Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων 1^{ΗΣ} τάξης

Μέρος 3^{ο}

Ορισμοί – Αυτόνομα συστήματα

Πολλά οικονομικά μοντέλα καταλήγουν σε συστήματα δύο δ. εξ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x,y,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x,y,t) \end{cases} \quad (1)$$

Π.χ.: $(i)\begin{cases} \dot{x} = ax - by - ce^t \\ \dot{y} = rx + sy - qe^t \end{cases}$ $\qquad (ii)\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = rx - sxy \end{cases}$

Το (i) : <u>γραμμικό</u> δ.σ. 1ης τάξης, ενώ το (ii) : <u>μη – γραμμικό</u> δ.σ. 1ης τάξης
Το (i) : <u>μη – αυτόνομο</u> δ.σ. (επειδή περιέχει τον χρόνο t), ενώ το (ii) : <u>αυτόνομο</u> (τα περισσότερα οικονομικά μοντέλα είναι αυτόνομα)
Το (i) : μη – ομογενές (επειδή περιέχει τον όρο ce^t), ενώ το (ii) : ομογενές

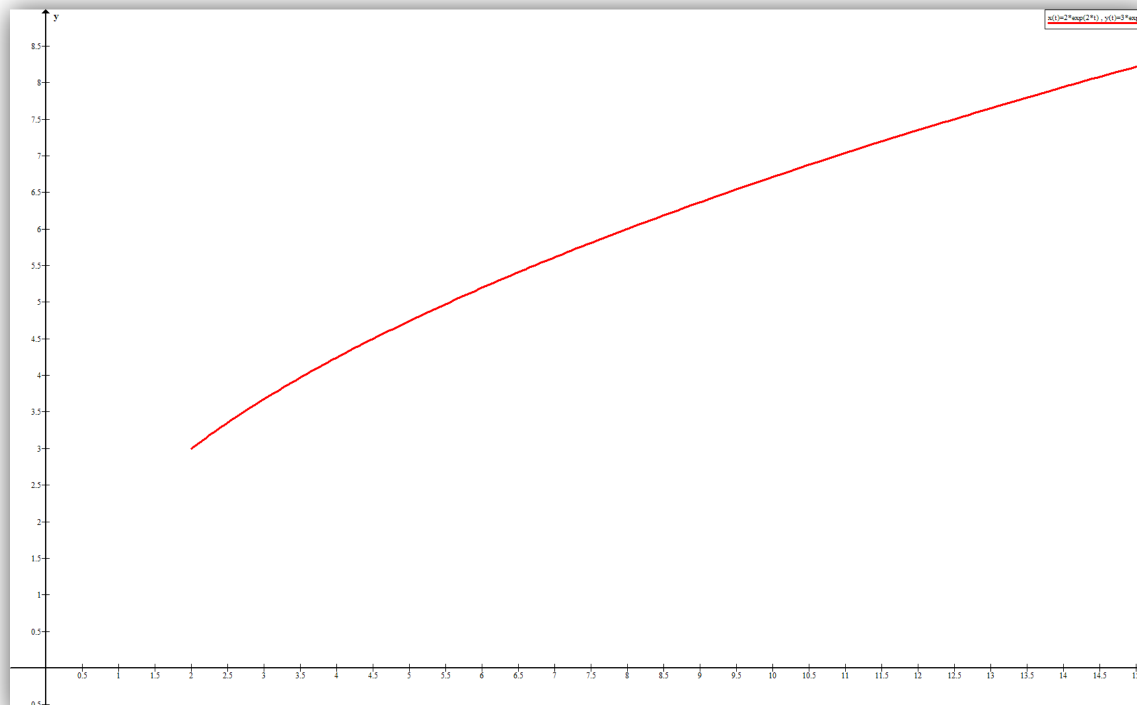
<u>Λύση</u> του (1) είναι ένα ζευγάρι παραμετρικών εξισώσεων, $x = x(t)$, $y = y(t)$ που ικανοποιούν την (1) σε κάποιο διάστημα.
Αν έχουμε και αρχικές συνθήκες: $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, τότε έχουμε πρόβλημα αρχικών τιμών.

