2.5). ◆◆◆

Παράδειγμα 3.7 Να υπολογισθούν τα απαιτούμενα ποσά, x_1, x_2, x_3, κάθε μιας από τις τροφές $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, τα οποία πρέπει να προμηθεύεται ημερήσια ένα άτομο, προκειμένου να ικανοποιεί τις ελάχιστες βιταμινούχες ανάγκες του, έχοντας υπόψη τον επόμενο πίνακα:

Τροφή	x	y	z	Ελάχιστη ημερήσια ανάγκη
Βιταμίνη A	0,3	0,1	0,4	1,5
Βιταμίνη B	100	40	60	440
Βιταμίνη C	1,6	2,2	1,4	10,6

Απόδειξη : Αν x_1, x_2, x_3 είναι τα ποσά από την τροφή $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, αντιστοίχως, σύμφωνα με τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} 0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 &= 1,5 \\ 100x_1 + 40x_2 + 60x_3 &= 440 \\ 1,6x_1 + 2,2x_2 + 1,4x_3 &= 10,6 \end{aligned} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 8x_1 + 11x_2 + 7x_3 &= 53 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $(A|\boldsymbol{b}) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 15 \\ 5 & 2 & 3 & 22 \\ 8 & 11 & 7 & 53 \end{array}\right)$.

Εναλλάσσοντας τις στήλες $c_1 \leftrightarrow c_2$ έχουμε τον πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 15 \\ 2 & 5 & 3 & 22 \\ 11 & 8 & 7 & 53 \end{array}\right) \equiv (\hat{A}|\boldsymbol{b})$

Εφαρμόζοντας στον $\left(\hat{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)$ τους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to (-2)r_1 + r_2$, $r_3 \to (-11)r_1 + r_3$, κατόπιν $r_2 \to (-1)r_2$ και $r_3 \to 25r_2 + r_3$, προκύπτει

$$\left(\hat{A}\middle|\boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 15 \\ 2 & 5 & 3 & 22 \\ 11 & 8 & 7 & 53 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -25 & -37 & -112 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 88 & 88 \end{array}\right) \equiv \left(B\middle|\boldsymbol{b}\right).$$

Από τον τελευταίο πίνακα $\left(B\middle|\boldsymbol{b}\right)$ συμπεραίνουμε ότι

$r\left(\hat{A}\middle|\boldsymbol{b}\right) = r\left(\hat{A}\right) = r\left(B\middle|\boldsymbol{b}\right) = r\left(B\right) = 3$, επομένως το σύστημα έχει λύση, με πλήθος παραμέτρων $n - r\left(\hat{A}\right) = 3 - 3 = 0$. Σύμφωνα με το Διάγραμμα 3.1, η λύση είναι μοναδική και υπολογίζεται από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + 3x_1 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 5x_3 = 8 \\ 88x_3 = 88 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το άτομο ημερησίως πρέπει να λαμβάνει από την τροφή x ποσότητα 3, από την y ποσότητα 2 και από την τροφή z ποσότητα 1. ◆◆◆

Εφαρμογή 3.1 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να λυθούν τα συστήματα

$$\text{i)}\quad \begin{array}{rl} 2x_1 - ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{array} \qquad \text{ii)}\quad \begin{array}{rl} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{array}.$$

Απόδειξη : i) Όπως αναφέρεται στην Παρατήρηση 3.2, πρέπει πρώτα να χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και κατόπιν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3 και το Διάγραμμα 3.1. Έτσι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & (2-3a)/2 \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 + (a-2) r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & (2-3a)/2 \\ 0 & 0 & -2a+3 & (-3/2)a^2 + 2a - 1 \end{array}\right) \equiv \left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 και το Διάγραμμα 3.1, χρειάζεται να πάρουμε περιπτώσεις για να εξετάσουμε το βαθμό του πίνακα $\tilde{A}$ και του $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$

