Κεφάλαιο 2

Ο Ρ Ι Ζ Ο Υ Σ Ε Σ

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα μπορούμε ν΄ αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό, την ορίζουσά του. Η ορίζουσα υπάρχει ανεξάρτητα από την αντιστρεψιμότητα του πίνακα. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών, που βρίσκουν εφαρμογή στη θεωρία των χαρακτηριστικών μεγεθών, και δίνουν απάντηση στα ερωτήματα που αφορούν την ύπαρξη και τον υπολογισμό αντίστροφου πίνακα. Οι ορίζουσες δίνουν μια μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, (μέθοδος Cramer).

2.1 Έννοια και Ιδιότητες Ορίζουσας

Όταν λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που είναι της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

μερικές φορές χρησιμοποιούμε την ποσότητα $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ για την επίλυση του παραπάνω συστήματος. Και μάλιστα αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία είναι $x = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}$, $y = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D}$. Τον αριθμό $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ τον ονομάζουμε **ορίζουσα** του πίνακα των συντελεστών του συστήματος $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι μεταξύ ενός τετραγωνικού πίνακα A και του συνόλου των αριθμών (είτε πραγματικών, είτε μιγαδικών) υπάρχει μια αντιστοιχία-απεικόνιση, η οποία ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες και την απεικόνιση αυτή ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα.

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ με $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, όπου $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$ σημειώνεται η γραμμή του πίνακα A.

Ορισμός 2.1 (ορίζουσας)

Ορίζουσα (determinant) *είναι μια απεικόνιση* $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F} : A \to \det A$, *η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

a. *Αν* $A_i = \lambda X + \mu Y$, *τότε* $\det A = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ X \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ Y \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$.

b. *Αν δύο γραμμές του* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ταυτίζονται, τότε* $\det A = 0$.

c. $\det I_n = 1$.

Η ορίζουσα του $A \in M_n(\mathbb{F})$ συμβολίζεται $|A|$, κυρίως σε περιπτώσεις όπου είναι γνωστά τα στοιχεία του πίνακα A, οπότε γράφουμε $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, ή $\det(A)$.

Για παράδειγμα, $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & z & w \\ 4a & 4b & 4c \end{pmatrix} = 4\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & z & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0$, επειδή χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό 2.1a. $\lambda = 4$, $\mu = 0$ και καταλήξαμε να έχουμε την πρώτη και τρίτη γραμμή ίδιες, οπότε ισχύει το b του ορισμού 2.1.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα υπάρχει πάντα μια τέτοια απεικόνιση, η οποία είναι μοναδική και ισούται

$$\det A = g_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \tag{2.1}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$, όπου A_{ij} είναι $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A αν διαγράψουμε τα στοιχεία της i-γραμμής και της j-στήλης του. Το άθροισμα που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της (2.1) ονομάζεται ***ανάπτυγμα ορίζουσας*** ως προς την j-στήλη του πίνακα A, και είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως *ανάπτυγμα κατά Laplace* ως προς την j-στήλη του πίνακα A, η δε $\det(A_{ij})$ που παρουσιάζεται στο άθροισμα ονομάζεται ***ελάσσονα ορίζουσα*** του πίνακα A. Επισημαίνουμε ότι εξαιτίας της μοναδικότητας της απεικόνισης από την οποία προκύπτει η (2.1), το ανάπτυγμα είναι ανεξάρτητο από τη στήλη ως προς την οποία έγινε η ανάπτυξη.

Ορισμός 2.2 (αλγεβρικό συμπλήρωμα πίνακα)

Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)$ *ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του Α και θα συμβολίζεται με* c_{ij}.

Έτσι τα αλγεβρικά συμπληρώματα ενός 2×2 πίνακα $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ είναι

$$A_{11}=\left(a_{22}\right), \quad \left\{ \text{επειδή } A_{11}=\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{11}=\left(-1\right)^{1+1}\det\left(A_{11}\right)=a_{22}$$

$$A_{12}=\left(a_{21}\right), \quad \left\{ \text{επειδή } A_{12}=\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{12}=\left(-1\right)^{1+2}\det\left(A_{12}\right)=-a_{21}$$

$$A_{21}=\left(a_{22}\right), \quad \left\{ \text{επειδή } A_{21}=\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\det\left(A_{21}\right)=-a_{12}$$

$$A_{22}=\left(a_{11}\right), \quad \left\{ \text{επειδή } A_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\det\left(A_{22}\right)=a_{11},$$

και τα αλγεβρικά συμπληρώματα c_{11}, c_{21} του πίνακα $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ είναι :

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left\{ \text{επειδή } A_{11}=\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{11}=\left(-1\right)^{1+1}\det\left(A_{11}\right)$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left\{ \text{επειδή } A_{21}=\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\det\left(A_{21}\right).$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ με την εφαρμογή του αναπτύγματος της (2.1) ως προς την πρώτη στήλη έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,, \qquad (*)$$

το γνωστό μας τύπο που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό αυτής της ορίζουσας, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή.

Επίσης με τον (2.1) υπολογίζουμε την $\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ως προς την πρώτη στήλη και έχουμε

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}) \\
&= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}, \qquad (2.2)$$

που το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο αν κάνουμε την ανάπτυξη ως προς τη δεύτερη ή την τρίτη στήλη (επαληθεύστε το).

Το κριτήριο που μας υποδεικνύει ποια είναι η κατάλληλη στήλη για την ανάπτυξη είναι να έχουμε λιγότερες ελάσσονες ορίζουσες για υπολογισμό, έτσι η ενδεδειγμένη στήλη είναι αυτή που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία, (αν υπάρχουν).

Για παράδειγμα, στην $\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, ο υπολογισμός της είναι συντομότερος αν γίνει ανάπτυξη ως προς την τρίτη στήλη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\left(4\cdot 5 - (-1)\cdot 1\right) + (-2)\left\{(-2)(-1) - 3\cdot 4\right\} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Η ορίζουσα ειδικών μορφών πινάκων, όπως είναι οι τριγωνικοί πίνακες, υπολογίζεται εύκολα από τον τύπο (2.1). Πράγματι, η ανάπτυξη της ορίζουσας πραγματοποιείται ως προς την πρώτη στήλη, οπότε μένει για υπολογισμό η ελάσσονα ορίζουσα του

$(n-1)\times(n-1)$ τριγωνικού πίνακα, που και αυτήν την ορίζουσα την αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη στήλη και συνεχίζοντας για $n-1$ φορές την ίδια διαδικασία τελικά βρίσκουμε την ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα όπως φαίνεται και από το επόμενο παράδειγμα (άνω τριγωνικού πίνακα) και διατυπώνεται ο γενικός τύπος στην επόμενη εφαρμογή.

