Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Κατηγορίες f.p. σε γραμμικά διαφορικά συστήματα 1ης τάξης

Έστω το γενικό διαφ. σύστημα: $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$

Με: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ⟸ Πίνακας των συντελεστών

$tr(A) = a_{11} + a_{22}$ ⟸ Ίχνος του A

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ⟸ Ορίζουσα του A

$\Delta = \left[tr(A)\right]^2 - 4\det(A)$ ⟸ Διακρίνουσα τριωνύμου χαρακτηριστικής εξίσωσης (χ.ε.): $|A - \lambda I| = 0$

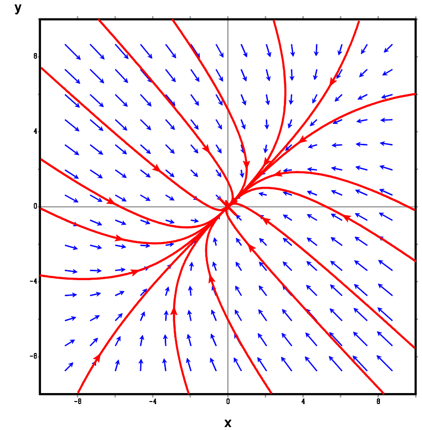
Οι λύσεις της χ.ε. δίνονται από: $\begin{cases} r = \dfrac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} \\ s = \dfrac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$

$$\Delta > 0$$

$\det(A) > 0$

$tr(A) < 0$

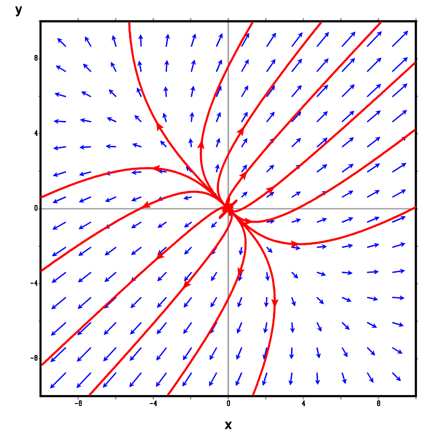
r , s : ομόσημες & αρνητικές



Ευσταθές - Κόμβος

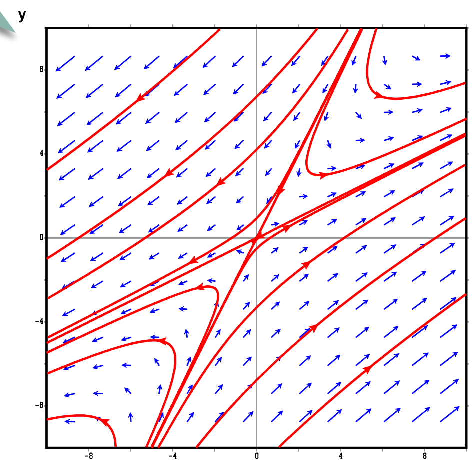
$tr(A) > 0$

r , s : ομόσημες & θετικές



Ασταθές - Κόμβος

$\det(A) < 0$

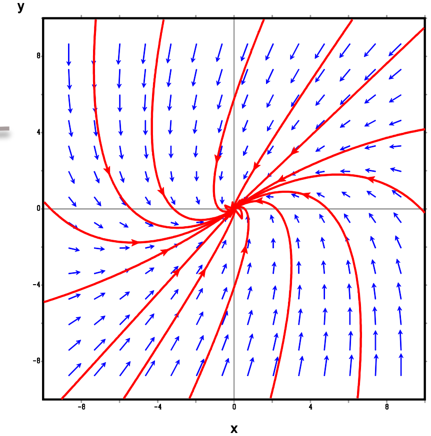


r , s : ετερόσημες

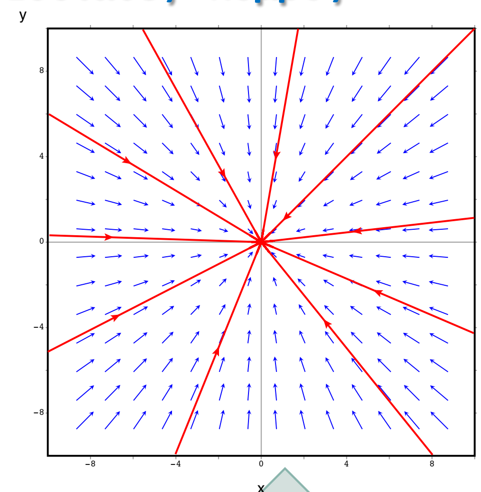
Ευστάθεια ***(υπό συνθήκες, ανάλογη των αρχ. συνθ.)*** **- Σάγμα**