Παράδειγμα 1°: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y \\ x(0) = 2, y(0) = 3 \end{cases}$$

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 2x \Rightarrow x(t) = 2e^{2t} \\ \dot{y} = y \Rightarrow y(t) = 3e^{t} \end{array}\right\}$$



Διάγραμμα φάσεων – σταθερά σημεία (f.p.) – ευστάθεια

Στις δ. εξ. 1ης τάξης : φασική γραμμή (phase line)

Στα δ.σ. (όπως φάνηκε και στο Παρ. 1), το διάγραμμα ονομάζεται **φασικό επίπεδο** (phase plane)

Στα δ.σ. τριών διαστάσεων (x, y, z), έχουμε τον **φασικό χώρο** (phase space)

Η καμπύλη – λύση που απεικονίζεται στο φασικό επίπεδο/χώρο, ονομάζεται **τροχιά** του δ.σ.

Αν (x^*, y^*) : σημείο του φασικού επιπέδου για το οποίο $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$ (ταυτόχρονα), τότε:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

και το σημείο (x^*, y^*) ονομάζεται **σταθερό σημείο** (fixed point)

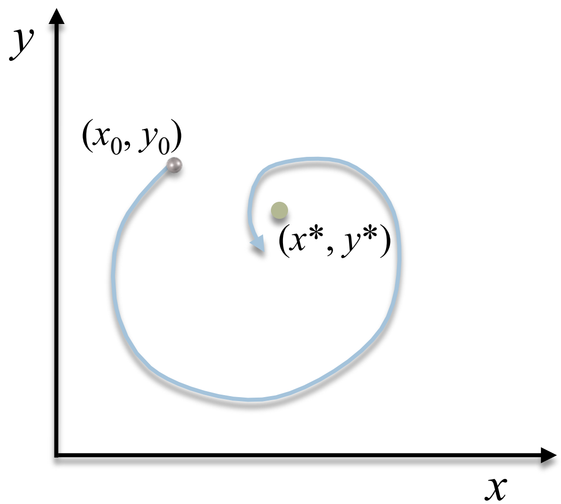
Στο παράδειγμα 1, το f.p. είναι:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{cases}$$

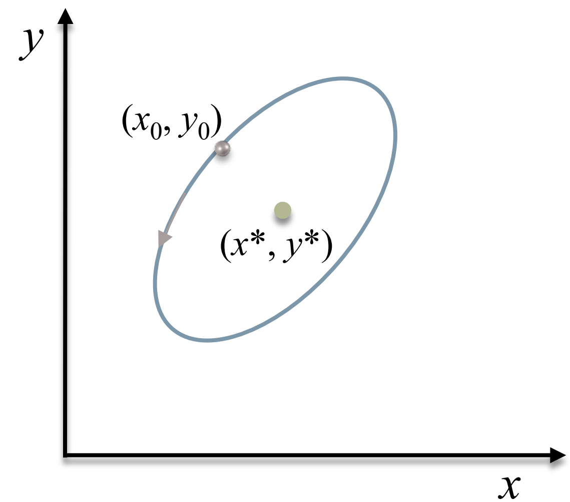
Παρατήρηση: Το $(0,0)$ είναι πάντα f.p. στα ομογενή και αυτόνομα δ.σ.

Ευστάθεια (κατά Lyapunov)

1. Ένα f.p. (x^*, y^*) : ευσταθές (ή ελκυστικό) ⟺ Για κάποια (x_0, y_0) κοντά στο (x^*, y^*), η τροχιά παραμένει κοντά στο f.p.



Η τροχιά με αρχικές συνθήκες (x_0, y_0) πλησιάζει το f.p.



Περιοδική τροχιά γύρω από το f.p. (οριακός κύκλος : limit cycle)

2. Αν το (x^*, y^*) δεν είναι ευσταθές (κατά τις ανωτέρω έννοιες) τότε: ασταθές ή απωθητικό.

