



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ -Χαρακτηριστικά ποσά**

**Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ**

**Λαμία, 30/12/2015**

1. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ . Να αποδείξετε ότι,

- i) οι πίνακες  $A$  και  $I - A$  είναι ταυτοδύναμοι<sup>(\*)</sup>
- ii) ο πίνακας  $A$  δεν αντιστρέφεται. Να υπολογίσετε τους βαθμούς των πινάκων  $A$  και  $A^2$
- iii) ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Να γράψετε τη διαγώνια μορφή του  $A$ , αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης  $P$ .
- iv) Να αποδείξετε ότι  $A^{2007} - 3A^{2004} = -2A$ .

2. Έστω ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Να βρείτε τον πίνακα  $A$ .
- ii) Να εξηγήσετε γιατί ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και να γράψετε τη διαγώνια μορφή του  $A$ , αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης  $P$ .
- iii) Να αποδείξετε ότι  $A^5 + 2A^2 = 9A - 6I$ .

3. i) Να εξετάσετε για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

διαγωνοποιείται.

ii) Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ . Υπολογίστε τον πίνακα  $A^{2006} + 6A^{20}$ .

---

<sup>(\*)</sup>Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  ονομάζεται ταυτοδύναμος, όταν ισχύει  $A^2 = A$ .

4. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

- i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ .
- ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A^n$  διαγωνοποιείται για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ .
- iii) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα  $(AB)^{2008}$ , όταν  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- iv) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $A^{2009}(A - 6I)^{2008} = 5^{2008}A$ .

5. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- i) Να αποδείξετε ότι ο  $A$  διαγωνοποιείται. Ποια είναι η διαγώνια μορφή του;
- ii) Να υπολογίσετε τον  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίσετε τον πίνακα  $I + A + A^2 + \dots + A^{2006}$ .
- iii) Ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τις ιδιοτιμές του  $A^{-4}$  και απλοποιήστε την παράσταση  $A^{-4} + 2A^{-1} - 3I$ .

6. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$  και  $\lambda = 3$  μία ιδιοτιμή του πίνακα. Να αποδείξετε

ότι,

- i) ο πίνακας  $A$  δεν αντιστρέφεται
- ii) ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Να γράψετε τη διαγώνια μορφή του  $A$ , αφού πρώτα υπολογίσετε έναν πίνακα διαγωνοποίησης  $P$ .
- iii) Να αποδείξετε ότι  $A^{2007} - 3A^{2005} = 2 \cdot 3^{2005}A$ .
- iv) Αν  $a = b$ , να βρείτε ορθογώνιο πίνακα  $U$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $U^T A U$  να είναι διαγώνιος.

7. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- i) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $A$  και  $A^{-1}$ , αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος.

- ii) Οι πίνακες  $A$  και  $A^3$  διαγωνοποιούνται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας γράφοντας τη διαγώνια μορφή του  $A$ .
- iii) Να υπολογισθεί ο πίνακας  $B = A^6 - 16A^2 + A - I$  και στη συνέχεια χωρίς υπολογισμούς βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $B$  και  $B^{-1}$ , καθώς και τις ορίζουσες των πινάκων  $B$ ,  $B^{-1}$  και  $AB^{-1}$ .

8. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

- i) Να εξετάσετε αν οι γραμμές του  $A$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- ii) Ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και σε περίπτωση θετικής απάντησης γράψτε και τη διαγώνια μορφή του.
- iii) Να απλοποιηθεί η παράσταση  $A^7 - 6A^6 + 8A^5 + 4A^4 - 16A^3 + 3A + 4I$ .

9. Έστω  $\mathbf{a} = (2 \ 2 \ 2 \ 2)^t$ .

- i) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $A = \mathbf{a}\mathbf{a}^t$  και να εξετάσετε αν οι γραμμές του  $A$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- ii) Είναι ο πίνακας  $A$  αντιστρέψιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- iii) Είναι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- iv) Αν  $x$  είναι διάνυσμα  $4 \times 1$ , να βρείτε το διανυσματικό χώρο λύσεων της εξίσωσης  $Ax = 0$ .
- v) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ημιορισμένος.
- vi) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $M = I + A$  και να εξετάσετε αν οι γραμμές του  $M$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- vii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιόχωρους του πίνακα  $M$ .
- viii) Αν  $\lambda_i$  είναι ιδιοτιμή του  $M$ , τότε  $\lambda_i - 1$  είναι ιδιοτιμή του  $A$ , για κάθε  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ ; Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας συγκριτικά με το (ii).
- ix) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $M$  διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  ώστε να ισχύει  $M = PDP^{-1}$ , όπου  $D$  κατάλληλος διαγώνιος πίνακας.