$$\Delta = 0$$

$tr(A) < 0$



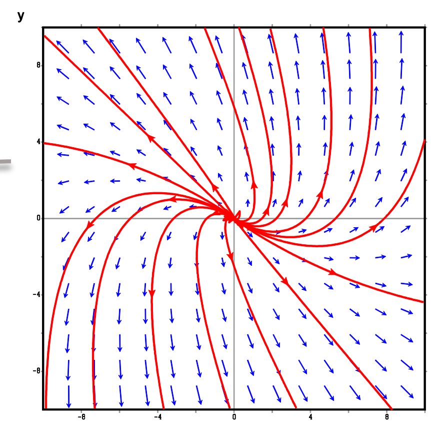
Ευσταθές - Κόμβος



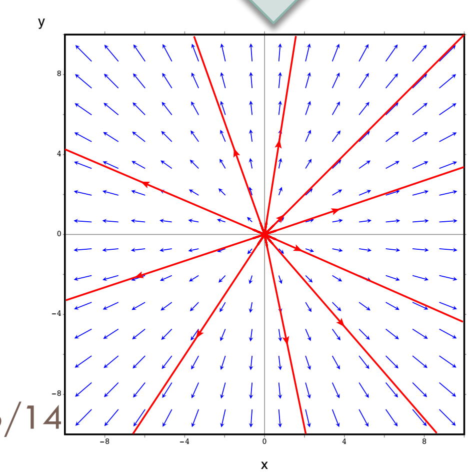
$r\ ,\ s$: πραγμ. & ίσες

Άστρο , $a_{11} = a_{22}$
και $a_{12} = a_{21} = 0$

$tr(A) > 0$



Ασταθές - Κόμβος

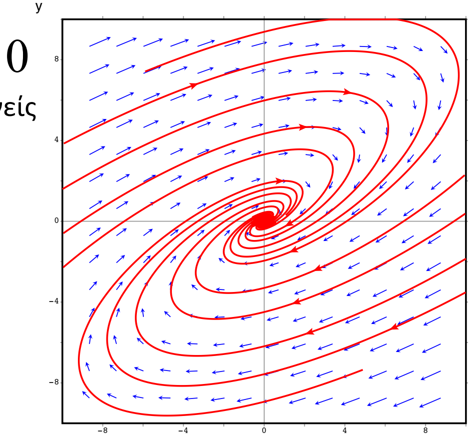


$$\Delta < 0$$

$tr(A) \neq 0$

$tr(A) < 0$

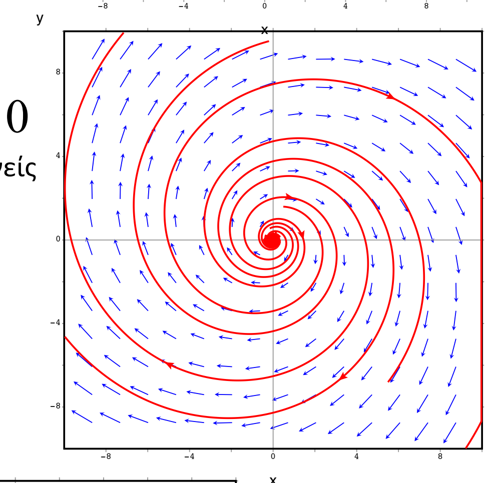
$r\,,s$: συζυγείς μιγαδικές



Ευσταθές - Σπείρα

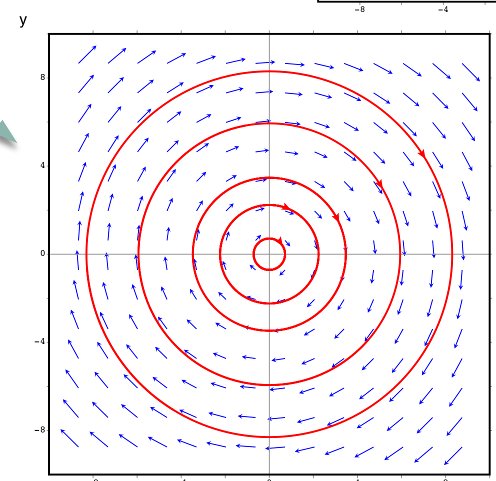
$tr(A) > 0$

$r\,,s$: συζυγείς μιγαδικές



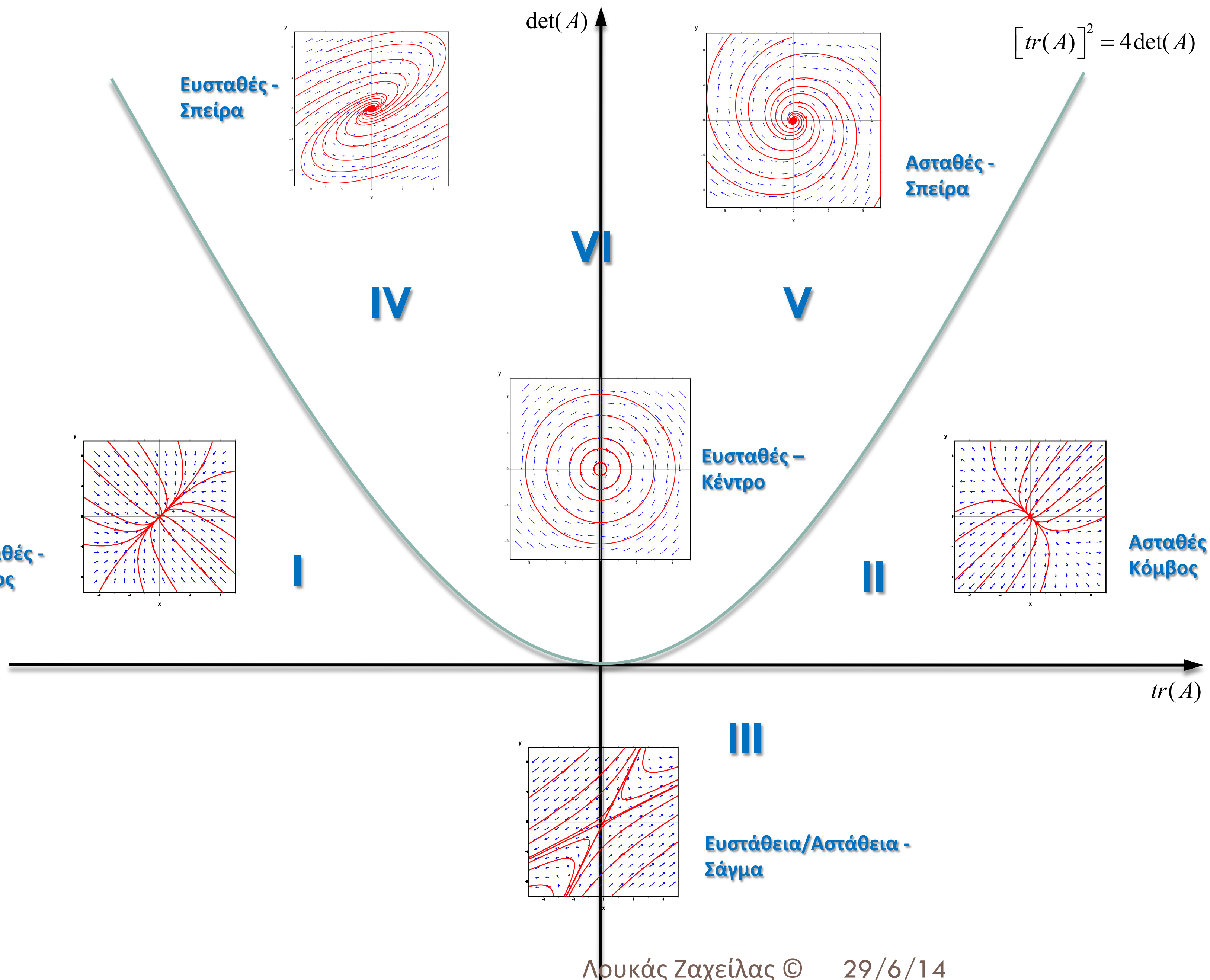
Ασταθές - Σπείρα

$tr(A) = 0$



$r\,,s$: φανταστικές

Ευσταθές – Κέντρο


det(A)
[tr(A)]^2 = 4det(A)
Ευσταθές -
Σπείρα
Ασταθές -
Σπείρα
VI
IV
V
Ευσταθές –
Κέντρο
Ευσταθές -
Κόμβος
I
II
Ασταθές -
Κόμβος
tr(A)
III
Ευστάθεια/Αστάθεια -
Σάγμα

Οριακοί κύκλοι

: κλειστές ολοκληρωτικές καμπύλες, που λέγονται και τροχιές

: ασυμπτωτικά ευσταθείς, εάν και μόνο όλες οι γειτονικές τροχιές τείνουν να πέσουν πάνω τους (είτε από μέσα, είτε από έξω), ενώ..