Ο άνω τριγωνικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{21} & a_{2n} \\ & & a_{33} & \vdots \\ & \mathbb{O} & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ έχει ορίζουσα,

$$\det A = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \det\begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Εφαρμογή 2.1 (ορίζουσα τριγωνικού πίνακα)

- *Για κάθε (άνω ή κάτω) τριγωνικό πίνακα* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύει*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

όπου a_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ *είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.*

- *Η ορίζουσα διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.*

Όπως είναι φανερό, ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα γίνεται με διαδοχικό υποβιβασμό σε ορίζουσες υποπινάκων οι οποίες είναι κατά ένα μέγεθος μικρότερο από την ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα, έως ότου καταλήξουμε να έχουμε ορίζουσες υποπινάκων οι οποίοι είναι τύπου 2×2, και τότε χρησιμοποιούμε για κάθε μία από αυτές τον γνωστό μας τύπο υπολογισμού (*). Η διαδικασία είναι ιδιαίτερα κοπιαστική, γι΄ αυτό χρησιμοποιούμε ιδιότητες, ώστε ο πίνακας να έχει όσο το δυνατόν πιο απλή μορφή.

Άμεσα από τον ορισμό 2.1 προκύπτουν οι ιδιότητες :

Πρόταση 2.2 (ιδιότητες ορίζουσας)

Για κάθε πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύουν :*

i) *Αν ο πίνακας* A *έχει μηδενική γραμμή, τότε* $\det A = 0$.

ii) *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε* $\det A = 0$.

iii) $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$.

iv) *Αν* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_r \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ k_1B_1 + k_2B_2 + \cdots + k_qB_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$, *δηλαδή* $A_r = \sum_{p=1}^{q} k_p B_p$, τότε

$$\det A = \sum_{p=1}^{q} k_p \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ B_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

v) *Αν* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$ *και* $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$, *τότε* $\det A = -\det \hat{A}$, *δηλαδή, αν ένας πίνακας* $\hat{A}$ *προκύπτει από τον* A *με εναλλαγή δύο γραμμών του* A, *τότε οι ορίζουσες των πινάκων είναι αντίθετες.*

vi) *Αν* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$ *και* $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p + \mu A_q \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$ *με* $p \neq q$, $\mu \in \mathbb{F}$, τότε $\det A = \det \hat{A}$.

Δηλαδή *στα στοιχεία μιας γραμμής ενός πίνακα* A, *αν προσθέσουμε το πολλαπλάσιο των στοιχείων μιας άλλης διαφορετικής γραμμής, προκύπτει ένας νέος πίνακας* $\hat{A}$, *τότε οι ορίζουσες των πινάκων είναι ίσες.*

Απόδειξη[(*)] i) Στον ορισμό 2.1a, αν θέσουμε $\lambda = \mu = 0$ μηδενίζεται η A_i γραμμή και το συμπέρασμα είναι άμεσο.

ii) Στον ορισμό 2.1a, για $\mu = 0$ και $X = A_p$ με $p \neq i$ έχουμε $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ \lambda A_p \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \hat{A}$.

Οι πίνακες $A, \hat{A}$ έχουν γραμμές ανάλογες, οπότε συνδυάζοντας τον ορισμό 2.1a, b

έχουμε $\det A = \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ 2.1b}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$.

iii) Στον ορισμό 2.1a θέτουμε $\mu = 0$ και από πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_1 \\ \cdots \\ \lambda A_r \\ \cdots \\ \lambda A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ.2.1a}}{\Rightarrow} \det(\lambda A) = \underbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \dots \cdot \lambda}_{\text{n}-\text{φορές}} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_r \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det A.$$

iv) Η σχέση προκύπτει εύκολα από τον ορισμό 2.1a με επαγωγή.

v) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.1a, b έχουμε

$$\det A + \det \hat{A} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1b}}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{ορ. 2.1a}}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q + A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_p + A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1a}}{=} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p + A_q \\ \cdots \\ A_q + A_p \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1b}}{=} 0,$$

συνεπώς $\det A = -\det \hat{A}$.

vi) Στον ορισμό 2.1a, αν θέσουμε $\lambda = 1$ και $X = A_p$, $Y = A_q$ με $p \neq q$, προκύπτει

$$\det \hat{A} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p+\mu A_q \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1a}}{=} \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1b}}{=} \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_p \\ \cdots \\ A_q \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det A,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ◆◆◆

Για παράδειγμα, η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ υπολογίζεται γρήγορα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2v, επειδή προσθέτοντας τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη δημιουργείται κοινός παράγοντας οπότε υπάρχουν γραμμές ανάλογες (Πρόταση 2.2ii), δηλαδή,

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & b+c+a & c+a+b \end{pmatrix} = 0.$$

Για να παρουσιάσουμε τις αποδείξεις επιπρόσθετων ιδιοτήτων θα χρειασθεί να γνωρίζουμε ορισμένα στοιχεία Συνδυαστικής για τις μεταθέσεις, τα οποία παρουσιάζουμε στα επόμενα[1].

Έστω το υποσύνολο των φυσικών αριθμών $S_n = \{1,2,\dots,n\}$.

Κάθε $\sigma : S_n \to S_n : z \to \sigma(z) \equiv \sigma_z$ αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου αυτού στον εαυτό του λέγεται ***μετάθεση*** των φυσικών αριθμών και συμβολίζεται $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ή $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ ή $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Για παράδειγμα, όταν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, είναι $\sigma(1)=\sigma_1=3$, $\sigma(2)=\sigma_2=2$, $\sigma(3)=\sigma_3=4$, $\sigma(4)=\sigma_4=1$, οπότε αυτή σημειώνεται και $\sigma=(3,2,4,1)$. Αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$, η ***αντίστροφη μετάθεση*** είναι $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Οι δυνατές μεταθέσεις του S_n είναι $n!$, για παράδειγμα για το S_3 έχουμε τις εξής $3!=6$

[1] Τα στοιχεία Συνδυαστικής μελετώνται μόνο αν χρειάζονται σε επόμενες αποδείξεις.

μεταθέσεις, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$ και $(3,1,2)$, το σύνολο των μεταθέσεων του S_n, θα το συμβολίζουμε με S.

Έστω η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$, το ***πρόσημο*** της μετάθεσης, συμβολίζεται $\varepsilon(\sigma)$, ορίζεται να είναι :

- $\varepsilon(\sigma) = 1$, αν υπάρχει άρτιο πλήθος (i, j), τέτοιων ώστε $i < j$ και $\sigma_i > \sigma_j$.
- $\varepsilon(\sigma) = -1$, αν υπάρχει περιττό πλήθος (i, j), τέτοιων ώστε $i < j$ και $\sigma_i > \sigma_j$.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma = (2,3,5,1,4)$ έχει $\varepsilon(\sigma) = 1$, αφού υπάρχει άρτιο πλήθος ζευγαριών $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(3,5)$ που ισχύει $\sigma_i > \sigma_j$, ενώ η μετάθεση $(2,1,5,3,4)$ έχει $\varepsilon(\sigma) = -1$, αφού υπάρχουν τρία ζευγάρια $(1,2)$, $(3,4)$, $(3,5)$ για τα οποία ισχύει $\sigma_i > \sigma_j$.