- Έστω $-2a+3 \neq 0 \Rightarrow a \neq \dfrac{3}{2}$, τότε είναι $r\left(\tilde{A}\right) = r\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = 3$, άρα το σύστημα έχει λύση με πλήθος παραμέτρων $n - r\left(\tilde{A}\right) = 3 - 3 = 0$, το οποίο σημαίνει ότι έχει μοναδική λύση, την οποία θα υπολογίσουμε με τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων. Το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ x_2 - 2x_3 &= \frac{2-3a}{2} \\ (-2a+3)\, x_3 &= -\frac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$x_3 = \frac{-\frac{3}{2}a^2 + 2a - 1}{-2a+3} = \frac{3a^2 - 4a + 2}{4a - 6}.$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$x_2 - 2x_3 = \frac{2-3a}{2} \Rightarrow x_2 - 2\frac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} = \frac{2-3a}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{5a-2}{4a-6}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $x_1 - x_2 + x_3 = a$ βρίσκουμε μετά από πράξεις

$$x_1 = \frac{a^2 + 3a - 4}{4a - 6}.$$

Συνεπώς η μοναδική λύση είναι

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+3a-4}{4a-6} & \dfrac{5a-2}{4a-6} & \dfrac{3a^2-4a+2}{4a-6} \end{pmatrix}^t .$$

- Αν ισχύει $-2a+3=0 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$, τότε $-\dfrac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ (μάλιστα για κάθε πραγματικό αριθμό a έχουμε $-\dfrac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$, μια και η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική). Οπότε για $a=\dfrac{3}{2}$, έχουμε $r\left(\tilde{A}\right)=2\neq r\left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)=3$. Συνεπώς, το σύστημα είναι αδύνατο, (βλέπε Πρόταση 3.3).

ii) Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - a r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & 1-a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & -(a-1) \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & -(a-1) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - (a+1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -(a-1) & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & -(a-1) \end{array}\right) \equiv \left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3, οι βαθμοί των πινάκων $\tilde{A}$ και $\left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ καθορίζουν την ύπαρξη (ή όχι) και το πλήθος των λύσεων του συστήματος.

- Αν $(a-1)(a+2)\neq 0 \Rightarrow a\neq 1$ και $a\neq -2$, τότε ισχύει $r\left(\tilde{A}\right)=r\left(\tilde{A}\,\middle|\,\tilde{\boldsymbol{b}}\right)=3$, άρα το σύστημα έχει λύση και μάλιστα το πλήθος παραμέτρων είναι $n-r\left(\tilde{A}\right)=3-3=0$, το οποίο δείχνει ότι η λύση είναι μοναδική (βλέπε Διάγραμμα 3.1), την οποία υπολογίζουμε με τη μέθοδο αντικατάστασης. Το σύστημα που προκύπτει από τον τελευταίο πίνακα είναι :

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ -(a-1)x_2 + (a-1)x_3 &= 0 \\ -(a-1)(a+2)x_3 &= -(a-1) \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος έχουμε $x_3 = \dfrac{1}{a+2}$, από τη δεύτερη $x_2 = x_3 = \dfrac{1}{a+2}$ και από την πρώτη μετά από αντικατάσταση των δύο προηγούμενων έχουμε $x_1 = 1 - ax_2 - x_3 = \dfrac{1}{a+2}$.

Συνεπώς, όταν $a \neq -2$ και $a \neq 1$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a+2} & \dfrac{1}{a+2} & \dfrac{1}{a+2} \end{pmatrix}^t.$$

- Αν ισχύει $a+2=0 \Rightarrow a=-2$, τότε $\left(\tilde{A} \middle| \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, από όπου έχουμε $r\left(\tilde{A}\right) = 2 \neq r\left(\tilde{A} \middle| \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = 3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3, όταν $a=-2$, το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $a-1=0 \Rightarrow a=1$, τότε $\left(\tilde{A} \middle| \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, από όπου προκύπτει $r\left(\tilde{A} \middle| \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = r\left(\tilde{A}\right) = 1$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και έχει πλήθος παραμέτρων $n - r\left(\tilde{A}\right) = 3-1 = 2$. Τη μορφή των λύσεων θα τη βρούμε από τη μοναδική εξίσωση του συστήματος που απομένει και είναι $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Συνεπώς, όταν $a=1$, οι λύσεις είναι:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t , \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$ ♦♦♦

Εφαρμογή 3.2 Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

i) έχει ακριβώς μια λύση και να βρεθεί η λύση αυτή,

ii) είναι αδύνατο,

iii) έχει άπειρες λύσεις και να δοθεί η παραμετρική οικογένεια των λύσεων αυτών.