3. Το f.p. : ασυμπτωτικά ευσταθές $\Longleftrightarrow$ Ευσταθές και κάποια τροχιά του πλησιάζει το f.p. καθώς $t \to \infty$

4. Αν το (3.) ισχύει για κάθε τροχιά, τότε το f.p. ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές

5. Το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο αρχικών συνθηκών, που συγκλίνουν στο f.p., λέμε ότι αποτελεί μια λεκάνη ελκυσμού (*basin of attraction*)

Παράδειγμα 1ο

Να μελετηθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -2x + y \\ x(0) = 4, \;\; y(0) = 5 \end{cases}$$

Λύση:

Βήμα 1ο : $x(t) = \cdots$

$y(t) = \cdots$

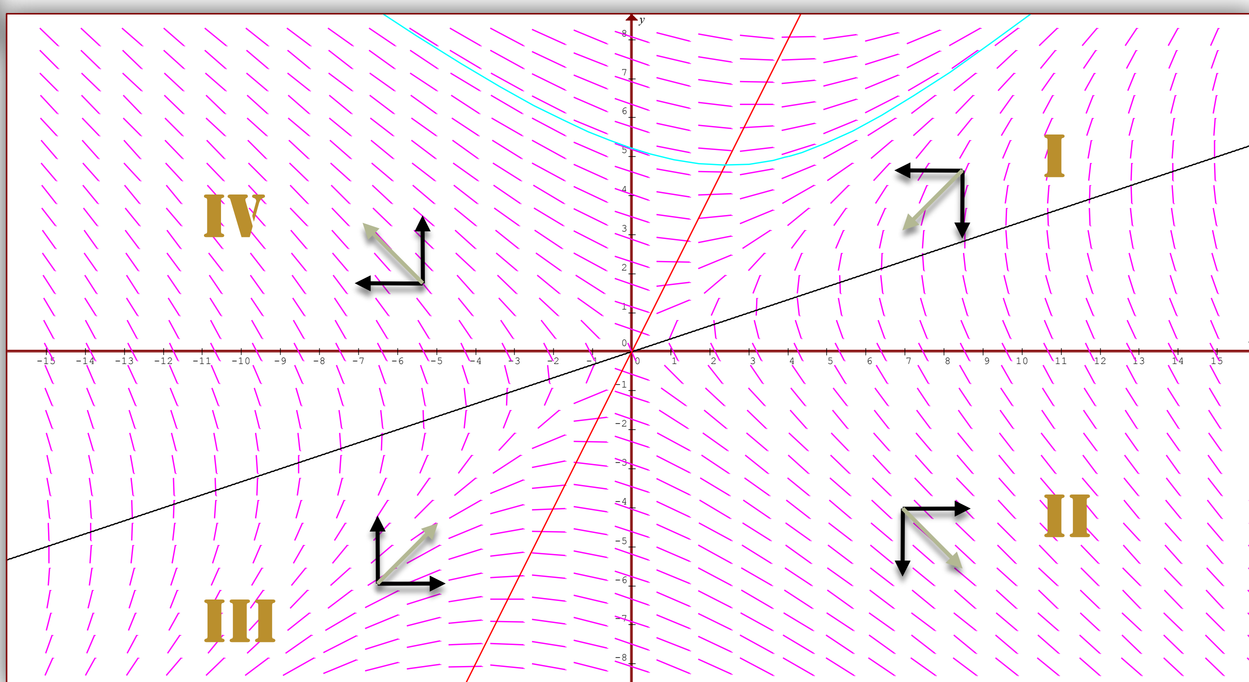
Την λύση θα την βρούμε αργότερα...

