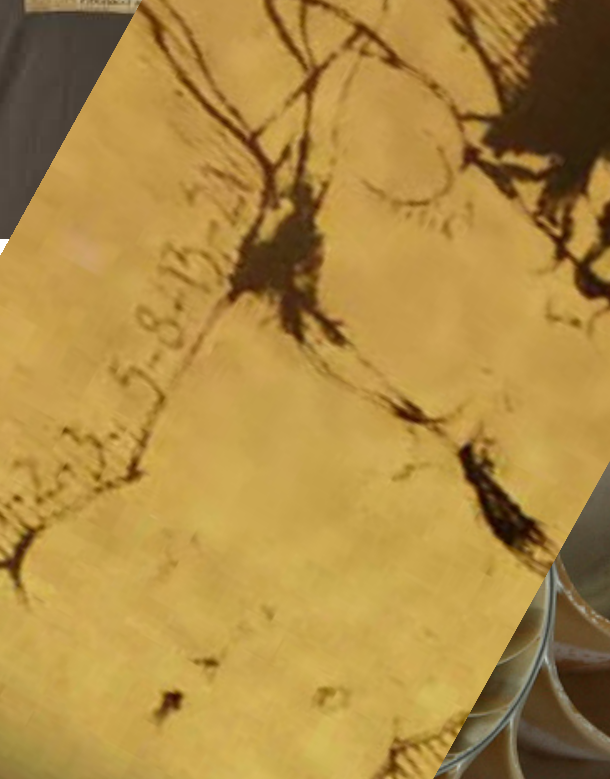
Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

29/6/14


0, 1, 1, 2,
3, 5, 8, 13,
21, 34, 55, 89,
144, 233, 377,
610, 987, ...


1+1=2
1+2=3
2+3=5
3+5=8
5+8=13



Fringe: Season 1 – Episode 10

Επίλυση Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης

Έστω το γενικό Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης: $$y_{n+2} = a \cdot y_{n+1} + b \cdot y_n \quad (1)$$

(*Όπως στα Δ.Δ.Σ. 1ης τάξης*) ας υποθέσουμε ότι η λύση είναι της μορφής:

$$y_n = c_1 r^n + c_2 s^n$$

όπου r , s : σταθερές και c_1, c_2 σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές τιμές y_0 , y_1

Η (1), τότε, γράφεται: $$c_1 r^{n+2} + c_2 s^{n+2} = a \cdot \left(c_1 r^{n+1} + c_2 s^{n+1}\right) + b \cdot \left(c_1 r^n + c_2 s^n\right) \Rightarrow$$

$$c_1 r^n \cdot \left(r^2 - ar - b\right) + c_2 s^n \cdot \left(s^2 - as - b\right) = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση: $x^2 - ax - b = 0$: **χαρακτηριστική εξίσωση**

$\longrightarrow$ $x_1 = r \neq s = x_2 \Rightarrow y_n = c_1 r^n + c_2 s^n$: γενική λύση

Αν: $r > s \Rightarrow y_1 = c_1 r^n$: η κύρια λύση και r : η κύρια χαρακτηριστική ρίζα

Αν είναι γνωστές οι αρχικές τιμές y_0 , y_1 $$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{y_1 - s y_0}{r - s} \\ c_2 = \dfrac{y_1 - r y_0}{s - r} \end{cases}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες :

$$r, s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$\xrightarrow{a^2 > -4b}$ Πραγματικές άνισες

$\xrightarrow{a^2 = -4b}$ Πραγματικές (διπλή)

$\xrightarrow{a^2 < -4b}$ Μιγαδικές

Παράδειγμα 1ο:

Να μελετηθεί το Δ.Δ.Σ.: $y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$

Λύση:

Το Δ.Δ.Σ. γράφεται: $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ έχει ρίζες: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, η γενική λύση είναι: $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n$