Απόδειξη : Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $\mathrm{r}_2 \to -\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2$, $r_3 \to (-a)r_1 + r_3$ και $r_3 \to r_2 + r_3$, έχουμε

$$\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & (a+1)^2(1-a) \end{array}\right)\equiv B$$

Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.3 και το Διάγραμμα 3.1, οι απαντήσεις των ερωτημάτων σχετίζονται με τους βαθμούς των γραμμοϊσοδύναμων πινάκων του αρχικού πίνακα των συντελεστών και του επαυξημένου πίνακα του συστήματος, έτσι έχουμε:

i) Από τον πίνακα B προκύπτει ότι για να έχει ακριβώς μία λύση το σύστημα πρέπει $r\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)=r\left(A\right)=3$, το οποίο συμβαίνει όταν $a\neq-2$ και $a\neq1$. Γι΄ αυτές τις τιμές του a, η λύση υπολογίζεται με τη μέθοδο αντικατάστασης στο σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+ax_3=a^2 \\ (a-1)x_2+(1-a)x_3=a-a^2 \\ (-a^2-a+2)x_3=(a+1)^2(1-a) \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-(a+1)}{a+2} \\ x_2=\dfrac{1}{a+2} \\ x_3=\dfrac{(a+1)^2(1-a)}{-(a-1)(a+2)}=\dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{array}$$

Άρα, για $a\neq-2$ και $a\neq1$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t=\left(\frac{-(a+1)}{a+2} \quad \frac{1}{a+2} \quad \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)^t$$

ii) Για $a=-2$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\equiv B_1$, επομένως

$r\left(A\middle|\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Για $a=1$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv B_2$, συνεπώς

$r\left(A|\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=1$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, με πλήθος παραμέτρων $n-r\left(A\right)=3-1=2$, οι οποίες υπολογίζονται από τη λύση του ισοδύναμου συστήματος που σχηματίζεται από τον πίνακα B_2. Έτσι έχουμε :

$$x_1+x_2+x_3=1 \Leftrightarrow x_3=1-x_1-x_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1-x_1-x_2\end{pmatrix},\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}$$ ◆◆◆

Εφαρμογή 3.3 Για τις διάφορες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\x_1+ax_2+ax_3&=b\\x_1+a^2x_2+2ax_3&=ab\end{aligned}\ .$$

Απόδειξη : Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(A|\boldsymbol{b}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&a&a&b\\1&a^2&2a&ab\end{array}\right).$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $r_2\to(-1)r_1+r_2$, $r_3\to(-1)r_1+r_3$ και $r_3\to(-a-1)r_2+r_3$, έχουμε :

$$\left(A|\boldsymbol{b}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&a-1&a-1&b-1\\0&a^2-1&2a-1&ab-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&a-1&a-1&b-1\\0&0&a\left(2-a\right)&a-b\end{array}\right)\equiv B$$

- Από τον πίνακα B προκύπτει ότι για να έχει ακριβώς μία λύση το σύστημα πρέπει $r\left(A|\boldsymbol{b}\right)=r\left(B\right)=r\left(A\right)=3$, το οποίο συμβαίνει όταν $a\neq 0$, $a\neq 1$ και $a\neq 2$. Τότε, η λύση του αρχικού συστήματος προκύπτει από τη μέθοδο αντικατάστασης. Έτσι, η λύση του συστήματος σχηματίζεται από τον ισοδύναμο πίνακα B, δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\(a-1)x_2+(a-1)x_3&=b-1\\a(2-a)x_3&=a-b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=\frac{(a-b)(2a-a^2)}{a(a-1)(2-a)}=\frac{a-b}{a-1}\\x_2&=\frac{3ab-a^2b-a-b}{a(a-1)(2-a)}\\x_3&=\frac{a-b}{a(2-a)}\end{aligned},$$