Βήμα 2ο : Το f.p. θα βρεθεί όταν λύσουμε το σύστημα: $\dot{x} = \dot{y} = 0$

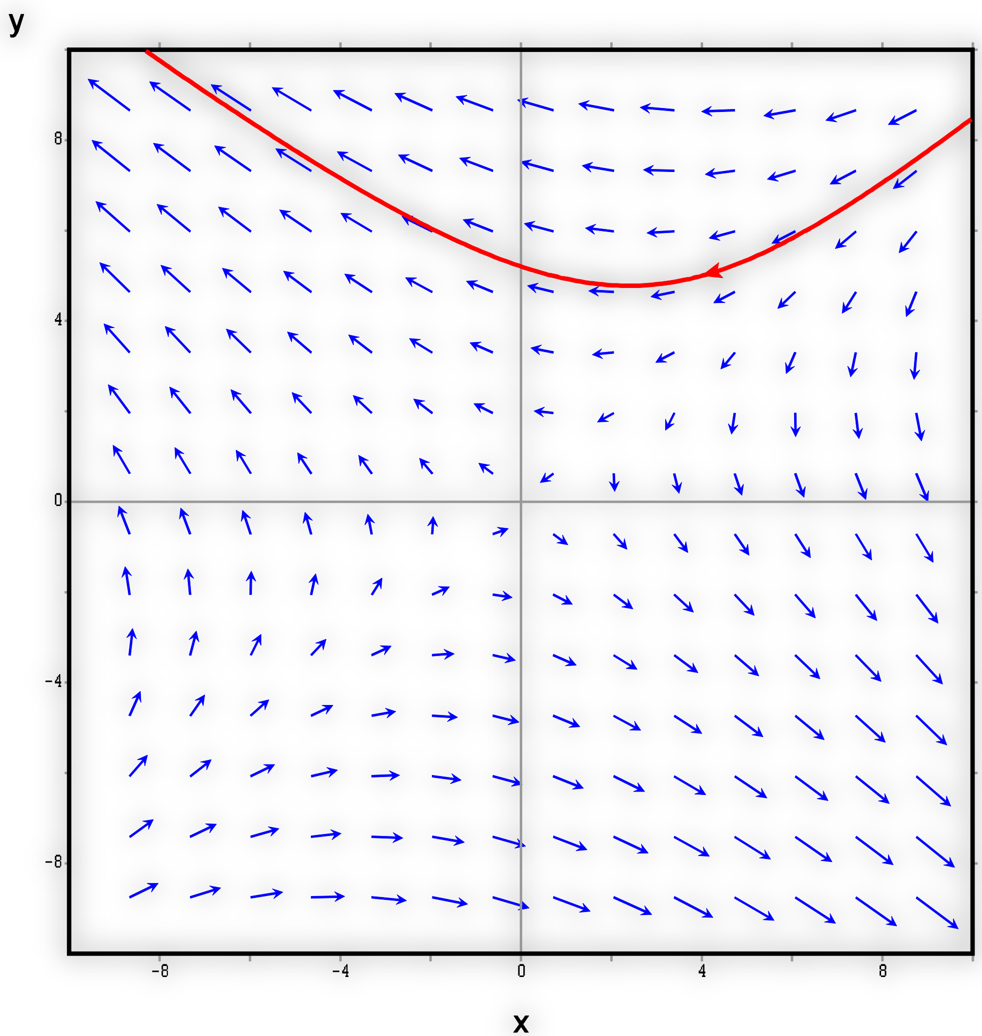
Δηλ.:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = y^* = 0$$



dx=x-3*y; dy=-2*x+y {0, 4, 5} {vars: x,y}



(%i1) load(“plotdf”)$ Φορτώνει το πακέτο «plotdf» στο *Maxima*

(%i2) plotdf([x-3*y,-2*x+y],[x,y],[trajectory_at,4,5])$ Σχεδιάζει τη λύση στο επίπεδο (x, y)

(%i3) plotdf([m*x-k*y,-2*x+y],[x,y],[trajectory_at,4,5],[parameters,”m=1,k=1”],[sliders,”m=1:5,k=1:5”])$

Άσκηση :

Να μελετηθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 9 \\ \dot{y} = -x + y + 3 \\ x(0) = 2, \;\; y(0) = 2 \end{cases}$

(Υπόδ.): $\begin{cases} x(t) = 2 + 2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{3t}{2}} \\ y(t) = 5 - \left(3\cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{3t}{2}} \end{cases}$

Και το f.p. είναι στο $(x^*, y^*) = (4, 1)$

Χρήση πινάκων στη μελέτη των Δ.Σ.

Το διαφ. σύστημα του παραδείγματος 1 μπορεί να γραφεί:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αν ορίσουμε (γενικά): $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Τότε κάθε διαφορικό σύστημα μπορούμε να το γράψουμε: $\dot{x} = A \cdot x + b$

Σημαντική παρατήρηση:
Αν το δ.σ. είναι γραμμικό & ομογενές (*όπως είναι τα συνηθισμένα οικονομικά μοντέλα*) και η ορίζουσα του A δεν είναι μηδέν, τότε το μοναδικό f.p. θα είναι το $(0,0)$