Συμβολίζοντας με e_i την $i-$ γραμμή του μοναδιαίου πίνακα I_n, δηλαδή $e_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underset{i-\text{θέση}}{\underset{\uparrow}{1}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, τότε κάθε γραμμή A_i, για $i = 1, 2, \dots, n$, του πίνακα A γράφεται $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$.

Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μεταθέσεων στις ορίζουσες και τον προηγούμενο συμβολισμό από τον ορισμό 2.1a, έχουμε

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2} \\ \dots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n} \end{pmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1a}}{=} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2} \\ \dots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \dots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n} \end{pmatrix} = \dots = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \dots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Από την Πρόταση 2.2(v) είναι φανερό ότι από μια μετάθεση των γραμμών του πίνακα

A προκύπτει ένας νέος πίνακας $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{\sigma_1} \\ A_{\sigma_2} \\ \cdots \\ A_{\sigma_n} \end{pmatrix}$ και ισχύει $\det \hat{A} = \varepsilon(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \det A$,

συνεπώς εδώ έχουμε

$$\det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \cdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = \varepsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n) \det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_n \end{pmatrix} = \varepsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n) \det I_n \overset{\text{ορ. 2.1c}}{=} \varepsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

Αν αντικαταστήσουμε την τελευταία σχέση στην (2.3) προκύπτει

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in S} \varepsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}, \tag{2.4}$$

όπου $\varepsilon(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ είναι το πρόσημο όλων των δυνατών μεταθέσεων των δεικτών των στηλών του πίνακα A.

Η σχέση (2.4) αποτελεί συχνά τον κλασικό ορισμό της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα, και με βάση αυτή αποδεικνύονται όλες οι ιδιότητες αρκετά πιο δύσκολα.

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του $A \in M_3(\mathbb{F})$ από την (2.4) έχουμε

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S} \varepsilon(j_1, j_2, j_3) a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= \varepsilon(1,2,3) a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon(1,3,2) a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon(2,1,3) a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon(2,3,1) a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\qquad + \varepsilon(3,1,2) a_{13}a_{21}a_{32} + \varepsilon(3,2,1) a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

το οποίο ταυτίζεται με το δεύτερο μέλος της σχέσης (2.2).

Για την απόδειξη των δύο επόμενων ιδιοτήτων θα χρησιμοποιήσουμε την (2.4).

Πρόταση 2.3 (ιδιότητες ορίζουσας)

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύουν :*

i) $\det(A^t) = \det A$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$ *και* $\det(A^*) = \overline{\det A}$.

ii) *Αν* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, *τότε* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

iii) $\det(A^k) = (\det A)^k$.

Απόδειξη[(*)] i) Αν $A=\left(a_{ij}\right)$, τότε $A^t=\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ji}\right)$, οπότε χρησιμοποιώντας την (2.4) έχουμε

$$\begin{aligned}\det\left(A^t\right)&=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{nj_n}\\&=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)a_{j_11}a_{j_22}\ldots a_{j_nn}\end{aligned}\qquad(*)$$

Αν μεταθέσουμε τους παράγοντες του τυχαίου όρου του αθροίσματος (*), έτσι ώστε οι δείκτες $j_1,j_2,\ldots,j_n$ να πάρουν τη φυσική τους διάταξη, τότε ο όρος θα γίνει $\varepsilon\left(j_1',j_2',\ldots,j_n'\right)a_{1j_1'}a_{2j_2'}\ldots a_{nj_n'}$, όπου $\left(j_1',j_2',\ldots,j_n'\right)=\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)^{-1}$ είναι η αντίστροφη μετάθεση της $\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)$. Είναι γνωστό ότι

$$\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)=\varepsilon\left(\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)^{-1}\right)=\varepsilon\left(j_1',j_2',\ldots,j_n'\right),$$

επομένως η (*) γράφεται

$$\det\left(A^t\right)=\sum_{(j_1',j_2',\ldots,j_n')\in S}\varepsilon\left(j_1',j_2',\ldots,j_n'\right)a_{1j_1'}a_{2j_2'}\ldots a_{nj_n'}=\det A.$$

Επειδή η ορίζουσα είναι αριθμός η συζυγία επηρεάζει μόνο τα στοιχεία του πίνακα στην (2.4), έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\det A}&=\overline{\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}}\\&=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)\overline{a}_{1j_1}\overline{a}_{2j_2}\ldots\overline{a}_{nj_n}=\det\left(\overline{A}\right)=\det\left(\overline{A}\right)^t=\det\left(A^*\right).\end{aligned}$$

ii) Έστω $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\cdots\\A_n\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\cdots\\B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 & \ldots & \tilde{B}_n\end{pmatrix}$, όπου A_i,B_i σημειώνονται οι i-γραμμές των πινάκων A,B αντίστοιχα και $\tilde{B}_i$ οι i-στήλες του B πίνακα. Η i-γραμμή του AB πίνακα γράφεται

$$\begin{aligned}A_iB&=\begin{pmatrix}A_i\tilde{B}_1 & A_i\tilde{B}_2 & \cdots & A_i\tilde{B}_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1} & a_{i1}b_{12}+\cdots+a_{in}b_{n2} & \cdots & a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\cdots+a_{in}b_{nn}\end{pmatrix}\\&=a_{i1}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\end{pmatrix}+a_{i2}\begin{pmatrix}b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\end{pmatrix}+\cdots+a_{in}\begin{pmatrix}b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix}\\&=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{in}B_n\\&=\sum_{j=1}^n a_{ij}B_j.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\det\left(AB\right)=\det\begin{pmatrix}\sum\limits_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}B_{j_1}\\ \sum\limits_{j_2=1}^{n}a_{2j_2}B_{j_2}\\ \cdots\\ \sum\limits_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}B_{j_n}\end{pmatrix}\overset{\text{ορ.2.1a}}{=}\sum\limits_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{n}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\det\begin{pmatrix}B_{j_1}\\ B_{j_2}\\ \cdots\\ B_{j_n}\end{pmatrix}$

$$=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)\det\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \cdots\\ B_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S}\varepsilon\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\det B\overset{(2.4)}{=}\det B\cdot\det A,$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

iii) Η απόδειξη είναι άμεση, όταν εφαρμόσουμε την προηγούμενη σχέση για τον ίδιο πίνακα A $k-$φορές. ◆◆◆

Από την Πρόταση 2.3i άμεσα συμπεραίνουμε την ιδιότητα.

Εφαρμογή 2.4 (ιδιότητες - ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς γραμμές ή στήλες)

Για κάθε πίνακα $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ οι προτάσεις και οι τύποι που αναφέρονται στις γραμμές της ορίζουσάς του, ισχύουν και για τις στήλες του πίνακα.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αναφέρονται στην Πρόταση 2.2 μπορούμε να υπολογίζουμε ορίζουσες χωρίς τη χρήση των τύπων (2.1) και (2.4), οι οποίοι είναι ιδιαίτερα κοπιαστικοί όταν $n\geq 3$, καθώς αναφέρθηκε και στα σχόλια που προηγήθηκαν της Πρότασης 2.2.

