Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

Μέρος 2ο

Κατηγοριοποίηση των Διακριτών Δυναμικών Συστημάτων (Δ.Δ.Σ.)

Ονομάζουμε Δ.Δ.Σ., μια ακολουθία αριθμών, y_t, που ορίζονται αναδρομικά

Δηλαδή:

- Υπάρχει ένας κανόνας που σχετίζει κάθε επόμενο αριθμό της ακολουθίας με τον προηγούμενο.
- Την ακολουθία την συμβολίζουμε: $\{y_t\}$

Δ.Δ.Σ. $1^{ης}$ τάξης: ακολουθία αριθμών y_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, όπου κάθε αριθμός μετά τον πρώτο προκύπτει από τη σχέση:

$$\underbrace{y_{t+1}}_{\text{Αναδρομική εξίσωση}} = f(y_t) \quad (1)$$

Η ακολουθία των αριθμών που δίνεται από τη σχέση: $$\underbrace{\Delta y_{t+1}}_{\text{Εξίσωση διαφορών } 1^{ης} \text{ τάξης}} = y_{t+1} - y_t = g(y_t) \quad (2)$$

Π.χ.

$$(i)\ y_{t+1} = 2 + y_t \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} - y_t = 2$$

$$(ii)\ y_{t+1} = 2y_t \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} - y_t = y_t$$

1η

Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = f(y_t)$

Αν $f(y_t)$: **γραμμική**, τότε το Δ.Δ.Σ. ονομάζεται **γραμμικό**

Αν $f(y_t)$: **μη – γραμμική**, τότε το Δ.Δ.Σ. ονομάζεται **μη – γραμμικό**

Παραδείγματα:

1. $y_{t+1} = 2 + 3y_t$: γραμμικό
2. $y_{t+2} - 2y_{t+1} - 3y_t = 5$: γραμμικό
3. $y_{t+1} = 3{,}2y_t \cdot (1 - y_t)$: μη – γραμμικό
4. $y_{t+1} = r \cdot y_t \cdot \ln(k/y_t)$: μη – γραμμικό

2η Έστω το γενικό Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = f(t, y_t)$

Αν το Δ.Δ.Σ. περιέχει (εκτός από την συνάρτηση του y_t) και το χρόνο t, τότε ονομάζεται **μη – αυτόνομο**.
Αν δεν περιέχει το χρόνο, τότε ονομάζεται **αυτόνομο**

Παραδείγματα:

1. $y_{t+1} = t + 2y_t$: μη – αυτόνομο
2. $y_{t+1} = 2y_t$: αυτόνομο

3η Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} + a \cdot y_t = g(t)$

Αν: $g(t) \equiv 0 \, , \forall t$ ⟹ Δ.Δ.Σ.: ομογενές

$g(t) \not\equiv 0 \, , \forall t$ ⟹ Δ.Δ.Σ.: μη – ομογενές

4η

Αν σ' ένα Δ.Δ.Σ. κάθε αριθμός της ακολουθίας εξαρτάται μόνο από τον προηγούμενο αριθμό, τότε το Δ.Δ.Σ. ονομάζεται **1ης τάξης**

Αν $y_{t+m} = f(y_{t+m-1}, y_{t+m-2}, \dots, y_t)$ → Δ.Δ.Σ.: m – τάξης

Π.χ., το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+2} + a \cdot y_{t+1} + b \cdot y_t = g(t)$ → Δ.Δ.Σ.: 2ης τάξης (και αν $g(t) \equiv 0$, τότε θα ήταν ομογενές)

Άσκηση:

Χαρακτηρίστε τα παρακάτω Δ.Δ.Σ.:

$(i)\ y_{t+1} - 2y_t = 0$

$(ii)\ y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t = 0$

$(iii)\ y_{t+1} - 2y_t = 5$

$(iv)\ y_{t+2} - 4y_{t+1} - 4y_t = 6$

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = f(y_t)$

Τότε ο επόμενος όρος της ακολουθίας θα είναι:

$$y_{t+2} = f\left(y_{t+1}\right) = f\left(f\left(y_t\right)\right) = f^2\left(y_t\right)$$

Δηλ. για να βρούμε τον δεύτερο όρο, τον τρίτο, τον τέταρτο κ.ο.κ., χρειαζόμαστε απαραίτητα τον πρώτο: y_t

Αλλά, στο Δ.Δ.Σ.: $y_{t+2} = f\left(y_{t+1}, y_t\right)$

Ο επόμενος όρος θα είναι:

$$y_{t+3} = f\left(y_{t+2}, y_{t+1}\right) = f\left(f\left(y_{t+1}, y_t\right), y_{t+1}\right)$$

Δηλ. για να βρούμε τον τρίτο όρο, τον τέταρτο κ.ο.κ., χρειαζόμαστε απαραίτητα τους δύο πρώτους: y_t , y_{t+1}