ασταθείς, εάν και μόνο όλες οι γειτονικές τροχιές απομακρύνονται

: είναι περιοδική τροχιά (και όχι σημείο ισορροπίας, f.p.) και ως εκ τούτου η ευστάθεια (ή αστάθεια) καλείται τροχιακή ευστάθεια (ή αστάθεια)

Ερώτηση: Πώς και πότε εμφανίζονται οι οριακοί κύκλοι;

Απάντηση: Θεώρημα Poincare – Bendixson

Αν σε μια περιοχή R, κάθε τροχιά που ξεκινά εντός της R, παραμένει στην R για όλο το χρονικό διάστημα, τότε δύο δυνατότητες υπάρχουν:

(1) η τροχιά να προσεγγίσει ένα f.p. καθώς το $t \to \infty$ ή

(2) η τροχιά να προσεγγίσει έναν οριακό κύκλο καθώς $t \to \infty$

Τότε η περιοχή R ονομάζεται **αμετάβλητο σύνολο** (*invariant set*)

Σημαντικές παρατηρήσεις για τους οριακούς κύκλους

1. Οι οριακοί κύκλοι είναι περιοδικές κινήσεις και άρα το σύστημα έχει μιγαδικές ρίζες
2. Αν οι οριακοί κύκλοι είναι ευσταθείς, τότε κάθε τροχιά στο εσωτερικό του πρέπει να αποκλίνει από το f.p. ($\mathrm{trace}(J) > 0$)
3. Αν οι οριακοί κύκλοι είναι ευσταθείς, οι εξωτερικές τροχιές συγκλίνουν στην κλειστή τροχιά ($\mathrm{trace}(J) < 0$)