Αποδεικνύεται ότι η λύση του δ.σ. (*δύο μεταβλητών* x, y): $\dot{x} = A \cdot x$

δίνεται από την: $x = c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2$

όπου: c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές και u_1, u_2 διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα, με:

$$u_1 = e^{rt} v_r \, , \; u_2 = e^{st} v_s$$

Τα r, s είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και v_r, v_s τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

...συνέχεια και τέλος του Παραδείγματος 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

```
(%i1) A: matrix([1,-3],
                [-2,1]);
(%o1) matrix([1,-3],[-2,1])

(%i2) da: determinant(A);
(%o2)   -5

(%i4) ma: mat_trace(A);
(%o4)  2
```

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα (*πάντα με το Maxima*)

```
(%i6) eigenvalues(A);
(%o6) [[1-sqrt(6),sqrt(6)+1],[1,1]]
```

Το Maxima βρίσκει 2 ιδιοτιμές: $r = 1-\sqrt{6}\,,\, s = 1+\sqrt{6}$

```
(%i7) eigenvectors(A);
(%o7) [[[1-sqrt(6),sqrt(6)+1],[1,1]],[1,sqrt(6)/3],[1,-sqrt(6)/3]]
```

… και 2 ιδιοδιανύσματα (γραμμ. ανεξάρτητα): $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

Άρα η λύση θα είναι:

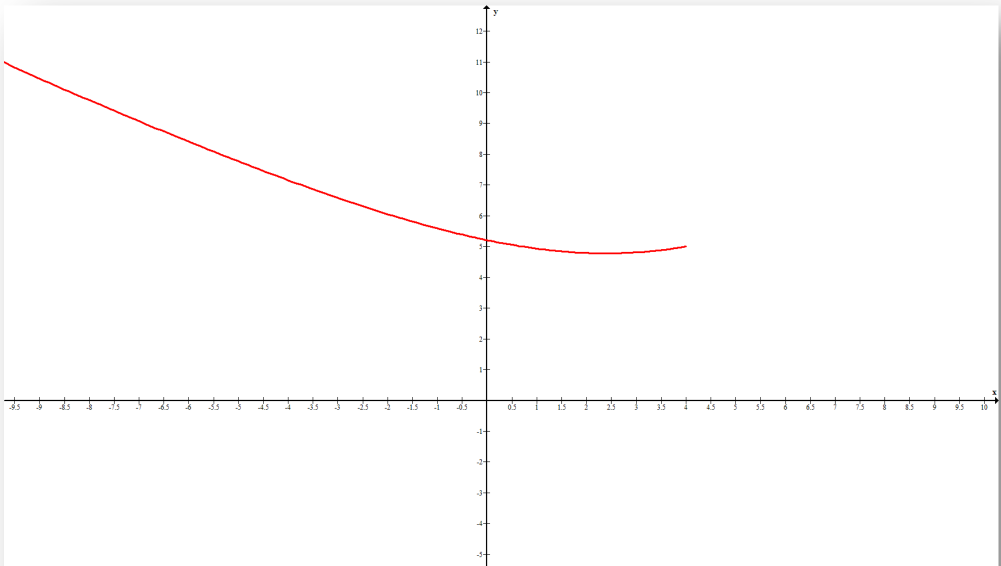
$$x = c_1 e^{rt} \cdot v_r + c_2 e^{st} \cdot v_s = c_1 e^{(1-\sqrt{6})t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} + c_2 e^{(1+\sqrt{6})t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{(1-\sqrt{6})t} + c_2 e^{(1+\sqrt{6})t} \\ y(t) = c_1 \frac{\sqrt{6}}{3} e^{(1-\sqrt{6})t} - c_2 \frac{\sqrt{6}}{3} e^{(1+\sqrt{6})t} \end{cases}$$

Αν $x(0) = 4\,,\, y(0) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ c_1 \frac{\sqrt{6}}{3} - c_2 \frac{\sqrt{6}}{3} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{8+5\sqrt{6}}{4} \\ c_2 = \frac{8-5\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Και άρα η ειδική λύση (*όπως την σχεδιάσαμε στην αρχή*):

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{8e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} + 5\sqrt{6}e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} + 8e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} - 5\sqrt{6}e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t}}{4} \\ y(t) = \dfrac{15e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} + 4\sqrt{6}e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} + 15e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} - 4\sqrt{6}e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t}}{6} \end{cases}$$



