Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Διακριτά Συστήματα Εξισώσεων

Μέρος 4ο

Εισαγωγή - Ορισμοί

Είδαμε στο Μέρος 2ο εξισώσεις διαφορών (γραμμικές και αυτόνομες):

π.χ. $x_t = 2x_{t-1}$ & $x_t = 4x_{t-1} + 4x_{t-2}$

Στο Μέρος 4ο, θα ασχοληθούμε με συστήματα εξισώσεων διαφορών, όπως:

$$(i)\ \begin{cases} x_t = ax_{t-1} + by_{t-1} \\ y_t = cx_{t-1} + dy_{t-1} \end{cases}$$

$$(ii)\ \begin{cases} x_t = 4x_{t-1} + 2 \\ y_t = -2y_{t-1} - 3x_{t-1} + 3 \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + 3y_{t-1} + 4z_{t-1} \\ y_t = 0{,}5x_{t-1} \\ z_t = 0{,}7y_{t-1} \end{cases}$$

Γραμμικά & ομογενή

Γραμμικό & μη ομογενές

** κατά τα λοιπά, η ονοματολογία των διακριτών συστημάτων ακολουθεί την κατηγοριοποίηση των διακριτών εξισώσεων*

Το σύστημα *(i)* μπορεί να γραφεί:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$

Το *(ii)* αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Το *(iii)* αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{u_t}_{\substack{n \times 1 \\ \text{διάνυσμα}}} = \underbrace{A}_{\substack{n \times n \\ \text{πίνακας}}} \cdot \underbrace{u_{t-1}}_{\substack{n \times 1 \\ \text{διάνυσμα}}} + \overbrace{b}^{\substack{\text{(αν μη ομογενές)} \\ \text{διάνυσμα} \\ n \times 1}}$$

Το σημείο ισορροπίας (f.p.) προκύπτει, αν για κάθε χρονική στιγμή t :

$$x_t = x_{t-1} = x^*$$
$$y_t = y_{t-1} = y^*$$

Άρα το *(i)* γίνεται: $\Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \Rightarrow u^* = A \cdot u^*$

$$\Leftrightarrow u^* - Au^* = 0 \Leftrightarrow (I - A)u^* = 0 \Rightarrow \boxed{u^* = 0}$$

Ενώ αν:

$$u_t = Au_{t-1} + b$$

στο σημείο ισορροπίας: $u^* = Au^* + b \Leftrightarrow (I - A)u^* = b \Leftrightarrow \boxed{u^* = (I - A)^{-1} \cdot b}$

Παράδειγμα 1ο

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + 3y_{t-1} \\ y_t = -2x_{t-1} + y_{t-1} \end{cases} \quad (1)$$

Το (1) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$ Δηλαδή στη μορφή: $u_t = A \cdot u_{t-1}$

Τότε, αφού: $I - A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $, \det(I - A) = -6 \neq 0 \Rightarrow x^* = y^* = 0$

Παράδειγμα 2ο

$$\begin{cases} x_t = 4x_{t-1} + 2 \\ y_t = -2y_{t-1} - 3x_{t-1} + 3 \end{cases} \quad (2)$$

Το (2) γράφεται: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Δηλ.: $u_t = A \cdot u_{t-1} + b$

Άρα: $u^* = (I - A)^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Επομένως: $x^* = -\dfrac{2}{3}\ ,\ y^* = \dfrac{5}{3}$