- x) Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας  $Q$  και ένας διαγώνιος πίνακας  $D$  έτσι ώστε να ισχύει  $M = Q^T D Q$ .
- xi) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton να βρεθεί ο αντίστροφος του  $M$ , αν υπάρχει.
- xii) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού  $k$  ο πίνακας  $N = I - kA$  είναι ορθογώνιος;

10. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Αποδείξτε ότι υπάρχουν 8 διαφορετικοί πραγματικοί πίνακες  $B$  με  $B^2 = A$ , δώστε τη μορφή αυτών των πινάκων και κατόπιν υπολογίστε έναν από αυτούς.

11. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) - 2x_3(t) \end{aligned},$$

όταν με  $x'(t)$  συμβολίζεται η παράγωγος του πίνακα  $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^t$ .

12. Έστω  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- i) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ . Εξετάστε αν ο  $A$  διαγωνοποιείται, σε περίπτωση θετικής απάντησης γράψτε τη διαγώνια μορφή του.
- ii) Για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  υπολογίστε τον πίνακα  $2A^{n+2} + 3I$ .

13. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- i) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα  $U$  που διαγωνοποιεί τον  $A$  και γράψτε τη διαγώνια μορφή του.
- ii) Υπολογίστε τους πίνακες

$$B = \left( \frac{1}{2}A - I \right)^{100}, \quad \Gamma = e^{At}, \quad \Delta = \sqrt{A}.$$

Δίνεται ότι για έναν  $n \times n$  πίνακα  $A$  ορίζεται:  $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$

iii) Βρείτε το είδος της καμπύλης  $q = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$  και μετασχηματίσατε αυτή στην κανονική της μορφή.

**14.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

i) Να υπολογισθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  και  $A^{-1}$ , εφόσον ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται;

ii) Ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται; Αν ναι, να υπολογισθούν ένας πίνακας  $P$  και ένας διαγώνιος πίνακας  $D$ , τέτοιοι ώστε να ισχύει  $A = PDP^{-1}$ .

iii) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, να υπολογισθούν οι πίνακες

$$A^{-1} \quad \text{και} \quad A^{2010} + 7A^{2009} + 3I$$

**15.** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & i \end{pmatrix}$

i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $A$  και  $A^{-1}$  (εφόσον ορίζεται).

ii) Να εξετάσετε αν οι πίνακες  $A$ ,  $A^{-1}$  διαγωνοποιούνται; Σε περίπτωση καταφατικής απάντησης να υπολογίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  και δύο διαγώνιους πίνακες  $\Delta_1, \Delta_2$  τέτοιους ώστε  $\Delta_1 = P^{-1}AP$  και  $\Delta_2 = P^{-1}A^{-1}P$ .

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα  $A^{2011} = A^{-1}$ .

**16.** Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ορίζουσας να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος.

- ii) Διαγωνοποιείται ο πίνακας  $A$ ; Απαντήστε σύντομα, χωρίς υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων.
- iii) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .
- iv) Να βρεθούν διαγώνιος πίνακας  $D$  και ορθογώνιος πίνακας  $U$ , έτσι ώστε  $A = UDU^T$ .
- v) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B = 2A^{2011} - 4A^{2010} + 2I$ . Είναι ο  $B$  διαγωνοποιήσιμος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Είναι ο  $B^2$  αντιστρέψιμος; Σε περίπτωση θετικής απάντησης υπολογίστε τον  $B^{-2}$ .

17. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- i) Αφού υπολογίσετε την ορίζουσα του  $A - I_3$ , να δικαιολογήσετε ότι το 1 είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ ;
- ii) Αφού βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.
- iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και, αν ναι, να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  ώστε  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος πίνακας  $D$ .
- iv) Αφού υπολογίσετε τον πίνακα  $A^k$  για κάθε ακέραιο  $k$ , στη συνέχεια να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα  $A^{2012} + A^{-2013} - 5I_3$ .
- v) Να βρείτε έναν πίνακα  $X$  έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$AXA^T + A^T A = 2I_3.$$

18. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

- iv) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .
- v) Να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A^{-1}$ , αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος.
- vi) Διαγωνοποιείται ο πίνακας  $A$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

vii) Να υπολογιστεί ο πίνακας  $B = A^4 - 12A^3$ . Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  ;  
 Ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος; Να υπολογιστούν οι τιμές  $\det B^3$  και  $\det(-AB^T)$ .