Δηλ. αν έστω: $y_{t+1} = f(y_t)$ με πρώτο όρο τον y_0, όταν $t = 0,$

τότε από την αναδρομική εξίσωση προκύπτει μια ακολουθία, που σχηματίζεται από την αρχική τιμή, y_0 :

$$y_0, f\left(y_0\right), f\left(f\left(y_0\right)\right), f\left(f\left(f\left(y_0\right)\right)\right), \ldots$$

Ή: $$y_0, f\left(y_0\right), f^2\left(y_0\right), f^3\left(y_0\right), \ldots$$

Το σύνολο: $\left\{f^n\left(y_0\right), n \geq 0\right\}$ ονομάζεται **τροχιά** του y_0.

Το μοντέλο του ιστού της αράχνης (Μ. Ι. Α.)

Μια εισαγωγή

Έστω ότι η ζήτηση q_t^d κάποια χρονική στιγμή, t ,εξαρτάται απ’ την τρέχουσα τιμή στην αγορά, p_t , και έστω ότι η προσφορά q_t^s κατά την (ίδια) χρονική στιγμή t, εξαρτάται από την καλλιέργεια, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την τιμή που ο αγρότης πέτυχε την τελευταία περίοδο, $p_{t\text{-}1}$.

Η εκκαθάριση στην αγορά γίνεται σε κάθε περίοδο, δηλ.: $q_t^d = q_t^s$

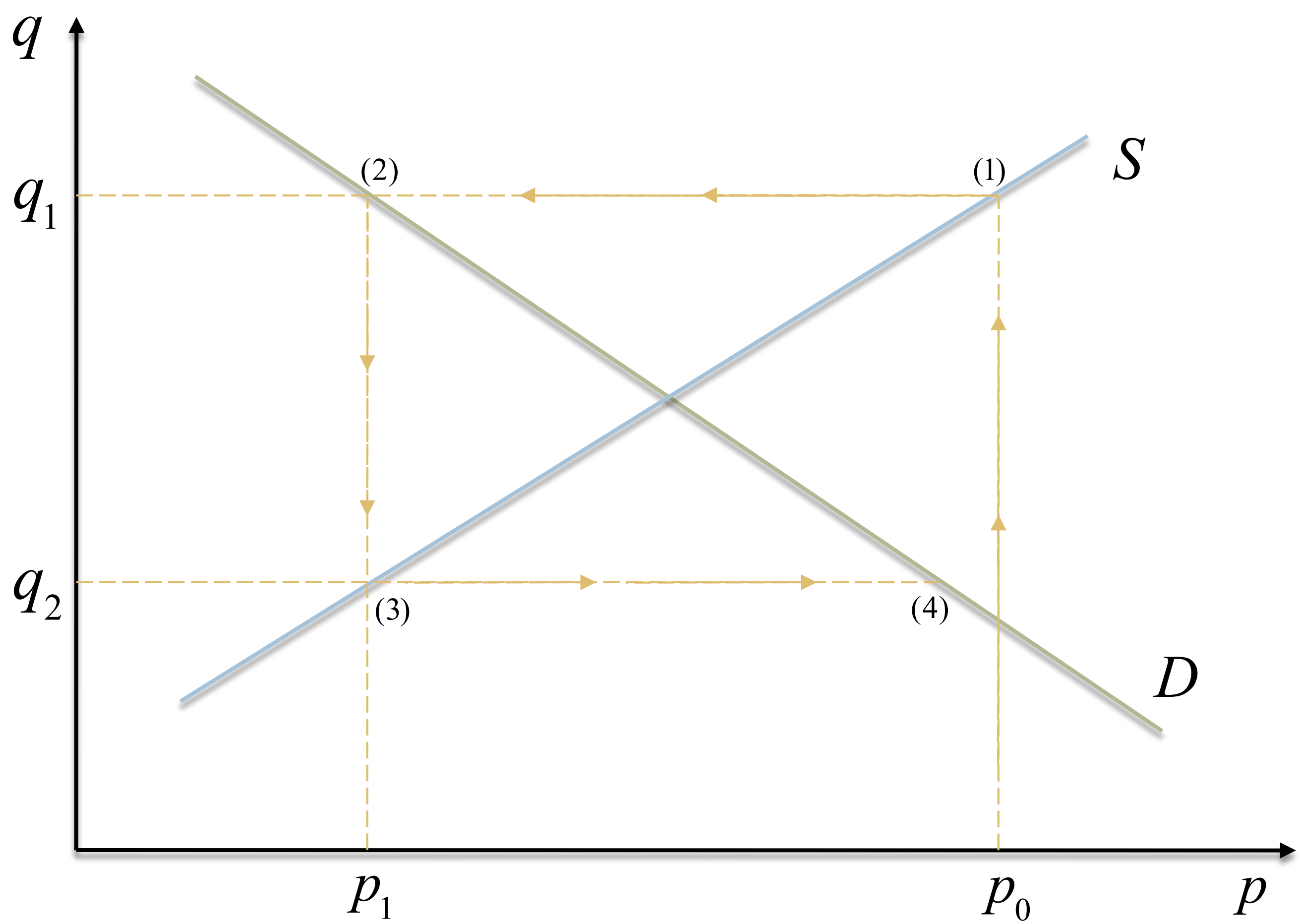
Υποθέτοντας (χάριν απλότητας) ότι η ζήτηση και η προσφορά είναι γραμμικές, το μοντέλο είναι:

