Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Γενική λύση των Διακριτών Δ. Σ.

Το διακριτό δ.σ. (με μορφή πινάκων): $u_t = A \cdot u_{t-1}$

λύνεται ως εξής:

$$u_1 = A \cdot u_0$$

$$u_2 = A \cdot u_1 = A \cdot (Au_0) = A^2 u_0$$

$$u_3 = A \cdot u_2 = A \cdot (A^2 u_0) = A^3 u_0$$

$$\vdots$$

$$u_t = A^t u_0$$

όπου u_0 : οι αρχικές συνθήκες

Άρα: (π.χ.) $u_{100} = A^{100}\, u_0$, αλλά: $A^{100} = ??$

Ενώ, αν έχουμε το: $u_t = A \cdot u_{t-1} + b$

Τότε:

$$u_1 = A \cdot u_0 + b$$

$$u_2 = A \cdot u_1 + b = A \cdot (Au_0 + b) = A^2 u_0 + Ab + b$$

$$u_3 = A \cdot u_2 + b = A \cdot (A^2 u_0 + Ab + b) = A^3 u_0 + A^2 b + Ab + b$$

$$\vdots$$

$$u_t = A^t u_0 + \Big(\underbrace{A^{t-1} + A^{t-2} + \cdots + A + I}_{\text{... λίγο δύσκολο;}}\Big) \cdot b$$

Οπότε ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

$u_t = A \cdot u_{t-1} + b$ και έστω u^* το σημείο ισορροπίας, οπότε: $u^* = A \cdot u^* + b$

Αφαιρούμε κατά μέλη: $u_t - u^* = A \cdot (u_{t-1} - u^*)$ και θέτουμε: $u_t - u^* = z_t$

Άρα: $z_t = Az_{t-1}$ ... και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά!

Υπενθύμιση:

Βασικά στο Maxima για πίνακες:

-Ορισμός	•Menu (Algebra): Enter Matrix
-Πράξεις	• + , - , . (προσοχή: όχι *)
-Μοναδιαίος	•Ident
-Χαρακτηριστική εξίσωση	•load("nchrpl") , charpoly(%)
-Ορίζουσα	•Determinant(…)
-Αντίστροφος	•Inverse(…)
-Ίχνος	•load("nchrpl") , mattrace(…)
-Ανάστροφος	•Transpose(…)
-Ιδιοτιμές	•Eigenvalues(…)
-Ιδιοδιανύσματα	•Eigenvectors(…)

Θεώρημα:

Αν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι $r \neq s$,όπως προκύπτουν από την εξίσωση: $|A-\lambda I|=0$

τότε υπάρχει πίνακας: $V=\begin{pmatrix} v_r & v_s \end{pmatrix}$,όπου v_r και v_s τα ιδιοδιανύσματα των r , s , έτσι ώστε:

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}=D$$

Παράδειγμα 1ο

Έστω το Διακρ. Δ.Σ.: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$

Βήμα 1ο : Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι: $r=1,\ s=3$

Βήμα 2ο : Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές, θα είναι: $v_r=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_s=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix} v_r & v_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3ο : Σύμφωνα με το Θεώρημα:

$$D=V^{-1}AV=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα: $D = V^{-1}AV \Rightarrow VD = VV^{-1}AV \Rightarrow VDV^{-1} = A$

Και επομένως:

$$A^2 = \left(VDV^{-1}\right)\cdot\left(VDV^{-1}\right) = VD^2V^{-1}$$

$$A^3 = \left(VDV^{-1}\right)\cdot\left(VD^2V^{-1}\right) = VD^3V^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^t = \left(VDV^{-1}\right)\cdot\left(VD^{t-1}V^{-1}\right) = VD^tV^{-1}$$

Δηλαδή: $u_t = A^t \cdot u_0 = VD^tV^{-1}u_0$

Όπου όμως η δύναμη του πίνακα D υπολογίζεται πολύ εύκολα:

$$D = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{pmatrix} r^t & 0 \\ 0 & s^t \end{pmatrix}$$

