Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω y^* : f.p. ενός Δ.Δ.Σ.:

$y_{t+1} = f(y_t)$, (η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο y^*)

Τότε:

1. Αν: $0 \le f'(y^*) < 1 \Rightarrow$ y^*: ελκυστής *(με μορφή σκάλας)*

2. Αν: $f'(y^*) > 1 \Rightarrow$ y^*: απωθητής *(με μορφή σκάλας)*

3. Αν: $-1 < f'(y^*) < 0 \Rightarrow$ y^*: ελκυστής *(με μορφή ιστού αράχνης)*

4. Αν: $f'(y^*) < -1 \Rightarrow$ y^*: απωθητής *(με μορφή ιστού αράχνης)*

Οι περιπτώσεις $f'(y^*) = 1,\ f'(y^*) = -1$ είναι πιο πολύπλοκες και οδηγούν είτε σε ελκυστές, είτε σε απωθητές (ανάλογα με την *δεύτερη ή/και τρίτη παράγωγο*)

Παράδειγμα

Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = -y_t + k$

Ας βρούμε τους πρώτους όρους της ακολουθίας:

y_0

$y_1 = -y_0 + k$

$y_2 = -y_1 + k = -(-y_0 + k) + k = y_0$

$y_3 = -y_2 + k = -y_0 + k$

$y_4 = ;$ Απ: $y_4 = y_0$

$y_5 = ;$ Απ: $y_5 = -y_0 + k$

Τι παρατηρείτε;

$$y_0 = y_2 = y_4 = \cdots$$

και

$$y_1 = y_3 = y_5 = \cdots = -y_0 + k$$

Δηλαδή έχουμε ένα Δ.Δ.Σ. 2-κύκλων, που ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών: y_0 και $-y_0 + k$

Το f.p του Δ.Δ.Σ. είναι: $y^* = -y^* + k \;\Rightarrow\; 2y^* = k \;\Rightarrow\; y^* = \dfrac{k}{2}$

Εδώ είναι: $f'(k/2) = -1$ και σύμφωνα με το ΘΕΩΡΗΜΑ, χρειάζεται περεταίρω μελέτη με βοήθεια παραγώγων μεγαλύτερης τάξης.

Ασκήσεις:

1. Να μελετηθεί το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = -2y_t + k$

Τι συμπεράσματα βγάζετε όταν $k = 2$;

2. Να αποδειχθεί ότι το μοντέλο αγοράς (ζήτησης/προσφοράς) του ιστού της αράχνης, ανάγεται στο μοντέλο $y_{t+1} = -y_t + k$.

Να γίνει περεταίρω μελέτη ως προς τις παραμέτρους a, b, c και d.

Ορισμός

Αν μια ακολουθία $\{y_t\}$ έχει δύο (π.χ.) επαναλαμβανόμενες τιμές y_1 και y_2, τότε τα y_1 και y_2 ονομάζονται περιοδικά σημεία και το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ καλείται περιοδική τροχιά.

Γεωμετρικά:

Σημείο περιόδου – k ενός Δ.Δ.Σ. είναι το y όπου το γράφημα του $f^k(y)$ τέμνει τη διαγώνιο $y_{t+1} = y_t$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω b ένα σημείο περιόδου – k. Τότε, το b θα είναι:

(i) Σταθερό : εάν το b είναι σταθερό f.p. της f^k

(ii) Ασυμπτωτικά σταθερό (ελκυστής) : εάν ασυμπτωτικά σταθερό f.p. του f^k

(iii) Απωθητής : εάν απωθητικό f.p. του f^k

Πρακτικά:

Για να υπολογίσουμε την ευστάθεια ενός περιοδικού σημείου, αρκεί να υπολογίσουμε την:

$$\left[f^{k}(y) \right]' \Leftrightarrow f'\left(y_1^*\right)\cdot f'\left(y_2^*\right)\cdots\cdots f'\left(y_k^*\right)$$

Κανόνας αλυσίδας

όπου: $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$ τα σημεία περιόδου – k.

Π.χ.:
Αν y_1^*, y_2^* δύο περιοδικά σημεία της $f^2(y)$, τότε στο $y = y_1^*$

$$\left[f^2\left(y_1^*\right) \right]' = \left(f\left(f\left(y_1^*\right)\right)\right)' = f'\left(f\left(y_1^*\right)\right)\cdot f'\left(y_1^*\right) = f'\left(y_1^*\right)\cdot f'\left(y_2^*\right)$$

Και σύμφωνα με το ΘΕΩΡΗΜΑ, το y : ασυμπτωτικά ευσταθές

$$\Leftrightarrow \quad \left| f'\left(y_1^*\right)\cdot f'\left(y_2^*\right) \right| < 1$$

