

*Λ. Ζαχείλας*

*Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*

*Τμήμα Οικονομικών Επιστημών*

*Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*

# Οικονομική Δυναμική

123

# Θεωρία Χάους

Μέρος 5<sup>ο</sup>

## Ιστορικές αλήθειες:

- Σε ένα σύστημα, που περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων με κάποιες αρχικές συνθήκες και στο οποίο δεν υπάρχει καμία εξωτερική διαταραχή, η συμπεριφορά του είναι προδιαγραμμένη, δηλ. Ντετερμινιστική (βλ. Εισαγ.). Άρα είναι πλήρως προβλέψιμο!
- Αυτή ήταν η επικρατούσα άποψη στην οικονομική σκέψη.
- Η πράξη όμως απέδειξε ότι τα Οικονομικά Συστήματα είναι αρκετά απρόβλεπτα.
- Και άρχισε η συλλογή δεδομένων...
- Δηλ. η δημιουργία και μελέτη χρονοσειρών. Και έτσι γεννήθηκε η Οικονομετρία.

## Τρεις σημαντικές παρατηρήσεις:

- 1. Η γραμμικότητα είναι η εξαίρεση.** Τα γραμμικά οικονομικά μοντέλα καταλήγουν σε μοναδικά (έχουμε δει πολλά παραδείγματα) σημεία ισορροπίας, τα οποία είναι είτε ολικά ευσταθή, είτε ολικά ασταθή. Τα μη-γραμμικά, όμως, συστήματα καταλήγουν σε πολλά σημεία ισορροπίας, και άρα σε τοπικές ευστάθειες ή αστάθειες! Η μελέτη τους (οφείλουμε να το ομολογήσουμε) έλαβε τις σύγχρονες διαστάσεις, χάρη στους Η/Υ.
- 2. Πολλές οικονομικές χρονοσειρές παράγονται από διακριτές διαδικασίες (Mandelbrot).** Τα συστήματα που (κυρίως) παρουσιάζουν χαστική συμπεριφορά είναι διακριτά δυναμικά συστήματα, και είναι αυτά που παράγουν τις οικονομικές χρονοσειρές.
- 3. Η εμφάνιση διακλαδώσεων.** Η ισορροπία σε ένα Δυναμικό Σύστημα αλλάζει ξαφνικά, καθώς μεταβάλλουμε κάποια παράμετρό του.

## Διακλαδώσεις: Η περίπτωση με μόνο μια παράμετρο

Γενική μορφή:  $x_{t+1} = f(x_t, \lambda)$

Παραδείγματα:  $x_{t+1} = 1,5x_t(1 - x_t) - \lambda$

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 - x_t)$$

- ❑ Η θεωρία των διακλαδώσεων μελετά τις ποιοτικές αλλαγές στην συμπεριφορά των σημείων ισορροπίας.
- ❑ Έστω  $f(x^*, \lambda)$  ένα σημείο ισορροπίας. Ο τρόπος που το γράφουμε δηλώνει ότι το σημείο αυτό εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ .
- ❑ Καθώς μεταβάλλουμε το  $\lambda$ , τα χαρακτηριστικά του συστήματος μεταβάλλονται και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις πολύ δραματικά.
- ❑ Τα σημεία αυτά τα ονομάζουμε σημεία διακλάδωσης.
- ❑ Στα σημεία αυτά εμφανίζονται περιοδικοί κύκλοι ανώτερης τάξης, π.χ. Κύκλοι 2-περιόδου, 4-περιόδου, 8-περιόδου κ.ο.κ.
- ❑ Έρχεται όμως μια τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , πέραν της οποίας δεν υπάρχει κανένας περιοδικός κύκλος.
- ❑ Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το σύστημα έγινε **χαοτικό**.

## Παράδειγμα 1°

$$x_{t+1} = 1,5x_t(1 - x_t) - \lambda$$

**Βήμα 1°:** Βρίσκουμε τα σταθερά σημεία

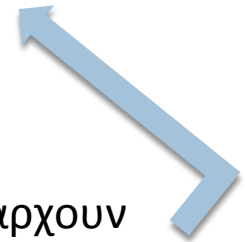
$$x^* = 1,5x^*(1 - x^*) - \lambda$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 24\lambda}}{6} \\ x_2^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 24\lambda}}{6} \end{array} \right.$$

Δηλαδή, αν:  $1 - 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{24}$

τότε (και μόνο τότε) υπάρχουν τα δύο σημεία ισοροπίας



**Βήμα 2°:** Μελέτη ευστάθειας

Βρίσκουμε την παράγωγο:

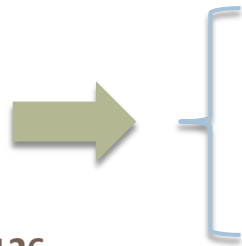
$$f(x^*) = 1,5x^*(1 - x^*) - \lambda \Rightarrow f'(x^*) = 1,5 - 3x^*$$