4. Άρα έχουμε ευσταθή οριακό κύκλο, εκεί που το $\mathrm{trace}(J)$ αλλάζει πρόσημο
5. Το Θ. P-B ισχύει μόνο για 2D χώρους
6. Αν υπάρχουν περισσότεροι οριακοί κύκλοι (και το Θ. P-B ισχύει), τότε εναλλάσσονται από ευσταθείς σε ασταθείς. Ο πιο εξωτερικός και ο πιο εσωτερικός είναι ευσταθείς. Και αν υπάρχει μόνο ένας που ικανοποιεί το Θεώρημα, τότε πρέπει να είναι ευσταθής

Παράδειγμα (Maxima)

$$\begin{cases} x' = y + x - x\cdot(x^2+y^2) \\ y' = -x + y - y\cdot(x^2+y^2) \end{cases}$$

Δοκιμάστε αρχικές συνθήκες:
$(x, y) = (0{,}5,\ 0{,}5)$ & $(1{,}5,\ 1{,}5)$

Άσκηση: (Μοντέλο van der Pol)

Η διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης: $\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0$

Μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως: $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\mu(1-x^2)y-x\end{cases}$

Δοκιμάστε αρχικές συνθήκες:
$(x,y)=(0.5,\ 0.5)$ & $(1.5,\ 4)$

Άσκηση: (Μοντέλο Walrasian)