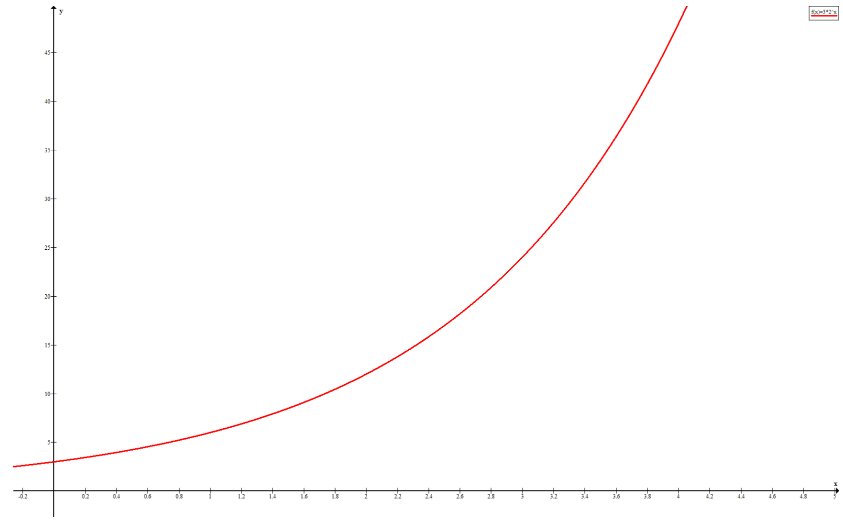
Αν είχαμε το πρόβλημα των αρχικών τιμών: $y_0 = 5$, $y_1 = 4$

Οι σταθερές υπολογίζονται ως: $c_1 = 3$, $c_2 = 2$

Άρα η ειδική λύση είναι: $y_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n$

$r > s$

Άρα η κύρια χαρακτηριστική ρίζα είναι το $r = 2$



Οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις σχετικά με την ευστάθεια:

$(i)\ r > 1 \Rightarrow c_1 r^n \to \infty \Rightarrow$ Δ.Δ.Σ. : ασταθές

$(ii)\ r = 1 \Rightarrow c_1 r^n \to c_1$ Σταθερή ακολουθία

$(iii)\ 0 \le r < 1 \Rightarrow c_1 r^n \to 0$ Δ.Δ.Σ. : ευσταθές *(με μορφή σκάλας)*

$(iv)\ -1 < r < 0 \Rightarrow c_1 r^n \to 0$ Δ.Δ.Σ. : ευσταθές *(με μορφή ιστού αράχνης)*

$(v)\ r = -1 \Rightarrow c_1 r^n \to$ Ταλαντώνεται μεταξύ δύο τιμών

$(vi)\ r < -1 \Rightarrow c_1 r^n \to$ Ταλαντώνεται αλλά με αυξανόμενο μέγεθος

Παράδειγμα 2ο:

Να μελετηθεί το Δ.Δ.Σ.: $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 4y_n$

Λύση:

Το Δ.Δ.Σ. γράφεται: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση: $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει ρίζες: $x_1 = 2 = x_2$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, η γενική λύση είναι: $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν είχαμε το πρόβλημα των αρχικών τιμών: $y_0 = 6$, $y_1 = 4$