Λουκάς Ζαχείλας ©

Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί (με τη χρήση πινάκων) η γενική λύση του: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases}$

Λύση:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} \det(A) = 6 > 0 \\ tr(A) = 5 \end{matrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι: $\left| A - \lambda I \right| = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = r = 3 \\ \lambda_2 = s = 2 \end{cases}$

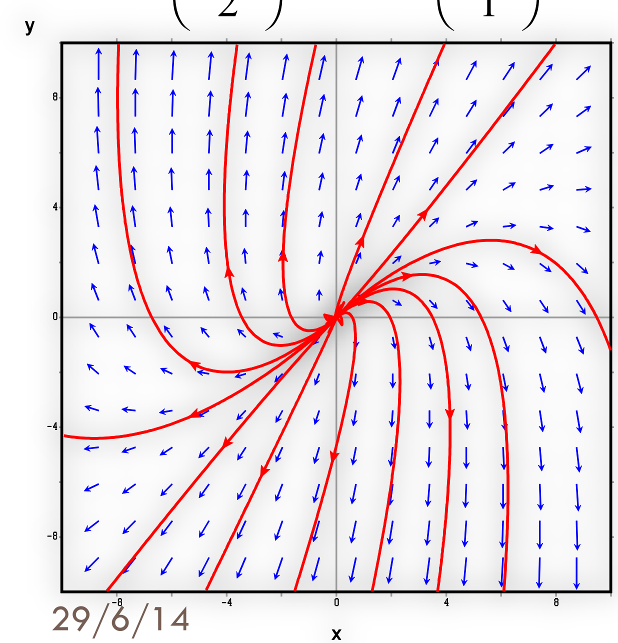
Και επομένως τα ιδιοδιανύσματα θα είναι: $v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ & $v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα η γενική λύση:

$$x = c_1 e^{rt} \cdot v_r + c_2 e^{st} \cdot v_s = c_1 e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

Αν $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, τότε τα $c_1 = 2$ & $c_2 = -1$

Και άρα η ειδική λύση: $\begin{cases} x(t) = 2e^{3t} - e^{2t} \\ y(t) = 4e^{3t} - e^{2t} \end{cases}$



Εναλλακτικός τρόπος εύρεσης της λύσης του Παραδείγματος 2 με τη χρήση της εντολής 'desolve' του Maxima

```
(%i1) atvalue(x(t),t=0,1);
(%o1) 1
(%i2) atvalue(y(t),t=0,3);
(%o2) 3
(%i3) 'diff(x(t),t)=x(t)+y(t);
(%o3) 'diff(x(t),t,1)=y(t)+x(t)
(%i4) 'diff(y(t),t)=-2*x(t)+4*y(t);
(%o4) 'diff(y(t),t,1)=4*y(t)-2*x(t)
(%i5) desolve([%o3,%o4],[x(t),y(t)]);
(%o5) [x(t)=2*%e^(3*t)-%e^(2*t),y(t)=4*%e^(3*t)-%e^(2*t)]
```

Ορισμός αρχικών τιμών

Εισαγωγή των δύο διαφ. εξ.

Εντολή '**desolve**'

Ασκήσεις :

Να βρεθεί (με τη χρήση πινάκων) η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών συστημάτων 1ης τάξης, και να γίνει η γραφική επίλυση με τη χρήση του Maxima:

$$(i)\begin{cases}\dot{x}=x-y\\ \dot{y}=x+3y\end{cases}$$

Υπόδ.: διπλή ιδιοτιμή

$$x=c_1e^{rt}\cdot v+c_2\cdot(e^{rt}t\cdot v+e^{rt}v_2)$$

$$(ii)\begin{cases}\dot{x}=-3x+4y\\ \dot{y}=-2x+y\end{cases}$$

Υπόδ.: μιγαδικές ιδιοτιμές

$$x=c_1\cdot u_1+c_2\cdot u_2 \qquad \begin{aligned}u_1&=e^{\alpha t}(b_1\cos\beta t+b_2\sin\beta t)\\ u_2&=e^{\alpha t}(b_1\cos\beta t-b_2\sin\beta t)\end{aligned}$$