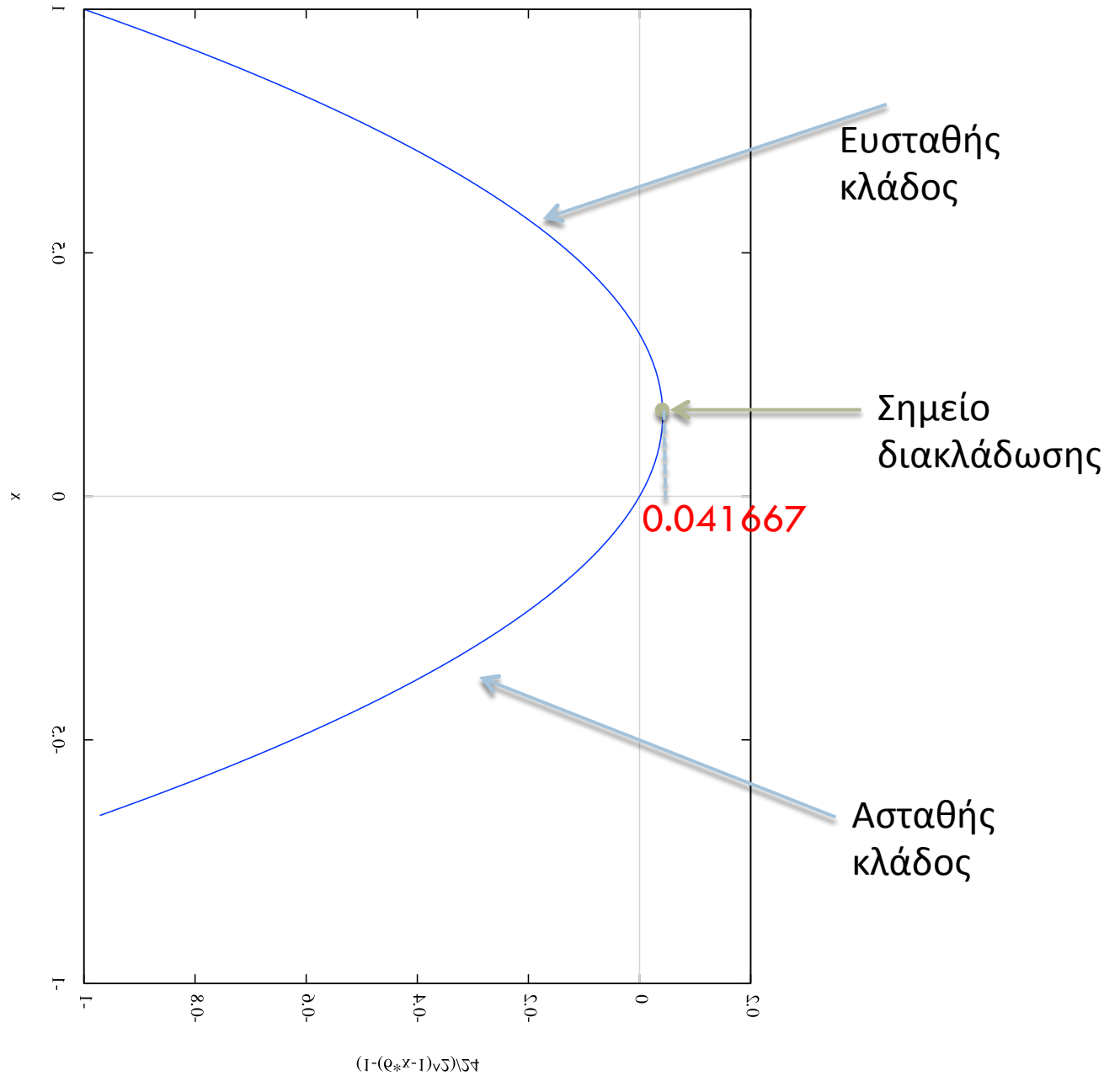
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_1^*) = \frac{2 + \sqrt{1 - 24\lambda}}{2} > 1, \forall \lambda < \frac{1}{24} \\ f'(x_2^*) = \frac{2 - \sqrt{1 - 24\lambda}}{2} < 1, \forall \lambda < \frac{1}{24} \end{array} \right.$$

Άρα το  $x_1^*$  είναι ασταθές ή απωθητής

Το  $x_2^*$  θα είναι ευσταθές ή ελκυστής  $\Leftrightarrow -1 < f'(x_2^*) < 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -0,625 < \lambda < 0,041667$



$$(6x^* - 1)^2 = 1 - 24\lambda$$



(1-(6\*x-1)/24)/24