Και τελικά: $u_t = V \cdot \begin{pmatrix} r^t & 0 \\ 0 & s^t \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \cdot u_0$ όπου: $V = \begin{pmatrix} v_r & v_s \end{pmatrix}, V^{-1} \cdot u_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Βήμα 4ο : Άρα η γενική λύση του Διακρ. Δ.Σ. θα είναι:

$$u_t = \begin{pmatrix} v_r & v_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^t & 0 \\ 0 & s^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{u_t = ar^t v_r + bs^t v_s}$$

Και εν προκειμένω στο παράδειγμα μας:

$$u_t = a \cdot 1^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot 3^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x_t = a + b \cdot 3^t \\ y_t = -a + b \cdot 3^t \end{array}} \right.$$

Παράδειγμα 2ο

Έστω το μη-ομογενές Διακρ. Δ.Σ.: $\begin{cases} x_{t+1} = -8 - x_t + y_t \\ y_{t+1} = 4 - 0,3x_t + 0,9y_t \end{cases}$ Με αρχικές τιμές: $x_0 = 2$, $y_0 = 8$

Λύση:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Δηλ. είναι της μορφής: $u_{t+1} = A \cdot u_t + b$ Άρα:

$$u^* = (I-A)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 6,4 \\ 20,8 \end{pmatrix}$$

Οπότε: $\begin{matrix} x_{t+1} - x^* = -(x_t - x^*) + (y_t - y^*) \\ y_{t+1} - y^* = -0,3(x_t - x^*) + 0,9(y_t - y^*) \end{matrix} \quad \Rightarrow u_t = A u_{t-1}$

Βήμα 1ο : Ιδιοτιμές του A: $r = 0,7262 \;, s = -0,8262$

Βήμα 2ο : Ιδιοδιανύσματα: $v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,7262 \end{pmatrix}, v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1738 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} v_r & v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,7262 & 0,1738 \end{pmatrix}$

Βήμα 3ο : $D = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 0,7262 & 0 \\ 0 & -0,8262 \end{pmatrix}$

Βήμα 4ο : $u_t = V \cdot \begin{pmatrix} (0,7262)^t & 0 \\ 0 & (-0,8262)^t \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \cdot u_0$

Και αφού: $x_0 = 2 \;, y_0 = 8 \qquad \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} x_0 - x^* \\ y_0 - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,4 \\ -12,8 \end{pmatrix}$

Τελικά η λύση: $\begin{cases} x_{t+1} - x^* = -7,7526 \cdot (0,7262)^t + 3,3526 \cdot (-0,8262)^t \\ y_{t+1} - y^* = -13,3827 \cdot (0,7262)^t + 0,5827 \cdot (-0,8262)^t \end{cases}$

Η προηγούμενη μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί και σε Διακρ. Δ.Σ. με περισσότερες των δύο εξισώσεις.

Για παράδειγμα, αν το σύστημα έχει τρεις εξισώσεις και άρα ο πίνακας A είναι 3×3 με ιδιοτιμές q, r, s, τότε:

$$u_t = V \cdot \begin{pmatrix} q^t & 0 & 0 \\ 0 & r^t & 0 \\ 0 & 0 & s^t \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \cdot u_0$$

όπου: v_{q} $\quad v_{\mathrm{r}}$ $\quad v_{\mathrm{s}}$

Παράδειγμα:

Έστω το Διακρ. Δ.Σ.: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix}$ δηλ. $u_t = A \cdot u_{t-1}$

Βήμα 1ο : Ιδιοτιμές του A: $q = 0\ , r = -1\ , s = 2$

Βήμα 2ο : Ιδιοδιανύσματα: $v_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, v_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Βήμα 3ο : $D = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Βήμα 4ο : Η λύση θα είναι: $u_t = V \cdot \begin{pmatrix} 0^t & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \cdot u_0$

Αν είχαμε αρχικές τιμές: $u_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Τότε: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-1)^t + 2 \cdot 2^t \\ 3 \cdot (-1)^t - 2 \cdot 2^t \\ -18 \cdot (-1)^t + 6 \cdot 2^t \end{pmatrix}$