ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ –-Διανυσματικοί Χώροι

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

Λαμία, 16/12/2015

1. Έστω $\mathbf{u}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (0,2,3)$ και U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

i) Βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(1,1,a) \in U$. Για τις τιμές αυτές να παραστήσετε το $(1,1,a)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

ii) Έστω U' ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $(1,0,0),(1,6,9)$.
Να αποδείξετε ότι $U = U'$.

2. Εξετάστε ποια από τα σύνολα $U_1 = \{(x,y,x^2): \ x,y \in \mathbb{R}\}$,

$$U_2 = \{(x,y,x-1): \ x,y \in \mathbb{R}\}, \qquad U_3 = \{(2x+y, x-y, x+y): \ x,y \in \mathbb{R}\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο από τα παραπάνω είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

3. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,-1)$ ενός υποχώρου V του χώρου $\mathbb{R}^3$.

i) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\boldsymbol{w} = (2,1,-1)$ ανήκει στο χώρο V.

ii) Να υπολογίσετε μία βάση του V.

iii) Αφού πρώτα εξετάσετε την ορθογωνιότητα των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, στη συνέχεια να υπολογίσετε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, που να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$.

iv) Να υπολογίσετε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του V, $V^{\perp}$, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

4. Έστω ότι ο υπόχωρος $U \subseteq \mathbb{R}^3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1), \ \boldsymbol{u}_2 = (1,2,3), \ \boldsymbol{u}_3 = (0,1,1) \text{ και } \boldsymbol{u}_4 = (2,2,5)$$

Να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση για τον U ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, ακολουθώντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt.

5. i) Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ η σχέση:

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 10 x_2 y_2 + 4x_3 y_3$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

ii) Θεωρώντας το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο να υπολογίσετε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο U που παράγεται από τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,2,3),\ \boldsymbol{u}_3 = (2,2,5),$$

ακολουθώντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης 4;

6. Έστω

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : \quad A\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} A \right\}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ αν και μόνο αν $b = c + 2a - 2d = 0$.

ii) Να εξετάσετε αν το U είναι ένας υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ και να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του U.

7. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ αν και μόνο αν $c = 2b = 2a - 2d$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υποχώρου W καθώς και τη διάστασή της.

8. Έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,-2,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,0,1)$ και $\boldsymbol{v}_3 = (0,2,1,4)$ και U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από $\boldsymbol{u}_1 = (6,5,-5,-2)$ και $\boldsymbol{u}_2 = (6,9,4,-9)$.

i) Να βρείτε μία βάση του V, U.

ii) Να βρείτε μία βάση του $V+U$ και τη διάστασή της καθώς και τη διάσταση του $V\cap U$.

iv) Να εξετάστε αν ισχύει $\mathbb{R}^4 = V\oplus U$.

9. Έστω τα υποσύνολα W_1, W_2 του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται ως ακολούθως:

$$W_1 = \left\{ (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \quad x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

i) Να εξετάσετε αν W_1, W_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου $W_1 \cap W_2$.

iii) Να υπολογίσετε τη διάσταση των υπόχωρων $W_1, W_2,\; W_1\cap W_2,\; W_1+W_2$.

iv) Δικαιολογήστε γιατί ο $\mathbb{R}^4$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2. Να αποδείξετε ότι για τον $\Delta = span\{(0,0,0,1)\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus \Delta$.

10. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πραγματικοί πίνακες B για τους οποίους ισχύει $AB = BA$.

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πινάκων B αποτελεί υπόχωρο του διανυσματικού χώρου όλων των πραγματικών 2×2 πινάκων.

iii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του παραπάνω υπόχωρου.

11. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad a - b - 3c + d = 0 \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του δ.χ. $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

12. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

iii) Βρείτε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$ και τη διάσταση του $W^{\perp}$.

13. Έστω το σύνολο

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

i) Να αποδείξετε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου W καθώς και τη διάστασή του.

iii) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$ και τη διάσταση του $W^{\perp}$.

14. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0, \text{ με } \boldsymbol{y} = (2, -2, 4)\}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το S αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του S.

iii) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του S, που περιέχει το διάνυσμα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

15. Έστω U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,1,0), (2,1,0,1), (4,3,2,1), (0,1,2,-1)$ και έστω V ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$: $V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \; x - y - z + w = x + y + z = 2x + w = 0\right\}$.

i) Να εξετάσετε αν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

ii) Να βρείτε μια βάση B_U και τη διάσταση του U.

iv) Να βρείτε μια βάση B_V και τη διάσταση του V.

v) Να δείξετε ότι το σύνολο $B_U \cup B_V$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

16. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \; x, y, z, w \in \mathbb{R} : \quad x = y + 2z - w\},$$

$$W_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \; x, y, z, w \in \mathbb{R} : \quad x - 2w = y - z = 0\}.$$

i) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1 και $W_1 \cap W_2$ του $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Να βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών υποχώρων W_2 και W_1+W_2.

iii) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $M_2(\mathbb{R})=W_1+W_2$, ενώ ο $M_2(\mathbb{R})$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2.

iv) Να αποδείξετε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος $W_3=span\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ δεν είναι υποσύνολο του W_1 και ότι ισχύει $M_2(\mathbb{R})=W_1\oplus W_3$.

17. Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1=\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x,y,z,w\in\mathbb{R}:\quad x=w=z\},$$

$$W_2=\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x,y,z,w\in\mathbb{R}:\quad x-w=y+z\}.$$

v) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$.

vi) Να βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών υποχώρων W_1+W_2 και $W_1\cap W_2$.

vii) Για το διανυσματικό χώρο $M_2(\mathbb{R})$ ισχύει $M_2(\mathbb{R})=W_1+W_2$; Είναι το άθροισμα ευθύ; Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

18. Έστω V,W οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ με

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ και $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0\}$.

i) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση και τη διάσταση των V και W, θεωρώντας το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση για την τομή $W\cap V$. Ισχύουν οι σχέσεις $\mathbb{R}^3=V+W$ και $\mathbb{R}^3=V\oplus W$;

19. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ και έναν υπόχωρό του V που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=(-2,2,2,-6)$, $\boldsymbol{v}_2=(2,-1,3,2)$ και $\boldsymbol{v}_3=(1,1,9,-5)$.

i) Να βρείτε μία βάση του χώρου V και τη διάστασή του.

ii) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $V^{\perp}$ του υποχώρου V ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$.

20. Δίνεται ο διανυσματικός υπόχωρος $W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z=0\}$ και ο υπόχωρος W_2, ο οποίος παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων $\{(1,2,1),(1,-1,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

i) Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1, W_2 και W_1+W_2 του $\mathbb{R}^3$.

ii) Να βρείτε βάση και τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου $W_1 \cap W_2$.

iii) Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το άθροισμα των W_1, W_2; Είναι το άθροισμα ευθύ; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

21. Έστω τα πολυώνυμα

$$p_1(x) = x^3 - x^2 + x - 4, \quad p_2(x) = x^2 - 9 \quad \text{και} \quad p_3(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2.$$

i) Να διατυπώσετε συνθήκες για τους συντελεστές $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

ii) Να εκφράσετε, αν είναι δυνατό, τα πολυώνυμα $g_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 8$ και $g_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x - 8$ ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

iii) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

iv) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης να δώσετε μία βάση του παραπάνω διανυσματικού χώρου που να τα περιέχει.