Οι σταθερές υπολογίζονται ως: $c_1 = 6$, $c_2 = -4$

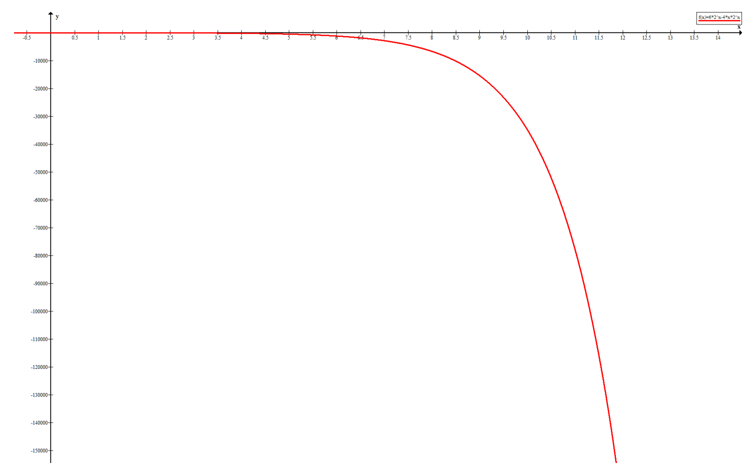
Άρα η ειδική λύση είναι: $y_n = 6 \cdot 2^n - 4 \cdot n \cdot 2^n$

Οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις σχετικά με την ευστάθεια:

$(i)\ r \geq 1 \Rightarrow y_n :$ δεν συγκλίνει

$(ii)\ r \leq -1 \Rightarrow y_n :$ ταλαντώνεται

$(iii)\ |r| < 1 \Rightarrow y_n \to 0$



Αφού $r = 2 > 1$: η y_n αποκλίνει, και άρα το Δ.Σ.Σ. ασταθές

Παράδειγμα 3ο:

Να μελετηθεί το Δ.Δ.Σ.: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 16y_n = 0$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $x^2 - 4x + 16 = 0$, με ρίζες: $r,s = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-64}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

Άρα σε τριγωνομετρική μορφή: $y_n = c_1 \cdot 4^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) + c_2 \cdot 4^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

όπου: $R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$

$\cos\vartheta = \dfrac{a}{R} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\vartheta = \dfrac{b}{R} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \vartheta = \dfrac{\pi}{3}$

Αν είχαμε το πρόβλημα των αρχικών τιμών: $y_0 = 2$, $y_1 = 3$

Οι σταθερές υπολογίζονται ως: $c_1 = 2$, $c_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις σχετικά με την ευστάθεια:

$(i)\ R > 1 \Rightarrow r,s:$ έξω απ' το μοναδιαίο κύκλο ⇨ y_n : αποκλίνει, άρα το Δ.Δ.Σ. ασταθές

$(ii)\ R = 1 \Rightarrow r,s:$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ⇨ y_n : ταλαντώνεται με σταθ. πλάτος

$(iii)\ R < 1 \Rightarrow r,s:$ μέσα στο μοναδιαίο κύκλο ⇨ y_n : συγκλίνει, άρα το Δ.Δ.Σ. ευσταθές

Πληκτρολογήστε στο *Maxima* τις παρακάτω εντολές, για να μελετήσετε και να συγκρίνετε τη λύση στο **Παράδειγμα 1** *(που δόθηκε πιο πριν στα Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης)*

(%i1) load("solve_rec")$ — Φορτώνει το πακέτο «solve_rec» στο *Maxima*

(%i2) solve_rec(y[n+2]=y[n+1]+2*y[n], y[n]);
(%o2) $y_n = \%k_1\ 2^n + \%k_2\ (-1)^n$

Λύνουμε την Δ.Δ.Σ. και υπολογίζουμε τη Γενική Λύση.

(%i3) solve_rec(y[n+2]=y[n+1]+2*y[n], y[n], y[0]=5, y[1]=4);
(%o3) $y_n = 3\ 2^n + 2\ (-1)^n$

Λύνουμε την Δ.Δ.Σ. με αρχικές συνθήκες και υπολογίζουμε τη Ειδική Λύση.