Παράδειγμα 2.5 Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ θα υπολογίσουμε την ορίζουσα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2 και 2.3 (με τους συμβολισμούς των στοιχειωδών μετασχηματισμών, που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 1).

$$|A| \underset{\text{Πρ. }2.2\text{v}}{\overset{r_3\leftrightarrow r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & -7 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{Πρ. }2.3i}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 + (-4)r_1 \\ r_3 \to r_3 + (-2)r_1 \\ r_4 \to r_4 + 2r_1 \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 \to r_3 + (-1)r_2 \\ r_4 \to r_4 + r_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} \overset{\text{ορ. }2.1\text{a}}{=} -(-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$r_4 \to r_4 + (-3)r_3 = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

. Η τελευταία ορίζουσα είναι άνω τριγωνικού πίνακα, οπότε σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.1 έχουμε $\det A = 2\cdot 1\cdot(-3)\cdot 1\cdot 8 = -48$.

2.2 Ύπαρξη και υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Ορισμός 2.3 (προσαρτημένος πίνακας)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Ο* ***προσαρτημένος πίνακας***, $adjA$, *του* A *είναι ο* $n \times n$ *πίνακας που στη θέση* (i, j) *έχει το αλγεβρικό συμπλήρωμα* $c_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ *του* A, *δηλαδή είναι*

$$adjA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & & c_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, τότε

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \text{επειδή } A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & -\cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2 & 3 \\ -\cancel{1} & 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = -7$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \text{επειδή } A_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & -\cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{2} & 3 \\ -1 & \cancel{1} & -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\det(A_{12}) = -3$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \text{επειδή } A_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & -\cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & \cancel{3} \\ -1 & 1 & -\cancel{2} \end{pmatrix} \right\}, \quad c_{13} = (-1)^{1+3}\det(A_{13}) = 2$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad c_{21} = -2, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad c_{22} = -2, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{23} = 0$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_{31} = -3, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_{32} = -3, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_{33} = 2.$$

Οπότε έχουμε από τον ορισμό 2.3, $adjA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Πρόταση 2.6 (σχέση προσαρτημένου πίνακα και αρχικού)

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύουν :

i) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{qk} \det(A_{pk}) = 0$ για κάθε $q \neq p$.

ii) $A \cdot adjA = adjA \cdot A = (\det A) \cdot I_n$.

.

Απόδειξη(*) i) Αν θεωρήσουμε $\hat{A}$ τον πίνακα που προκύπτει με την αντικατάσταση της p-γραμμής του πίνακα A από την q, όταν $q \neq p$, προφανώς ο $\hat{A}$ έχει δύο γραμμές ίσες, οπότε από ορισμό 2.1b $\det \hat{A} = 0$. Επιπλέον αναπτύσσοντας την ορίζουσα του $\hat{A}$ ως προς την p-γραμμή έχουμε

$$\det \hat{A} = a_{q1}c_{p1} + a_{q2}c_{p2} + \cdots + a_{qn}c_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{qk}c_{pk} \overset{\text{ορ. } 2.2}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{qk} \det(A_{pk}),$$

συνεπώς $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{qk} \det(A_{pk}) = 0$.

ii) Έστω $A = (a_{ij})$ και $A \cdot adjA = (\gamma_{ij})$. Τα διαγώνια στοιχεία γ_{ii}, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι

$$\gamma_{ii} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \overset{\text{ορ. } 2.2}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \overset{(2.1)}{=} \det A.$$

Ένα στοιχείο εκτός κυρίας διαγωνίου γ_{ij}, με $i \neq j$, είναι

$$\gamma_{ij} = a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \cdots + a_{in}c_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{jk} \overset{\text{ορ. } 2.2}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det(A_{jk}) \overset{(\text{i})}{=} 0.$$

Συνεπώς έχουμε

$$A \cdot adjA = \begin{pmatrix} \det A & & & \mathbb{O} \\ & \det A & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \det A \end{pmatrix} = diag(\det A, \ \det A, \ \ldots \ , \det A) = \det A \cdot I_n.$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι $adjA \cdot A = (\det A) \cdot I$. ◆◆◆

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί για τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η ορίζουσα του πίνακα για να υπάρχει ο αντίστροφός του και σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση δίνει μια μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα.

Πρόταση 2.7 (κριτήριο ύπαρξης αντίστροφου πίνακα)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $\det A \neq 0$.

Αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του A, *τότε* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adjA$.

.

Απόδειξη Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μοναδικός αντίστροφος πίνακας A^{-1}, για τον οποίο ισχύει η σχέση (1.1), όπου εφαρμόζοντας ορίζουσες έχουμε,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(AA^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}A\right) = \det I \underset{\text{ορ. 2.1c}}{\overset{\text{Πρ. 2.3ii}}{\Leftrightarrow}} \det A \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 1,$$

συνεπώς $\det\left(A^{-1}\right) \neq 0$ και $\det A \neq 0$. Εξαιτίας $\det A \neq 0$ η σχέση (ii) της Πρότασης 2.6 μπορεί να γραφεί

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} adjA\right) = \left(\frac{1}{\det A} adjA\right) \cdot A = I_n,$$

άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA. \tag{2.5}$$

Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε $\det A \neq 0$, προφανώς ισχύει

$$AA^{-1} = A\left(\frac{1}{\det A} adjA\right) = \frac{1}{\det A} A \cdot adjA \overset{\text{Πρ.2.6ii}}{=} \frac{1}{\cancel{\det A}} \cancel{\det A} \cdot I = I,$$

όμοια και $A^{-1}A = I$, από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. ◆◆◆

Πράγματι, η τελευταία πρόταση δίνει το κριτήριο ύπαρξης και έναν τρόπο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα, το οποίο εφαρμόζουμε όταν ο πίνακας A είναι μικρού μεγέθους, άρα εύκολα υπολογίζονται οι ορίζουσες κατά συνέπεια ο προσαρτημένος πίνακας του A.

Στο Παράδειγμα 1.7, για να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **δεν** είναι

αντιστρέψιμος, χρειάστηκαν αρκετοί υπολογισμοί, εφαρμόζοντας όμως το κριτήριο της Πρότασης 2.7 έχουμε $\det A \overset{\text{ορ. 2.1a}}{=} 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{ορ. 2.1b}}{=} 0$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεσο.

Παράδειγμα 2.8 Να υπολογισθεί ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}, (αν υπάρχει), όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} υπάρχει γιατί

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 29 \neq 0.$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα

$$adjA = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

άρα από τον τύπο της (2.5) έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Πρόταση 2.8 (μέθοδος Cramer)

Αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος πίνακας, η* ***μοναδική λύση*** *του γραμμικού συστήματος*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

των n *εξισώσεων με* n *αγνώστους* $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2 \dots x_n)^t$ *δίνεται για κάθε άγνωστο*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A},$$

όπου $k = 1, 2, \dots, n$ *, και* A_k *είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον* A *αν αντικατασταθεί η* $k-$*στήλη με την* $\boldsymbol{b}$.