19. Έστω  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  το σύνολο των  $2 \times 2$  πραγματικών πινάκων και  $W$  ο διανυσματικός υπόχωρος του  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  με στοιχεία συμμετρικούς πίνακες. Να βρείτε μία βάση του υποχώρου  $W$  καθώς και τη διάστασή του.

20. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ .

- i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  είναι 1, στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του.
- ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  και ένα διαγώνιο πίνακα  $D$  έτσι ώστε να ισχύει  $A = PDP^{-1}$ .
- iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον  $A^{-1}$ .
- iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να βρείτε τις ιδιοτιμές, και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $B = A^3 - 16A^{-2} - 4I$ .

21. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  είναι 1, στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του.
- ii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  και ένα διαγώνιο πίνακα  $D$  έτσι ώστε να ισχύει  $A = PDP^{-1}$ .
- iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον  $A^{-1}$ .

- iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $B = A^{2012} - 2A^9 - 4I$ .
- v) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $B^{-1}$  (εφόσον ορίζεται).
- vi) Να βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων  $AB$ ,  $AB^2$ ,  $-2B^2$ ,  $3B^T$  και  $4B^{-2}$ .

**22.** Έστω  $\mathbf{a} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  μοναδιαίο διάνυσμα,  $k \in \mathbb{R}$  θετικός αριθμός και  $H$  ο πίνακας

$$H = kI + \mathbf{a}\mathbf{a}^t.$$

- i) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$  είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.
- ii) Αν  $\lambda_i$  είναι ιδιοτιμή του  $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ , τότε  $k + \lambda_i$  είναι ιδιοτιμή του  $H$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- iii) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $H$  είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος, αντιστρέψιμος και διαγωνοποιήσιμος πίνακας.
- iv) Θεωρώντας ότι  $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$  και  $k = 2$  να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H^{2012} - 3H^{2011}$ , αφού πρώτα υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του  $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ .

**23.** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του  $A$  καθώς και τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $-1$ . Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και, αν ναι, να προσδιορίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  ώστε  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος πίνακας  $D$ .
- ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $A^k$  για κάθε ακέραιο  $k$ .
- iii) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα (ή αλλιώς) να βρείτε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και την ορίζουσα του πίνακα  $B = A^4 + A^{-2} - 4A^{2013} - I$ .



24. Έστω  $x'(t)$  η παράγωγος του πίνακα  $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^t$ .

Να λυθεί το σύστημα

$$x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + 3x_4(t)$$

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + 4x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3'(t) = -3x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_4'(t) = -6x_3(t) + 2x_4(t)$$

25. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- i) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε τον  $A^{-1}$ .
- ii) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  είναι 1. Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.
- iii) Να εξετάσετε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Σε περίπτωση θετικής απάντησης να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  και ένα διαγώνιο πίνακα  $D$  έτσι ώστε να ισχύει  $A = PDP^{-1}$ .
- iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $B = A^{2014} - 4A^{2013} + 2I$ .
- v) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $B$ .
- vi) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $B^{-1}$  (εφόσον ορίζεται) και στη συνέχεια να βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων  $-2AB^2A^T$  και  $4B^{-2}$ .

26. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix},$$

όπου  $a$  είναι πραγματική παράμετρος.

- i) Αφού βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του, να γίνει διερεύνηση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$ .
- ii) Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται; Αν ναι, να βρεθεί ο αντίστροφος του  $A$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton.

27. Έστω η γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με τύπο

$$f(x, y, z) = (-2x + y + 5z, 3x - 5z, x + y + 2z).$$

- i) Να υπολογιστεί μία βάση για καθένα από τους υποχώρους  $\ker f$  και  $\text{Im } f$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την  $f^{-1}$ .
- iii) Να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης της  $f$  ως προς τη συνήθη βάση του  $\mathbb{R}^3$ .  
Η απεικόνιση  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμη;  
Η απεικόνιση  $f^{-1}$  είναι διαγωνοποιήσιμη;