οπότε για $a\neq 0$, $a\neq 1$ και $a\neq 2$, με $b\in\mathbb{R}$, η λύση του συστήματος είναι :

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = \begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{a-1} & \dfrac{3ab-a^2b-a-b}{a(a-1)(2-a)} & \dfrac{a-b}{a(2-a)} \end{pmatrix}^t$$

- Στην περίπτωση που $a=0$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right) \equiv B_1$.

Από τον B_1 συμπεραίνουμε ότι:

- αν $b \neq 0$, επειδή $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_1\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $b=0$, τότε $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_1\right) = r\left(A\right) = 2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, που είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1-x_3 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

- Στην περίπτωση που $a=1$, ο B πίνακας είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{array}\right) \equiv B_2$.

Από τον B_2 είναι φανερό ότι :

- αν $b \neq 1$, επειδή $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_2\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $b=1$, τότε $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_2\right) = r\left(A\right) = 2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2=1-x_1 \\ x_3=0 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

- Στην περίπτωση που $a=2$, ο B πίνακας γράφεται $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \end{array}\right) \equiv B_3$

Από τον B_3 είναι φανερό ότι :

- αν $b \neq 2$, επειδή $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_3\right) = 3 \neq r\left(A\right) = 2$, το σύστημα είναι αδύνατο,
- όταν $b=2$, τότε $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r\left(B_3\right) = r\left(A\right) = 2$, συνεπώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 1 - x_2 \end{array} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} \ .$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.4 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = \lambda \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = \lambda^2 \end{array} \ .$$

Απόδειξη : Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & \lambda \\ a^2 & b^2 & c^2 & \lambda^2 \end{array}\right).$$

Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών $r_2 \to (-a)r_1 + r_2$, $r_3 \to (-a^2)r_1 + r_3$ και $r_3 \to (-a-b)r_2 + r_3$ δίνουν

$$\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b-a & c-a & \lambda - a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 & \lambda^2 - a^2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & \lambda - a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (\lambda - a)(\lambda - b) \end{array}\right) \equiv B$$

• Από τον πίνακα B προκύπτει ότι το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση αν $r\left(A \middle| \boldsymbol{b}\right) = r(B) = r(A) = 3$, το οποίο συμβαίνει όταν $a \neq b \neq c$. Τότε το σύστημα είναι:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (b-a)x_2 + (c-a)x_3 = \lambda - a \\ (c-a)(c-b)x_3 = (\lambda - a)(\lambda - b) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{(\lambda - c)(\lambda - b)}{(a-b)(a-c)} \\ x_2 = \dfrac{(\lambda - \alpha)(\lambda - c)}{(a-b)(c-b)} \\ x_3 = \dfrac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{(c-a)(c-b)} \end{array} \ .$$

Άρα, για $a \neq b \neq c$, η λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t=\begin{pmatrix}\dfrac{(\lambda-c)(\lambda-b)}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{(\lambda-\alpha)(\lambda-c)}{(a-b)(c-b)} & \dfrac{(\lambda-a)(\lambda-b)}{(c-a)(c-b)}\end{pmatrix}^t.$$

- Όταν $a=b\neq c$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & c-a & \lambda-a\\ 0 & 0 & (c-a)^2 & (\lambda-a)^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to(-c+a)r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & c-a & \lambda-a\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)(\lambda-c)\end{array}\right)\equiv B_1.$$