Φυσικά η εντολή solve_rec μπορεί να σας βοηθήσει και να λύσει Δ.Δ.Σ. 1ης τάξης (όπως π.χ. το Παράδειγμα 3):

(%i4) solve_rec(y[n+1]=a*y[n]+c, y[n], y[0]=y0);

(%o4) $y_n = a^n\, y_0 + \frac{a^n c}{a-1} - \frac{c}{a-1}$

Ασκήσεις:

1. Το μοντέλο του Samuelson (1939) σε διακριτό χρόνο, καταλήγει σε ένα Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης:

$$\begin{cases} C_t = a + bY_{t-1} \\ I_t = v\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) \\ G_t = G\ (\forall t) \\ E_t = C_t + I_t + G_t \\ Y_t = E_t \end{cases} \Rightarrow Y_t - (b+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = a + G$$

Να μελετηθεί το μοντέλο για τις εξής τιμές των παραμέτρων: $a = 50$, $b = 0{,}75$, $v = 4$, $G = 100$

2. Χρησιμοποιώντας το Excel, συγκρίνατε τα δύο Δ.Δ.Σ., και για τις τιμές των παραμέτρων – αρχικών τιμών που δίνονται:

$$y_{t+1} = (1+a)y_t - by_t^2$$

$$x_{t+1} = \frac{(1+a)x_t}{1+bx_t}$$

$(i)\ a = 1{,}5 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 1$

$(ii)\ a = 1{,}5 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 22$

$(iii)\ a = 2{,}2 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 1$

$(iv)\ a = 2{,}2 \quad b = 0{,}1 \quad y_0 = x_0 = 22$

3. Να μελετηθούν ως προς την ευστάθεια, τα παρακάτω μοντέλα προσφοράς – ζήτησης:

$$(i)\ q_t^d = 10 - 3p_t, \quad q_t^s = 2 + p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$$

$$(ii)\ q_t^d = 25 - 4p_t, \quad q_t^s = 3 + 4p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$$

$$(iii)\ q_t^d = 45 - 2{,}5p_t, \quad q_t^s = 5 + 7{,}5p_{t-1}, \quad q_t^d = q_t^s$$

4. Δίνεται το ακόλουθο λογιστικό μοντέλο: $y_{t+1} = 3{,}84\, y_t(1 - y_t)$

Να γίνει η μελέτη του σε ένα φύλλο εργασίας του Excel. Ξεκινήστε με αρχική τιμή $y_0 = 0{,}1$ και υπολογίστε τους πρώτους 100 όρους της ακολουθίας. Χρησιμοποιώντας τον 100ο όρο ως αρχική τιμή, υπολογίστε τους επόμενους 100 όρους της ακολουθίας. Επαναλάβετε άλλη μία φορά τη διαδικασία και επιβεβαιώστε ότι το σύστημα τείνει σε μια περιοδική τροχιά 3 κύκλων:

$\{y_1, y_2, y_3\} = \{0{,}149407,\ 0{,}488044,\ 0{,}959447\}$

Προσπαθήστε να το μελετήσετε και με το Maxima.

5. Το μοντέλο του Solow σε διακριτό χρόνο δίνεται από το ακόλουθο σύστημα εξ.:

$$\begin{cases} Y_t = F(K_t, A_t L_t) \\ K_{t+1} = K_t + \delta K_t \\ S_t = sY_t \\ I_t = S_t \\ \dfrac{L_{t+1} - L_t}{L_t} = n \\ A_t = \gamma^t A_0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι: $\hat{k}_{t+1} = \dfrac{(1-\delta)\hat{k}_t + sf(\hat{k}_t)}{\gamma(1+n)}$

όπου $\hat{k}$ είναι ο λόγος κεφαλαίου / εργασία, δηλ.: $\hat{k} = \dfrac{K}{AL}$

6. Η ακολουθία Fibonacci είναι η: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$

(i) Χρησιμοποιώντας το Excel, δημιουργήστε αυτή την ακολουθία και βρείτε τους 100 πρώτους όρους (επαληθεύστε ότι όλοι είναι ακέραιοι)

(ii) Λύστε το Δ.Δ.Σ. 2ης τάξης με τη χρήση του Maxima, και δείξτε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας συμπίπτουν με αυτούς που βρήκατε με το Excel.