Έστω Y: εκροή μιας καλής οικονομίας
και L: εισροή εργατική

Τότε ορίζεται μια συνάρτηση παραγωγής (*διπλά διαφορίσιμη και αντιστρέψιμη*):

$$Y=f(L)\Leftrightarrow L=f^{-1}(Y)=\varphi(Y)\ \&\ \varphi'(Y)>0$$

Στην ισορροπία, η τιμή $p^*=\varphi(Y)=c_1+c_2Y$ και $D(p^*,\varphi(Y^*))=Y^*$

Τελικά: $\dot{p}=\alpha\cdot\left[D\left(p,\varphi(Y)-Y\right)\right]\quad,\alpha>0$

$\dot{Y}=\beta\cdot[p-\varphi'(Y)]\quad,\beta>0$

Έστω: $\varphi'(Y)=0{,}87+0{,}5Y$

$D(p)=-0{,}02p^3+0{,}8p^2-9p+50$

Βρείτε το f.p. (Υποδ.: $p^*=13$, $Y^*=24{,}26$)

Τότε (για $\alpha=1$):

$$\dot{p}=-0{,}02p^3+0{,}8p^2-9p+50-Y$$
$$\dot{Y}=\beta\cdot[p-0{,}87-0{,}5Y]$$

Να μελετηθεί για διάφορες τιμές της παραμέτρου β.

Διαφορικές εξισώσεις & συστήματα με τη μέθοδο Euler (στο Excel)

Η διαφορική εξίσωση (ή πρόβλημα αρχικών τιμών): $\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad , x(t_0) = x_0$

Έχει ως λύση: $x = \varphi(t) = ?$

Τότε (σε διακριτό χρόνο, αλλά μικρό Δt): $x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}) \cdot \Delta t$

Ενώ, αν έχουμε διαφορικό σύστημα: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad , x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \quad , y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Τότε: $$x_1 = x_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta t$$
$$y_1 = y_0 + g(x_0, y_0) \cdot \Delta t$$

Παράδειγμα (στο Excel):

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y + 9$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x + 3$$
$$x(0) = 2, y(0) = 2, \Delta t = 0.01$$

Άσκηση (στο Excel): σύστημα Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$
$$\sigma = 10, r = 28, b = 2.6667, \Delta t = 0.01$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$$

Ασκήσεις:

1. Χρησιμοποιώντας το Maxima, βρείτε τις τροχιές του συστήματος: $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$

και για τις ακόλουθες αρχικές τιμές: $(a)\left(x_0, y_0\right) = (4,2) \quad (c)\left(x_0, y_0\right) = (-4,-2)$

$(b)\left(x_0, y_0\right) = (4,5) \quad (d)\left(x_0, y_0\right) = (-4,5)$

2. Δίνεται το ακόλουθο δυναμικό σύστημα: $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$

(i) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0, y_0) = (4,8)$ και $(x_0, y_0) = (4,2)$ παραμένουν στο τεταρτημόριο I (όπως στο σχήμα της διαφάνειας 86)

(ii) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0, y_0) = (-4,-8)$ και $(x_0, y_0) = (-4,-2)$ παραμένουν στο τεταρτημόριο III (όπως στο σχήμα της διαφάνειας 86)

(iii) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0, y_0) = (2,10)$ και $(x_0, y_0) = (-2,-10)$ περνούν από το ένα τεταρτημόριο στο διπλανό πριν καταλήξουν στο σημείο ισορροπίας

(iv) Το αρχικό σημείο $(x_0, y_0) = (2,-5)$ συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας χωρίς να αλλάξει τεταρτημόριο;

3. Δίνεται το δυναμικό σύστημα: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$

(i) Δείξτε ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι $r = 5$ και $s = -1$

(ii) Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ανωτέρω ιδιοτιμές

(iii) Δείξτε ότι η λύση είναι: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} \end{cases}$

(iv) Βρείτε την ειδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών: $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$

4. Δίνεται το μοντέλο θύματος – θύτη Holling – Tanner:
$$\begin{cases} \dot{x} = x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{6}\right) - \dfrac{6xy}{8+8x} \\ \dot{y} = 0,2y \cdot \left(1 - \dfrac{0,4y}{x}\right) \end{cases}$$