Παράδειγμα: (μη γραμμικό Δ.Δ.Σ.) - Έστω το:

$$y_{t+1} = a \cdot y_t - b \cdot y_t^2$$

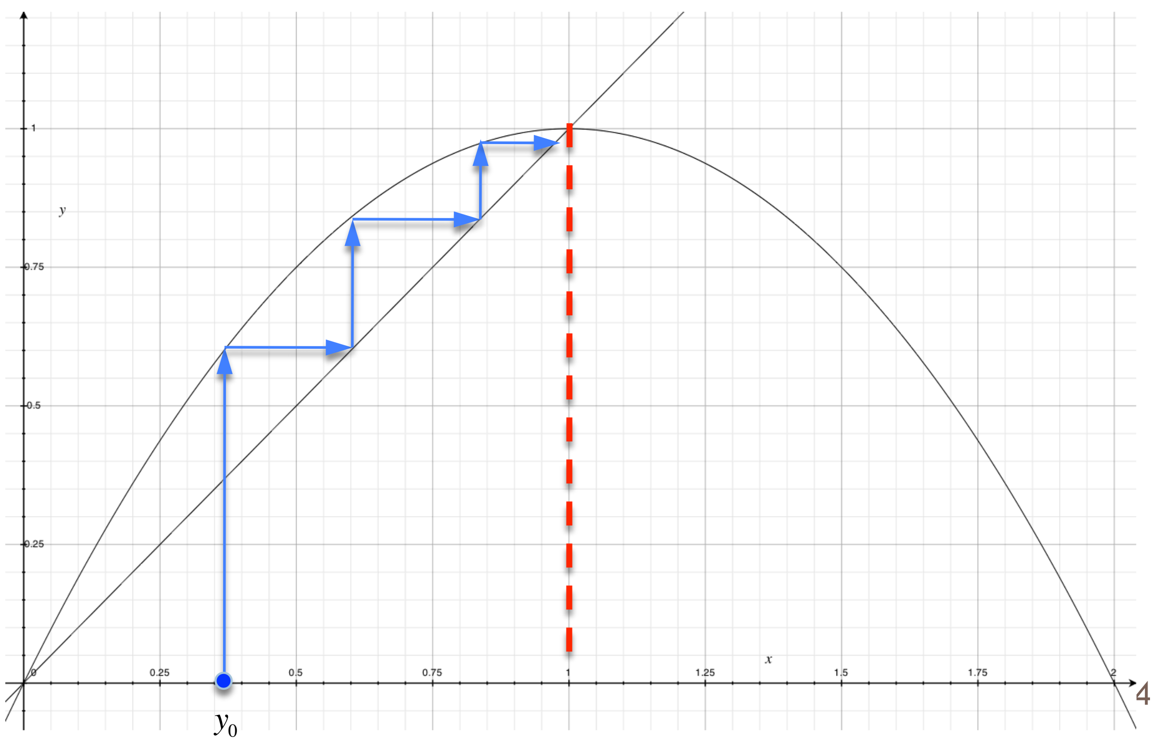
Βρίσκουμε πρώτα τα σταθερά σημεία (f.p.):

$$y^* = ay^* - b \cdot (y^*)^2 = ay^* \cdot \left(1 - \frac{by^*}{a}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = \dfrac{a-1}{b} \end{cases}$$

Ανάλογα με τις τιμές των a και b, το Δ.Δ.Σ. έχει ένα σημείο ισορροπίας ($y^* = 0$) ή δύο.

Ας δούμε ένα παράδειγμα με $a = 2$, $b = 1$: $\quad y_{t+1} = 2 \cdot y_t - y_t^2$

Λύνοντας όπως και πιο πάνω, βρίσκουμε ότι έχει δύο σημεία ισορροπίας: $y^* = 0$ και $y^* = 1$.



Άρα;;

Το f.p. $y^* = 1$ είναι ελκυστής!

(Γιατί;)

Εφαρμογή στο:

Επίλυση Δ.Δ.Σ. 1ης τάξης

Παράδειγμα 1ο:

Το πλέον απλό Δ.Δ.Σ. είναι: $y_{t+1} = a \cdot y_t \quad (a \neq 0)$

Η ακολουθία των διαδοχικών όρων, με πρώτο όρο y_0, είναι:

$$y_1 = a \cdot y_0$$

$$y_2 = a \cdot y_1 = a \cdot (a \cdot y_0) = a^2 \cdot y_0$$

$$y_3 = a \cdot y_2 = a \cdot (a^2 \cdot y_0) = a^3 \cdot y_0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{y_n = a^n \cdot y_0} \Rightarrow$$

Η **αναλυτική λύση** του Δ.Δ.Σ., και η οποία ικανοποιεί την αρχική τιμή y_0

Εύρεση του fixed point:

$$y^* = a \cdot y^* \Leftrightarrow y^* = 0$$

(Μοναδικό f.p.)

