ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - Ορίζουσες

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις (μεταβλητή x)

i) $\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & x \\ 4 & x & 2 \\ x & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$ ii) $\det\begin{pmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{pmatrix} = 0$.

2. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες

i) $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & a & a & 0 \end{pmatrix} = -3a^2$,

ii) $\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & 1 & x & x^2 \\ p & b & 1 & x \\ q & r & c & 1 \end{pmatrix} = (1-ax)(1-bx)(1-cx)$.

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\det A_4 = 3\cdot(-1)^3$, όπου

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας επαγωγή, να αποδείξετε ότι για τον $n\times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει $\det A_n = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)$.

4. Έστω ένας $n \times n$ τριδιαγώνιος[1] πίνακας

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & & & \mathbb{O} \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ \mathbb{O} & & & c & a \end{pmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι $\det(A_n) = a\det(A_{n-1}) - bc\det(A_{n-2})$, για κάθε $n \geq 3$.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές της σταθεράς $c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι επόμενοι πίνακες να είναι αντιστρέψιμοι

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ -1 & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{c} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 6 & -7 \\ c & 1 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι πίνακες των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Αν $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ με $\det A = -1$, $\det B = 2$ και $\det C = 3$ να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων :

   i) AB^2 ii) $(A^{-1})^t B$ iii) $(2B^{-1})^3 A^t$ iv) $2A^3BC^tB^{-1}$

   v) $B^2C^{-1}AB^{-1}C^t$ vi) $-3A^2B^t$

8. Αν για τους $n \times n$ πίνακες A, B ισχύει $AB^4 + 5I = -A$, να αποδείξετε ότι ο A αντιστρέφεται και να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων του B.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 4 \\ 3x - y + 13z &= 2 \\ 4x + y + k^2 z &= k + 3 \end{aligned}$$

να έχει μοναδική λύση, η οποία να υπολογισθεί.

[1] Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ ονομάζεται **τριδιαγώνιος**, όταν $a_{ii} = a$ για $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,\,i+1} = b$, $a_{i+1,\,i} = c$, για $i = 1, \ldots, n-1$ και όλα τα άλλα στοιχεία είναι ίσα με 0.

10. Αν

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(2I-A\right)X=I+A.$$

11. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\det\left(A^{-1}\right)=\left(\det A\right)^{-1}$.

ii) Αν για τον αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει $A^{-1}=A^t$, ο πίνακας A ονομάζεται **ορθογώνιος**. Να υπολογίσετε την ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα.

iii) Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα A ισχύουν $A\neq I$ και $A^2=I$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $I+A$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

iv) Υπολογίστε την $\det A$ αν :

a) $A^2=A$, b) $A^2=I$, c) $A^3=A$,

d) $A^2+I_n=\mathbb{O}$, e) $A^t=-A$.

v) Να αποδείξετε ότι για τους τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει

$$\det\left(A+B^t\right)=\det\left(A^t+B\right).$$

vi) Να αποδείξετε ότι $\det\begin{pmatrix} \mathbb{O} & I_p \\ I_q & \mathbb{O} \end{pmatrix}=\left(-1\right)^{pq}$, για κάθε $p,q\geq 1$.

vii) Να αποδείξετε ότι $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \ldots & * & * \\ a_n & * & \ldots & * & * \end{pmatrix}=\left(-1\right)^k a_1a_2\cdots a_n$,

όπου $n=2k$ ή $n=2k+1$, με $*$ σημειώνεται οποιοδήποτε στοιχείο, (ο πίνακας έχει αριστερά και πάνω από την αντιδιαγώνιο μηδέν και τα υπόλοιπα οποιαδήποτε αυθαίρετα στοιχεία).