Από τον πίνακα B_1 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq a$ και $\lambda\neq c$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=a$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & c-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x_1+x_2+x_3=1\\ (c-a)x_3=0\end{array}\right\}\overset{(c\neq a)}{\Rightarrow}\begin{array}{l}x_2=1-x_1\\ x_3=0\end{array}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 1-x_1\\ 0\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}$$

- αν $\lambda=c$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_1\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & c-a & c-a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x_1+x_2+x_3=1\\ (c-a)x_3=c-a\end{array}\right\}\overset{(c\neq a)}{\Rightarrow}\begin{array}{l}x_2=-x_1\\ x_3=1\end{array}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\\ 1\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}$$

- Όταν $a=c\neq b$, ο πίνακας B γίνεται $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & 0 & \lambda-a\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)(\lambda-b)\end{array}\right)\equiv B_2$.

Από τον πίνακα B_2 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq a$ και $\lambda\neq b$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=a$, τότε $r\left(A\,|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (b-a)x_2=0 \end{array}\right\} \overset{(b\neq a)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_3=1-x_1 \\ x_2=0 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1-x_1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- αν $\lambda=b$, τότε $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_2\right)=r\left(A\right)=2$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (b-a)x_2=b-a \end{array}\right\} \overset{(b\neq a)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_3=-x_1 \\ x_2=1 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ -x_1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$$

- Όταν $b=c\neq a$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a & \lambda-a \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)(\lambda-b) \end{array}\right)\equiv B_3.$$

Από τον πίνακα B_3 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda\neq a$ και $\lambda\neq b$, τότε $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=3\neq r\left(A\right)=2$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda=a$, τότε $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=r\left(A\right)=2$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (b-a)(x_2+x_3)=0 \end{array}\right\} \overset{(b\neq a)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_3=-x_2 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix},\ x_2\in\mathbb{R}$$

- αν $\lambda=b$, τότε $r\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=r\left(B_3\right)=r\left(A\right)=2$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, από τον οποίο έχουμε :

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ (b-a)(x_2+x_3)=b-a \end{array}\right\} \overset{(b\neq a)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_3=1-x_2 \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 1-x_2 \end{pmatrix},\ x_2\in\mathbb{R}$$

- Όταν $a=b=c$, ο πίνακας B γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to (-\lambda+a)r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv B_4 .$$

Από τον πίνακα B_4 είναι φανερό ότι :

- αν $\lambda \neq a$, τότε $r(A|\boldsymbol{b}) = r(B_4) = 2 \neq r(A) = 1$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο,
- αν $\lambda = a$, τότε $r(A|\boldsymbol{b}) = r(B_4) = r(A) = 1$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - x_1 - x_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

◆◆◆

Εφαρμογή 3.5 Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι όταν αυτοί υπάρχουν. Στη συνέχεια να λυθεί το σύστημα $C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη : Θα εφαρμόσουμε τον Αλγόριθμο 3.2, ο οποίος υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα, έτσι έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a-6 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv (K|B).$$

- Αν $a = 6$, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5 και τον Αλγόριθμο 3.2, αφού $K \neq I$.
- Έστω ότι $a \neq 6$. Τότε μπορούμε να συνεχίσουμε τις γραμμοπράξεις στον $(K|B)$ και έχουμε :

$$(K|B) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{a-6} r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/(a-6) & 1/(a-6) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a/(a-6) & -2/(a-6) \\ 0 & 1 & -3/(a-6) & 1/(a-6) \end{array}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6} \\ \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6} \end{pmatrix}.$$

Για τον C έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{-6} r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 9r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \equiv \left(I \mid C^{-1}\right).$$

Άρα ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι $C^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2 & \dfrac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} & 0 & -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}.$

Για να λύσουμε το σύστημα $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ μπορούμε φυσικά να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Ένας άλλος τρόπος είναι να αξιοποιήσουμε την πληροφορία ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και να εφαρμόσουμε τη σχέση (2.8) της μεθόδου Cramer (βλέπε Πρόταση 2.5). Οπότε έχουμε

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1}C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει ότι η λύση $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$ του συστήματος είναι :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

◆◆◆