Απόδειξη Αρχικά παρατηρούμε ότι ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος υπάρχει ο αντίστροφός του πίνακας A^{-1} και σε αυτή την περίπτωση η λύση του συστήματος είναι μοναδική, εξαιτίας της μοναδικότητας του αντίστροφου πίνακα, η δε λύση είναι

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad (2.6)$$

Στην τελευταία σχέση αν αντικαταστήσουμε τον αντίστροφο πίνακα από την Πρόταση 2.6 και τον προσαρτημένο πίνακα από τον ορισμό 2.3 και κάνουμε πράξεις καταλήγουμε

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A} adjA \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & & c_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \dots + c_{n1}b_n \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \dots + c_{n2}b_n \\ \vdots \\ c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \dots + c_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Επομένως ο κάθε άγνωστος του συστήματος $k = 1, 2, \dots, n$ είναι

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\det A}\left(c_{1k}b_1 + c_{2k}b_2 + \dots + c_{nk}b_n\right) \\ &= \frac{1}{\det A}\left((-1)^{k+1}\det(A_{1k}) \cdot b_1 + (-1)^{k+2}\det(A_{2k}) \cdot b_2 + \dots + (-1)^{k+n}\det(A_{nk}) \cdot b_n\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Επίσης αν αντικαταστήσουμε την k – στήλη του A με τη στήλη των σταθερών όρων $\boldsymbol{b}$ και το νέο πίνακα το συμβολίσουμε A_k, παίρνοντας το ανάπτυγμα Laplace ως προς την k – στήλη από τον (2.1) έχουμε

$$\det A_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i \det(A_{ik}) = (-1)^{k+1} b_1 \cdot \det(A_{1k}) + (-1)^{k+2} b_2 \cdot \det(A_{2k}) + \cdots + (-1)^{k+n} b_n \cdot \det(A_{nk})$$

Το τελευταίο ανάπτυγμα είναι ακριβώς αυτό της (*), συνεπώς $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$. ◆◆◆

Παράδειγμα 2.9 Να υπολογισθούν οι τιμές τις παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 + \ \ x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση και στη συνέχεια για αυτές τις τιμές τις παραμέτρου να υπολογισθεί η λύση του συστήματος.

Γράφοντας το σύστημα σε μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.8, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όμως υπολογίζοντας την ορίζουσα με ανάπτυξη ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$\det A = \det \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = k \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2k - (-8) + (-7) = 2k + 1.$$

Άρα για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος πρέπει

$$\det A \neq 0 \ \Leftrightarrow \ 2k + 1 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ k \neq -\frac{1}{2}.$$

Για τη λύση του συστήματος χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ορίζουσες

$$\det A_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2-16+11=-3 \qquad ,$$

$$\det A_2 = \det\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4k-(-8)+(-12)=-4k-4,$$

$$\det A_3 = \det\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11k-(-12)+(-7)=-11k+5.$$

Άρα για $k \neq -\dfrac{1}{2}$, η μοναδική λύση $\boldsymbol{x} = \left(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\right)^t$ είναι

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{2k+1}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-4k-4}{2k+1} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-11k+5}{2k+1}.$$

Σχόλια : Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που $\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, δηλαδή το σύστημα είναι της μορφής $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, επειδή $\det A_k = 0$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική.

2.3 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 2.10 Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων :

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 2b & 2c\\ 1 & b-a-c & 2c\\ 1 & 2b & c-a-b\end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}$ iii) $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$

iv) $\Delta=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{pmatrix}$ v) $E=\begin{pmatrix}1+a & b & c & d\\ 1 & 1+b & c & d\\ 1 & b & 1+c & d\\ 1 & b & c & 1+d\end{pmatrix}$

vi) $Z=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}$

Απόδειξη i) Αφαιρώντας τα στοιχεία της πρώτης γραμμής από τις επόμενες δύο γραμμές (με τους συμβολισμούς των στοιχειωδών μετασχηματισμών είναι $r_2 \to r_2 - r_1$ και $r_3 \to r_3 - r_1$) προκύπτει άνω τριγωνικός πίνακας, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.2 και την Εφαρμογή 2.1 έχουμε :

$$\det A = \det\begin{pmatrix}1 & 2b & 2c\\ 1 & b-a-c & 2c\\ 1 & 2b & c-a-b\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2b & 2c\\ 0 & -b-a-c & 0\\ 0 & 0 & -c-a-b\end{pmatrix}$$

$$=1\cdot(-b-a-c)\cdot(-c-a-b)=(a+b+c)^2.$$

ii) Προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή, τη δεύτερη $r_1 \to r_1 + r_2$ και στη συνέχει στην πρώτη την τρίτη $r_1 \to r_1 + r_3$, δημιουργείται κοινός παράγοντας ανάμεσα στα στοιχεία αυτής της γραμμής, δηλαδή

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a+b+c & b+c+a & c+a+b\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix} = (a+b+c)\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}.$$

Στην τελευταία ορίζουσα, αφαιρώντας την πρώτη στήλη, από τη δεύτερη και τρίτη, παίρνουμε :

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\ b&c&a\\ c&a&b\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\ b&c-b&a-b\\ c&a-c&b-c\end{pmatrix}=1\cdot\det\begin{pmatrix}c-b&a-b\\ a-c&b-c\end{pmatrix}=ac+ab+bc-a^2-b^2-c^2.$$

Οπότε $\det B=(a+b+c)\left(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2\right)$.

iii) Αφαιρώντας τα στοιχεία της πρώτης γραμμής από τα αντίστοιχα στοιχεία των υπολοίπων γραμμών (δηλαδή $r_i\to r_i-r_1$ με $i=2,3,4$) προκύπτει άνω τριγωνικός πίνακας, συνεπώς από την Εφαρμογή 2.1 η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του,

$$\det \Gamma=\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 1&1+a&1&1\\ 1&1&1+b&1\\ 1&1&1&1+c\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 0&a&0&0\\ 0&0&b&0\\ 0&0&0&c\end{pmatrix}=1\cdot a\cdot b\cdot c=abc.$$

iv) Αφαιρώντας τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής από τα αντίστοιχα της πρώτης $r_1\to r_1-r_2$ κατόπιν τα στοιχεία της τέταρτης από της τρίτης $r_3\to r_3-r_4$, σχηματίζονται κοινοί παράγοντες στην πρώτη και την τρίτη γραμμή, συνεπώς η ορίζουσα γίνεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\det \varDelta=\det\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\ 1&1-a&1&1\\ 1&1&1+b&1\\ 1&1&1&1-b\end{pmatrix}&=\det\begin{pmatrix}a&a&0&0\\ 1&1-a&1&1\\ 0&0&b&b\\ 1&1&1&1-b\end{pmatrix}\\ &=a\cdot b\cdot\det\begin{pmatrix}1&1&0&0\\ 1&1-a&1&1\\ 0&0&1&1\\ 1&1&1&1-b\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ορίζουσα, αφαιρώντας από τη δεύτερη στήλη την πρώτη και αναπτύσσοντας την νέα ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή της καταλήγουμε σε μια 3×3 ορίζουσα. Έτσι έχουμε:

$$\det \varDelta=ab\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&-a&1&1\\ 0&0&1&1\\ 1&0&1&1-b\end{pmatrix}=ab\det\begin{pmatrix}-a&1&1\\ 0&1&1\\ 0&1&1-b\end{pmatrix}=ab(-a)\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\ 1&1-b\end{pmatrix}$$

$$=ab(-a)(1-b-1)=a^2b^2.$$

v) Προσθέτοντας στην πρώτη στήλη όλες τις υπόλοιπες στήλες και βγάζοντας κοινό παράγοντα προκύπτει

$$\det E=\det\begin{pmatrix}1+a & b & c & d\\ 1 & 1+b & c & d\\ 1 & b & 1+c & d\\ 1 & b & c & 1+d\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1+a+b+c+d & b & c & d\\ 1+a+b+c+d & 1+b & c & d\\ 1+a+b+c+d & b & 1+c & d\\ 1+a+b+c+d & b & c & 1+d\end{pmatrix}$$

$$=\left(1+a+b+c+d\right)\det\begin{pmatrix}1 & b & c & d\\ 1 & 1+b & c & d\\ 1 & b & 1+c & d\\ 1 & b & c & 1+d\end{pmatrix}.$$

Στον τελευταίο πίνακα αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη γραμμή, οπότε προκύπτει ο $\begin{pmatrix}1 & b & c & d\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Ο τελευταίος είναι τριγωνικός πίνακας και εφαρμόζουμε την Εφαρμογή 2.1. Τελικά,

$$\det E=\left(1+a+b+c+d\right)\det\begin{pmatrix}1 & b & c & d\\ 1 & 1+b & c & d\\ 1 & b & 1+c & d\\ 1 & b & c & 1+d\end{pmatrix}$$

$$=\left(1+a+b+c+d\right)\det\begin{pmatrix}1 & b & c & d\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1+a+b+c+d.$$

vi) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2v, vi, έχουμε μια εναλλαγή της $1^{ης}$ με τη $2^{η}$ στήλη ώστε να παρουσιασθεί μονάδα ως πρώτο στοιχείο του πίνακα και στη συνέχεια κάνουμε $r_2 \to -ar_1+r_2$, $r_3 \to -r_1+r_3$ οπότε η ορίζουσα είναι

$$\det Z=\det\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a^2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -a & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

Στην τελευταία ορίζουσα κάνουμε πάλι εναλλαγή της $2^{ης}$ με την $3^{η}$ στήλη κατόπιν εφαρμόζουμε τις γραμμοπράξεις $r_3 \to -ar_2+r_3$, $r_4 \to -r_2+r_4$, συνεπώς

$$\det Z=-(-1)\det\begin{pmatrix}1 & 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1-a^2 & 0 & 0\\ 0 & a & -a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1-a^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^3-2a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a^2-1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

Συνεχίζοντας με την ίδια διαδικασία $c_3 \leftrightarrow c_4$ και $r_4 \to -ar_3 + r_4$, $r_5 \to -r_3 + r_5$ και τελικά $c_4 \leftrightarrow c_5$ με γραμμοπράξεις $r_5 \to -ar_4 + r_5$ καταλήγουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα τριγωνικού πίνακα (Εφαρμογή 2.1)

$$\det Z = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^3-2a & 0 \\ 0 & 0 & a & a^2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^3-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^4+3a^2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^3+2a & a \end{pmatrix}$$

$$= -(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^3-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a^4+3a^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -a^3+2a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^3-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a^4+3a^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^5-4a^3+3a \end{pmatrix}$$

$$= a^5 - 4a^3 + 3a.$$

◆◆◆

Παράδειγμα 2.11 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \det\begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{ii) } \det\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ a & x & x & x & x \\ a & a & x & x & x \\ a & a & a & x & x \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix} = 0$$

Απόδειξη i) Αρχικά προσθέτουμε όλες τις στήλες στην πρώτη, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $x+3a$, στη συνέχεια κάνουμε τις σημειούμενες γραμμοπράξεις και καταλήγουμε σε τριγωνικό πίνακα, ως ακολούθως:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{pmatrix}$$

$$= (x+3a)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{pmatrix} \underset{r_4 \to r_4 - r_1}{\overset{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}}{=}} (x+3a)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε την εξίσωση $\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3a)(x-a)^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3a$ ή $x = a$.

ii) Αφαιρώντας τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη $r_1 \to r_1 - r_2$ δημιουργείται κοινός παράγοντας και κατόπιν αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την γραμμή αυτή,

$$\det B = \det\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ a & x & x & x & x \\ a & a & x & x & x \\ a & a & a & x & x \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & x & x & x \\ a & a & x & x & x \\ a & a & a & x & x \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix}$$

$$= (x-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & x & x & x \\ a & a & x & x & x \\ a & a & a & x & x \\ a & a & a & a & x \end{pmatrix} = (x-a)\det\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ a & x & x & x \\ a & a & x & x \\ a & a & a & x \end{pmatrix}.$$

Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο στην ορίζουσα του 4×4 πίνακα και για όλους τους επόμενους, δηλαδή,

$$\det\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ a & x & x & x \\ a & a & x & x \\ a & a & a & x \end{pmatrix} \overset{r_1\to r_1-r_2}{=} \det\begin{pmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & x & x \\ a & a & x & x \\ a & a & a & x \end{pmatrix} = (x-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & x & x \\ a & a & x & x \\ a & a & a & x \end{pmatrix}$$

$$= (x-a)\det\begin{pmatrix} x & x & x \\ a & x & x \\ a & a & x \end{pmatrix} = (x-a)^2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & x \\ a & a & x \end{pmatrix} = (x-a)^2\det\begin{pmatrix} x & x \\ a & x \end{pmatrix} = x(x-a)^3.$$

Συνεπώς $\det B = x(x-a)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = a$. ◆◆◆

Παράδειγμα 2.12 Να αποδείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z &= 1 \\ ax+by+cz &= 2 \\ a^2x+b^2y+c^2z &= -1 \end{aligned}$$

έχει πάντοτε μοναδική λύση, η οποία και να βρεθεί, όταν a,b,c είναι διακεκριμένοι αριθμοί.