(i) Βρείτε τα f.p.
(ii) Μήπως κάποιο από τα f.p. εξελίσσεται σε ευσταθή οριακό κύκλο;

5. Δίνεται το μοντέλο του ελκυστή του Rossler:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + 0,2y \\ \dot{z} = 0,2 + z \cdot (x - 2,5) \end{cases}$$

(i) Δείξτε ότι το σύστημα έχει έναν οριακό κύκλο περιόδου – ένα
(ii) Σχεδιάστε $x(t)$ ως προς $t = 200$ έως 300 και αποδείξτε ότι το σύστημα καταλήγει να έχει το x δύο διακεκριμένα πλάτη

1. Στα παρακάτω Δ.Δ.Σ. βρείτε τα σημεία ισορροπίας (f.p.) και κατατάξτε τα σε ελκυστές, απωθητές ή τίποτα εκ των δύο:

$$(i)\ \ y_{n+1} = y_n - y_n^2$$

$$(ii)\ y_{n+1} = 2y_n - 2y_n^2$$

$$(iii)\ y_{n+1} = y_n^3 + \mu y_n\ , \mu = -1/9, -1, -1{,}5$$

Τι παρατηρείτε να συμβαίνει στο μ = -1; Πώς εξελίσσεται το Δ.Δ.Σ.;

2. Η ακολουθία Fibonacci είναι η: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad , \ x_0 = 1\, , x_1 = 1$

(i) Χρησιμοποιώντας το Excel, δημιουργήστε αυτή την ακολουθία και βρείτε τους 50 πρώτους όρους (επαληθεύστε ότι όλοι είναι ακέραιοι).

(ii) Λύστε το Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης με τη χρήση του Maxima*.

(iii) Μπορείτε να βρείτε σε ποιον αριθμό συγκλίνει ο λόγος των διαδοχικών όρων y_{n+1} / y_n; Τον λόγο αυτόν, τον βρήκατε – μήπως – πιο πριν;

*Το Maxima χρησιμοποιεί την συνάρτηση “solve_rec” για να λύσει γραμμικές εξισώσεις διαφορών. Οι εντολές (π.χ.) για να λύσετε το Δ.Δ.Σ.: $y_{n+2} = a*y_{n+1}+b*y_n$ είναι:

```
(%i1) load(solve_rec)$
(%i2) solve_rec(f[n+2]=a*f[n+1]+b*f[n],f[n]);
```

Αν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (π.χ.): $f(1) = 1, f(2) = 2$, τότε:

```
(%i3) solve_rec(f[n+2]=a*f[n+1]+b*f[n],f[n],f[1]=1,f[2]=2);
```

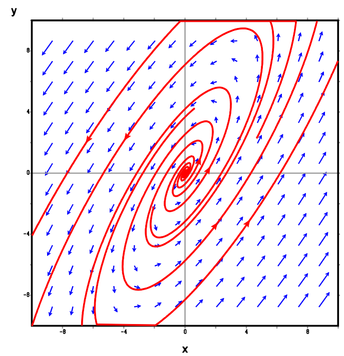
3. Δίνονται οι πιο κάτω πίνακες (που αντιστοιχούν σε κάποιο γραμμικό διαφορικό σύστημα):

$$(i)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, (ii)\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, (iii)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

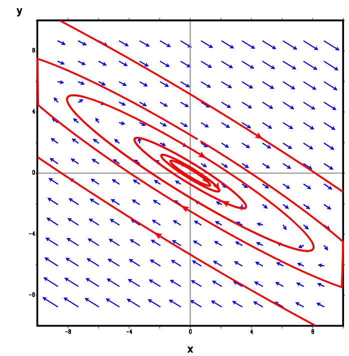
$$(iv)\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, (v)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, (vi)\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Και στην πιο κάτω εικόνα, δίνονται τα φασικά πορτραίτα των 6 ανωτέρω συστημάτων. Βρείτε πιο πορτραίτο αντιστοιχεί σε ποιο γραμμικό σύστημα;

