Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Θεωρία Χάους

Μέρος 5ο

Ιστορικές αλήθειες:

- Σε ένα σύστημα, που περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων με κάποιες αρχικές συνθήκες και στο οποίο δεν υπάρχει καμία εξωτερική διαταραχή, η συμπεριφορά του είναι προδιαγραμμένη, δηλ. Ντετερμινιστική (βλ. Εισαγ.). Άρα είναι πλήρως προβλέψιμο!
- Αυτή ήταν η επικρατούσα άποψη στην οικονομική σκέψη.
- Η πράξη όμως απέδειξε ότι τα Οικονομικά Συστήματα είναι αρκετά απρόβλεπτα.
- Και άρχισε η συλλογή δεδομένων...
- Δηλ. η δημιουργία και μελέτη χρονοσειρών. Και έτσι γεννήθηκε η Οικονομετρία.

Τρεις σημαντικές παρατηρήσεις:

1. ***Η γραμμικότητα είναι η εξαίρεση.*** Τα γραμμικά οικονομικά μοντέλα καταλήγουν σε μοναδικά (έχουμε δει πολλά παραδείγματα) σημεία ισορροπίας, τα οποία είναι είτε ολικά ευσταθή, είτε ολικά ασταθή. Τα μη-γραμμικά, όμως, συστήματα καταλήγουν σε πολλά σημεία ισορροπίας, και άρα σε τοπικές ευστάθειες ή αστάθειες! Η μελέτη τους (οφείλουμε να το ομολογήσουμε) έλαβε τις σύγχρονες διαστάσεις, χάρη στους Η/Υ.
2. ***Πολλές οικονομικές χρονοσειρές παράγονται από διακριτές διαδικασίες (Mandelbrot).*** Τα συστήματα που (κυρίως) παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά είναι διακριτά δυναμικά συστήματα, και είναι αυτά που παράγουν τις οικονομικές χρονοσειρές.
3. ***Η εμφάνιση διακλαδώσεων.*** Η ισορροπία σε ένα Δυναμικό Σύστημα αλλάζει ξαφνικά, καθώς μεταβάλλουμε κάποια παράμετρό του.

Διακλαδώσεις: Η περίπτωση με μόνο μια παράμετρο

Γενική μορφή: $x_{t+1} = f(x_t, \lambda)$

Παραδείγματα: $x_{t+1} = 1{,}5 x_t (1 - x_t) - \lambda$

$x_{t+1} = \lambda x_t (1 - x_t)$

- Η ***θεωρία των διακλαδώσεων*** μελετά τις ποιοτικές αλλαγές στην συμπεριφορά των σημείων ισορροπίας.
- Έστω $f(x^*, \lambda)$ ένα σημείο ισορροπίας. Ο τρόπος που το γράφουμε δηλώνει ότι το σημείο αυτό εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ.
- Καθώς μεταβάλλουμε το λ, τα χαρακτηριστικά του συστήματος μεταβάλλονται και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις πολύ δραματικά.
- Τα σημεία αυτά τα ονομάζουμε ***σημεία διακλάδωσης***.
- Στα σημεία αυτά εμφανίζονται περιοδικοί κύκλοι ανώτερης τάξης, π.χ. Κύκλοι 2-περιόδου, 4-περιόδου, 8-περιόδου κ.ο.κ.
- Έρχεται όμως μια τιμή της παραμέτρου λ, πέραν της οποίας δεν υπάρχει κανένας περιοδικός κύκλος.
- Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το σύστημα έγινε **χαοτικό**.

Παράδειγμα 1ο

$$x_{t+1} = 1{,}5x_t(1-x_t) - \lambda$$

Βήμα 1ο : Βρίσκουμε τα σταθερά σημεία

$$x^* = 1{,}5x^*(1-x^*) - \lambda \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1-\sqrt{1-24\lambda}}{6} \\ x_2^* = \dfrac{1+\sqrt{1-24\lambda}}{6} \end{cases}$$

Δηλαδή, αν: $1-24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < \dfrac{1}{24}$ τότε (και μόνο τότε) υπάρχουν τα δύο σημεία ισορροπίας

Βήμα 2ο : Μελέτη ευστάθειας

Βρίσκουμε την παράγωγο:

$$f(x^*) = 1{,}5x^*(1-x^*) - \lambda \Rightarrow f'(x^*) = 1{,}5 - 3x^* \begin{cases} f'(x_1^*) = \dfrac{2+\sqrt{1-24\lambda}}{2} > 1, \forall \lambda < \dfrac{1}{24} \\ f'(x_2^*) = \dfrac{2-\sqrt{1-24\lambda}}{2} < 1, \forall \lambda < \dfrac{1}{24} \end{cases}$$

Άρα το x_1^* είναι ασταθές ή απωθητής

Το x_2^* θα είναι ευσταθές ή ελκυστής $\Leftrightarrow -1 < f'(x_2^*) < 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -0{,}625 < \lambda < 0.041667$

$$(6x^* - 1)^2 = 1 - 24\lambda$$