Ευστάθεια: $y = f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$

Άρα στο $y^* = 0 : f'(0) = a$

- $a > 1$ → Το f.p. είναι απωθητής *(με σκάλα)*
- $0 < a < 1$ → Το f.p. είναι ελκυστής *(με σκάλα)*
- $-1 < a < 0$ → Το f.p. είναι ελκυστής *(με ιστό αράχνης)*
- $a < -1$ → Το f.p. είναι απωθητής *(με ιστό αράχνης)*

Παράδειγμα 2ο:

Έστω το μοντέλο Harrod – Domar σε μορφή Δ.Δ.Σ.:

$$\begin{cases} S_t = s \cdot Y_t \\ I_t = v \cdot \left(Y_t - Y_{t-1}\right) \qquad v > 0, s > 0 \\ S_t = I_t \end{cases}$$

Λύση:

Αντικαθιστούμε τις δύο πρώτες εξ. στην τρίτη και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$Y_t = \frac{v}{v-s} \cdot Y_{t-1}$$

Αν ο αρχικός όρος είναι Y_0, τότε η γενική λύση είναι: $Y_t = \left(\frac{v}{v-s}\right)^t \cdot Y_0$

Το f.p. είναι (όπως και στο Παράδειγμα 1): $Y^* = 0$

Ενώ η ευστάθεια εξαρτάται (όπως διακρίναμε τις περιπτώσεις στο Παράδειγμα 1) από το κλάσμα:

$$\frac{v}{v-s}$$

Παράδειγμα 3ο:

Να μελετηθεί το μη – ομογενές Δ.Δ.Σ. 1ης τάξης:

$$y_{t+1} = a \cdot y_t + c \quad (1) \quad (a \neq 0)$$

Λύση:

Βήμα 1ο: Βρίσκουμε το f.p.

$$y^* = a \cdot y^* + c \quad (2) \Rightarrow$$

$$y^* \cdot (1-a) = c \Rightarrow y^* = \frac{c}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

Βήμα 2ο: Αφαιρούμε από την (1) την (2)

$$y_{t+1} - y^* = a \cdot (y_t - y^*) \quad (3)$$

Βήμα 3ο: Θέτουμε:

$$y_{t+1} - y^* = x_{t+1}$$

$$y_t - y^* = x_t$$

Και άρα η (3) γίνεται: $x_{t+1} = a \cdot x_t$

Που έχει γενική λύση: $x_t = a^t \cdot x_0$

Βήμα 4ο: Άρα η (3) δίνει:

$$y_t - y^* = a^t \cdot (y_0 - y^*) \Leftrightarrow y_t = \frac{c}{1-a} + a^t \cdot \left(y_0 - \frac{c}{1-a} \right)$$

Ασκήσεις:

1. Να μελετηθεί το μοντέλο προσφοράς – ζήτησης (του ιστού της αράχνης):

$$\begin{cases} q_t^d = a - b \cdot p_t \quad , \quad a,b > 0 \\ q_t^s = c + d \cdot p_{t-1} \quad , \quad d > 0 \\ q_t^d = q_t^s \end{cases}$$

2. Το πρόβλημα του ανατοκισμού.

Έστω ποσό που ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο r. Τότε, τη χρονική στιγμή t , έχουμε:

$$Y_t = (1+r) \cdot Y_{t-1}$$

Αν υποθέσουμε ότι καταθέτουμε (ή εισπράττουμε) σε κάθε περίοδο ποσό a_t, τότε η εξίσωση γίνεται: $Y_t = (1+r) \cdot Y_{t-1} + a_{t-1}$

Να μελετηθεί το Δ.Δ.Σ.

Πληκτρολογήστε στο *Maxima* τις παρακάτω εντολές, για να μελετήσετε το **Παράδειγμα 1** *(που δόθηκε πιο πριν)*

```
(%i1) load("dynamics")$
```

Φορτώνει το πακέτο «dynamics» στο *Maxima*

```
(%i2) a: 1.2;
(%o2) 1.2
```

Ορίζουμε τη σταθερά a και δίνουμε την τιμή 1.2

```
(%i3) f1: a*y;
(%o3) 1.2*y
```

Ορίζουμε τη συνάρτηση f1 και δίνουμε την τιμή a*y

```
(%i4) fixedpointf1: solve(f1-y, y);
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
(%o4) [y=0]
```

Ορίζουμε τη μεταβλητή fixedpointf1 και της δίνουμε ως τιμή τη λύση της εξίσωσης $f_1 - y = 0$, κάνοντας χρήση της συνάρτησης solve

```
(%i5) df1: diff(f1, y);
(%o5) 1.2
```

Ορίζουμε τη συνάρτηση df1 και της δίνουμε ως τιμή την παράγωγο της f1 ως προς y

```
(%i6) df1, fixedpointf1;
(%o6) 1.2
```

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης df1 στο σημείο fixedpointf1

```
(%i7) evolution(f1, 0.4, 20,[style, [points, 0.8]])$
```

Σχεδιάζουμε την f1 με αρχική τιμή 0.4 για 20 σημεία και με στυλ points 0.8

```
(%i8) staircase(f1, 0.4, 20)$
```

Σχεδιάζουμε την σκάλα/ιστό αράχνης για την f1 με αρχική τιμή 0.4 για 20 σημεία