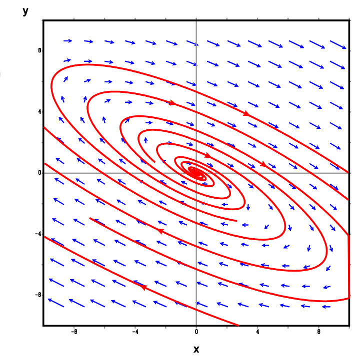
(1)



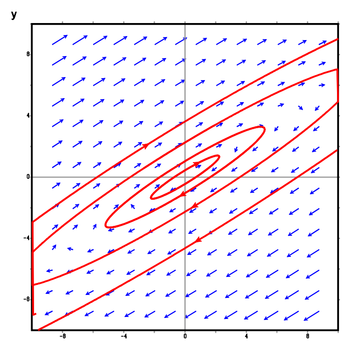
(2)



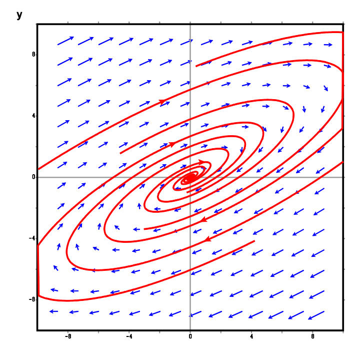
(3)



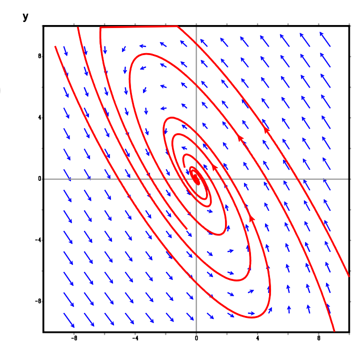
(4)



(5)



(6)



4. Χρησιμοποιώντας το Excel, συγκρίνατε τα δύο Δ.Δ.Σ., και για τις τιμές των παραμέτρων – αρχικών τιμών που δίνονται:

$$y_{t+1} = (1+a)y_t - by_t^2$$

$$x_{t+1} = \frac{(1+a)x_t}{1+bx_t}$$

$(i)\ a = 1{,}5 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 1$

$(ii)\ a = 1{,}5 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 22$

$(iii)\ a = 2{,}2 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 1$

$(iv)\ a = 2{,}2 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 22$

5. Να μελετηθούν ως προς την ευστάθεια, τα παρακάτω μοντέλα προσφοράς – ζήτησης:

$(i)\ q_t^d = 10 - 3p_t, \quad q_t^s = 2 + p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$

$(ii)\ q_t^d = 25 - 4p_t, \quad q_t^s = 3 + 4p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$

$(iii)\ q_t^d = 45 - 2{,}5p_t, \quad q_t^s = 5 + 7{,}5p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$

6. Δίνεται το ακόλουθο δυναμικό σύστημα: $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$

(i) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0 , y_0) = (4,8)$ και $(x_0 , y_0) = (4,2)$ παραμένουν στο τεταρτημόριο I (όπως στο σχήμα της διαφάνειας 86)

(ii) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0 , y_0) = (-4,-8)$ και $(x_0 , y_0) = (-4,-2)$ παραμένουν στο τεταρτημόριο III (όπως στο σχήμα της διαφάνειας 86)

(iii) Δείξτε ότι τα σημεία $(x_0 , y_0) = (2,10)$ και $(x_0 , y_0) = (-2,-10)$ περνούν από το ένα τεταρτημόριο στο διπλανό πριν καταλήξουν στο σημείο ισορροπίας

(iv) Το αρχικό σημείο $(x_0 , y_0) = (2,-5)$ συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας χωρίς να αλλάξει τεταρτημόριο;

7. Δίνεται ο ελκυστής του Rossler: $\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z\cdot(x - c) \end{cases}$

Χρησιμοποιείστε στο Excel τη μέθοδο Euler για να επιλύσετε το παραπάνω διαφορικό σύστημα. Επιλέξτε ως βήμα ολοκλήρωσης $\Delta t = 0{,}01$, και $a = 0{,}4$, $b = 2$, $c = 4$, για να υπολογίστε την τροχιά με αρχικές συνθήκες: $(x, y, z) = (0{,}1\ ,\ 0{,}1\ ,\ 0{,}1)$ και σχεδιάστε τις τρεις προβολές της (x, y) , (x, z) , (y, z).