Απόδειξη Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύστημα που δόθηκε μπορεί να γραφεί με τη *γλώσσα* των πινάκων $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Γενικά, αν γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A

είναι αντιστρέψιμος, από την Πρόταση 2.7 βρίσκουμε τον αντίστροφό του πίνακα A^{-1} και τότε η μοναδική λύση του συστήματος προκύπτει από την (2.6), αφού

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; A^{-1}\left(A\boldsymbol{x}\right)=A^{-1}\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα A έχουμε μετά από αφαίρεση της πρώτης στήλης από τις άλλες δύο $\det A=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{pmatrix}$, οπότε αν από τη δεύτερη στήλη βγάλουμε κοινό παράγοντα το $b-a$ και από την τρίτη το $c-a$, προκύπτει $\det A=(b-a)(c-a)\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^2 & b+a & c+a\end{pmatrix}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε

$$\det A=(b-a)(c-a)(c-b).$$

Επειδή οι αριθμοί a,b,c είναι διακεκριμένοι, έχουμε $\det A\neq 0$, συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος πίνακας υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του προσαρτημένου πίνακα. Μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$A_{11}=\begin{pmatrix}b & c\\ b^2 & c^2\end{pmatrix},\; A_{12}=\begin{pmatrix}a & c\\ a^2 & c^2\end{pmatrix},\; A_{13}=\begin{pmatrix}a & b\\ a^2 & b^2\end{pmatrix},\; A_{21}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ b^2 & c^2\end{pmatrix},\; A_{22}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a^2 & c^2\end{pmatrix},$$

$$A_{23}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a^2 & b^2\end{pmatrix},\; A_{31}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ b & c\end{pmatrix},\; A_{32}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & c\end{pmatrix},\; A_{33}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31}\\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32}\\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)}\begin{pmatrix}bc^2-b^2c & b^2-c^2 & c-b\\ a^2c-ac^2 & c^2-a^2 & a-c\\ ab^2-a^2b & a^2-b^2 & b-a\end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με την (2.6), η λύση του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)}\begin{pmatrix}bc^2-b^2c & b^2-c^2 & c-b\\ a^2c-ac^2 & c^2-a^2 & a-c\\ ab^2-a^2b & a^2-b^2 & b-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Παράδειγμα 2.13 Έστω ότι είναι γνωστοί οι πίνακες των ποσοτήτων Q και των δαπανών $M = PQ$, όπου P ο πίνακας των τιμών. Ο πίνακας $Q = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 13 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ δείχνει τις ποσότητες που αναλογούν μεταξύ 3 ατόμων και 3 αγαθών, και ο πίνακας $M = \begin{pmatrix} 31 & 21 & 47 \\ 21 & 16 & 34 \\ 20 & 21 & 39 \\ 29 & 20 & 44 \end{pmatrix}$ δείχνει τις αντιστοιχίες μεταξύ 4 εβδομάδων και 3 ατόμων.

Να βρεθεί ο πίνακας των τιμών P, ο οποίος δείχνει τις τιμές των τριών αγαθών κάθε μία από τις τέσσερις εβδομάδες.

Απόδειξη Αν υπάρχει ο Q^{-1}, τότε στην υπόθεση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο πίνακα και έχουμε

$$M = PQ \Rightarrow MQ^{-1} = PQQ^{-1} \Rightarrow P = MQ^{-1}.$$

Έτσι, ο υπολογισμός του ζητούμενου πίνακα είναι αρκετά απλός και χρειάζεται μόνο τον Q^{-1} και τον πολλαπλασιασμό του με τον M.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα Q ως προς τη δεύτερη γραμμή βρίσκουμε

$\det Q = -11$, άρα υπάρχει ο Q^{-1}, με $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det Q} adjQ = -\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -25 & 14 \\ -2 & -38 & 27 \\ 0 & 33 & -22 \end{pmatrix}$.

Ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$P = MQ^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 31 & 21 & 47 \\ 21 & 16 & 34 \\ 20 & 21 & 39 \\ 29 & 20 & 44 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -25 & 14 \\ -2 & -38 & 27 \\ 0 & 33 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 2.14 Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις αν είναι σωστές ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i) Αν A είναι 3×3 πίνακας, τότε $\det(5A) = 5\cdot\det A$.

ii) Αν οι A και B είναι $n\times n$ πίνακες με $\det A = 2$ και $\det B = 3$, τότε $\det(A+B) = 5$ και $\det\left(A^3\right) = 6$.

iii) $\det(-A) = -\det A$.

iv) Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι τέτοιος ώστε $A^t = -A$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

v) Αν οι A και B είναι $n \times n$ πίνακες με $2A^3 + 5AB + 2I = \mathbb{O}$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

vi) Αν για τον $n \times n$ πίνακα A ισχύει $(A+I)^k = \mathbb{O}, \quad k \in \mathbb{N}^*$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

vii) Αν $A^3 = \mathbb{O}$, τότε $\det A = 0$.

viii) Αν ο πίνακας $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$, τότε $\det(A^t A) \geq 0$.

Απόδειξη

i) Λάθος, γιατί από την Πρόταση 2.2iii με $\lambda = 5, \; n = 3$ έχουμε $\det(5A) = 5^3 \cdot \det A$.

ii) Λάθος, γιατί αν θεωρήσουμε $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 3$,

προφανώς $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 13$. Και η επόμενη σχέση είναι λάθος, αφού από την Πρόταση 2.3iii, για $k = 3$ έχουμε $\det(A^3) = 2^3 = 8$.

iii) Λάθος, επειδή εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2iii για $\lambda = -1$ έχουμε $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$, οπότε για n άρτιο αριθμό ισχύει $\det(-A) = \det A$, ενώ για n περιττό ισχύει η δοθείσα ισότητα.

iii) Λάθος, γιατί από την υπόθεση, την Πρόταση 2.3i και 2.2 για $\lambda = -1$, προκύπτει

$$\det A = \det A^t \overset{(Y)}{=} \det\left(-A\right) = (-1)^n \det A .$$

Όμως όταν n άρτιος δεν υπάρχει πληροφορία από την τελευταία ισότητα για την ορίζουσα του πίνακα, ενώ όταν n περιττός έχουμε $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$, οπότε μόνο σε αυτή την περίπτωση ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

v) Σωστή, διότι από την υπόθεση έχουμε $2A^3 + 5AB + 2I = \mathbb{O} \Rightarrow A\left(2A^2 + 5B\right) = -2I.$

Παίρνοντας ορίζουσες και εφαρμόζοντας τις Προτάσεις 2.3 και 2.2, καταλήγουμε

$$\det\left(A\left(2A^2 + 5B\right)\right) = \det\left(-2I\right) \Rightarrow \det A \cdot \det\left(2A^2 + 5B\right) = \left(-2\right)^n \neq 0$$

το οποίο σημαίνει ότι $\det A \neq 0$, δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος.

vi) Σωστή, γιατί από

$$(A+I)^k = \mathbb{O} \Rightarrow A^k + \binom{k}{1}A^{k-1} + \binom{k}{2}A^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}A + I = \mathbb{O}$$

$$\Rightarrow A^k + \binom{k}{1}A^{k-1} + \binom{k}{2}A^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}A = -I$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(-A^{k-1} - \binom{k}{1}A^{k-2} - \binom{k}{2}A^{k-3} - \ldots - \binom{k}{k-1}I \right) = I.$$

Στην τελευταία ισότητα εφαρμόζουμε ορίζουσες και έχουμε :

$$\det A \cdot \det \left(-A^{k-1} - \binom{k}{1}A^{k-2} - \binom{k}{2}A^{k-3} - \ldots - \binom{k}{k-1}I \right) = \det I \Rightarrow$$

$$\det A \cdot \det \left(-A^{k-1} - \binom{k}{1}A^{k-2} - \binom{k}{2}A^{k-3} - \ldots - \binom{k}{k-1}I \right) = 1 \qquad (*)$$

Αν ο A δεν ήταν αντιστρέψιμος, τότε $\det A = 0$ και από την (*) θα είχαμε $0 = 1$, άτοπο.

vii) Σωστή, επειδή $A^3 = \mathbb{O} \Rightarrow \det\left(A^3\right) = \det \mathbb{O} = 0$ (**) και από την Πρόταση 2.3iii για $k = 3$ έχουμε

$$\left(\det A\right)^3 = \det\left(A^3\right) \overset{(**)}{=} 0 \Rightarrow \left(\det A\right)^3 = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

viii) Σωστή, από την Πρόταση 2.3i και ii έχουμε

$$\det\left(A^t A\right) = \left(\det A^t\right) \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 \geq 0.$$

◆◆◆

Εφαρμογή 2.15 (ιδιότητες προσαρτημένου πίνακα) *Για κάθε τετραγωνικό πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *έχουμε:*

i) $adj\left(\overline{A}\right) = \overline{adjA}$, $adj\left(A^t\right) = \left(adjA\right)^t$ *και* $adj\left(A^*\right) = \left(adjA\right)^*$,

ii) $adj(kA) = k^{n-1} adjA$ *με* $k \in \mathbb{F}$.

iii) *Αν ο* A *είναι αντιστρέψιμος, τότε* $\det\left(adjA\right) = \left(\det A\right)^{n-1}$.

iv) *Αν οι* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμοι, τότε* $adj(AB) = (adjB) \cdot (adjA)$.

Απόδειξη i) Σύμφωνα με τον ορισμό 2.3 θεωρούμε τον προσαρτημένο πίνακα του A να είναι $adjA = \left(c_{ji}\right) = \left((-1)^{i+j} \det\left(A_{ji}\right)\right)$, οπότε

$$\overline{adjA} = \overline{\left((-1)^{i+j}\det\left(A_{ji}\right)\right)} = \left((-1)^{i+j}\,\overline{\det\left(A_{ji}\right)}\right) \overset{\text{Πρ. 2.3(i)}}{=} \left((-1)^{i+j}\det\left(\overline{A}_{ji}\right)\right) = adj\left(\overline{A}\right)$$

και $\left(adjA\right)^t = \left(c_{ji}\right)^t = \left((-1)^{i+j}\det\left(A_{ji}\right)\right)^t = \left((-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)\right) = adj\left(A^t\right)$.

Έτσι συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$adj\left(A^*\right) = adj\left(\overline{A}^t\right) = \overline{adj\left(A^t\right)} = \overline{\left(adjA\right)^t} = \left(adjA\right)^*.$$

ii) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ii της Πρότασης 2.2, στους $(n-1)\times(n-1)$ πίνακες A_{ij} που εμφανίζονται στον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} adj\left(kA\right) = \left((-1)^{i+j}\det\left(kA_{ji}\right)\right) &\overset{\text{Πρ. 2.2(iii)}}{=} \left((-1)^{i+j}k^{n-1}\det\left(A_{ji}\right)\right) = k^{n-1}\left((-1)^{i+j}\det\left(A_{ji}\right)\right) \\ &= k^{n-1}adjA. \end{aligned}$$

iii) Εφαρμόζοντας στην ισότητα της Πρότασης 2.6ii, τις Προτάσεις 2.2iii και 2.3ii και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, άρα $\det A \neq 0$, έχουμε διαδοχικά τα εξής :

$$A\cdot adjA = \left(\det A\right)\cdot I_n \;\Rightarrow\; \det\left(A\cdot adjA\right) = \det\left(\left(\det A\right)\cdot I_n\right) \underset{\text{Πρ. 2.2(iii)}}{\overset{\text{Πρ. 2.3(ii)}}{\Rightarrow}} \det A\cdot\det\left(adjA\right) = \left(\det A\right)^n$$

$$\overset{\det A\neq 0}{\Rightarrow} \det\left(adjA\right) = \left(\det A\right)^{n-1}.$$

iv) Επειδή οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι από την Πρόταση 1.8v προκύπτει ότι και ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος, άρα $\det\left(AB\right)\neq 0$. Συνεπώς ισχύει η σχέση (2.5), δηλαδή, $\left(AB\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\det\left(AB\right)}adj\left(AB\right)\right) = I_n$, την οποία πολλαπλασιάζουμε αριστερά με $\left(AB\right)^{-1}$ και με εφαρμογή των ιδιοτήτων $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ και $\det\left(AB\right) = \det A\cdot\det B$ (Πρόταση 2.3ii) καθώς και της Πρότασης 2.7 έχουμε

$$\left(AB\right)\cdot\left(\frac{1}{\det\left(AB\right)}adj\left(AB\right)\right) = I_n \;\Rightarrow\; \left(AB\right)^{-1}\left(AB\right)\cdot\left(\frac{1}{\det\left(AB\right)}adj\left(AB\right)\right) = \left(AB\right)^{-1}I_n$$

$$\Rightarrow\; I_n\cdot\frac{1}{\det\left(AB\right)}adj\left(AB\right) = B^{-1}A^{-1} \;\Rightarrow adj\left(AB\right) = \det\left(AB\right)B^{-1}A^{-1}$$

$$\Rightarrow\; adj\left(AB\right) = \cancel{\det A}\cdot\cancel{\det B}\cdot\frac{1}{\cancel{\det B}}adjB\cdot\frac{1}{\cancel{\det A}}adjA$$

και έτσι η ζητούμενη ισότητα είναι προφανής. ◆◆◆

Εφαρμογή 2.16 (συμπλήρωμα Schur) Έστω ο σύνθετος πίνακας $K=\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$, όπου ο πίνακας $A\in M_m(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, $\Delta\in M_n(\mathbb{F})$, $B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $\Gamma\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του σύνθετου πίνακα K.

Απόδειξη Στην ισότητα πινάκων (1.2) εφαρμόζουμε ορίζουσα και κατόπιν την Πρόταση 2.3ii και την Εφαρμογή 2.1, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} &= \det\left(\begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta-\Gamma A^{-1}B \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta-\Gamma A^{-1}B \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Εφ. 2.1}}{=} \det I_m\cdot\det I_n\cdot\det A\cdot\det\left(\Delta-\Gamma A^{-1}B\right)\cdot\det I_m\cdot\det I_n \\
&= \det A\cdot\det\left(\Delta-\Gamma A^{-1}B\right).
\end{aligned}$$

◆◆◆