$$\begin{cases} q_t^d = a - b \cdot p_t \quad , \quad a, b > 0 \\ q_t^s = c + d \cdot p_{t-1} \quad , \quad d > 0 \\ q_t^d = q_t^s \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην τρίτη και έχουμε:

$$a - b \cdot p_t = c + d \cdot p_{t-1} \;\Rightarrow p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} \cdot p_{t-1} \quad (3)$$

Η (3) είναι ένα Δ.Δ.Σ. 1ης τάξης, μη ομογενές και αυτόνομο.



Ισορροπία και ευστάθεια στα Δ.Δ.Σ.

Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = f(y_t)$

Το σημείο y^* : σημείο ισορροπίας (fixed point, f. p.) του Δ.Δ.Σ.

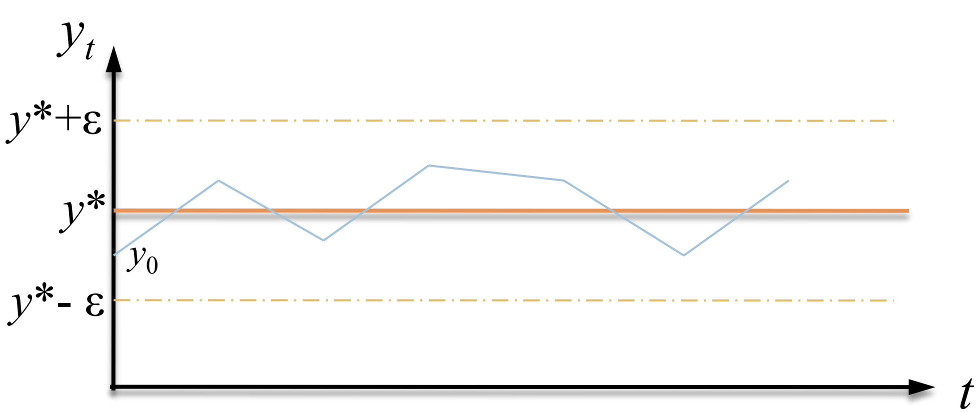
$$\Leftrightarrow \quad y^* = f\left(y^*\right)$$

Για παράδειγμα, στο Μ.Ι.Α.: $p^* = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}\cdot p^* \Leftrightarrow p^* = \frac{a-c}{b+d}$ όπου: $p^* \geq 0 \Leftrightarrow a \geq c$

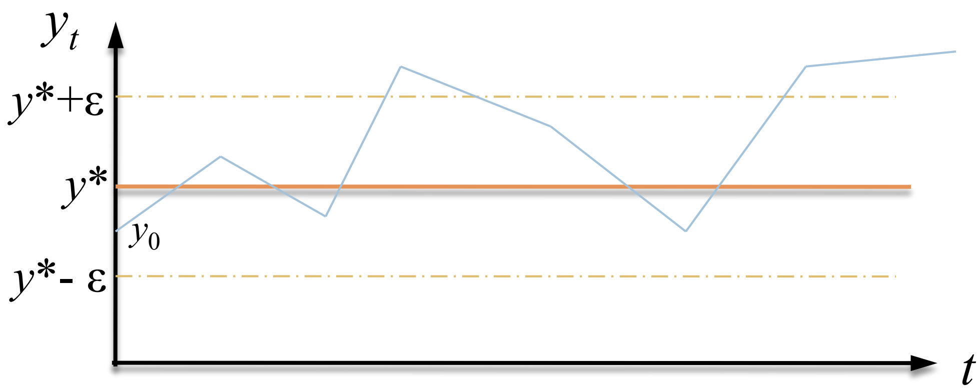
ΘΕΩΡΗΜΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω το Δ.Δ.Σ.: $y_{t+1} = f(y_t)$ και y^* : f.p. Τότε:

(i) y^* : ευσταθές f.p. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left|y_0 - y^*\right| < \delta \Rightarrow \left|f^n\left(y_0\right) - y^*\right| < \varepsilon,\ \forall n > 0$

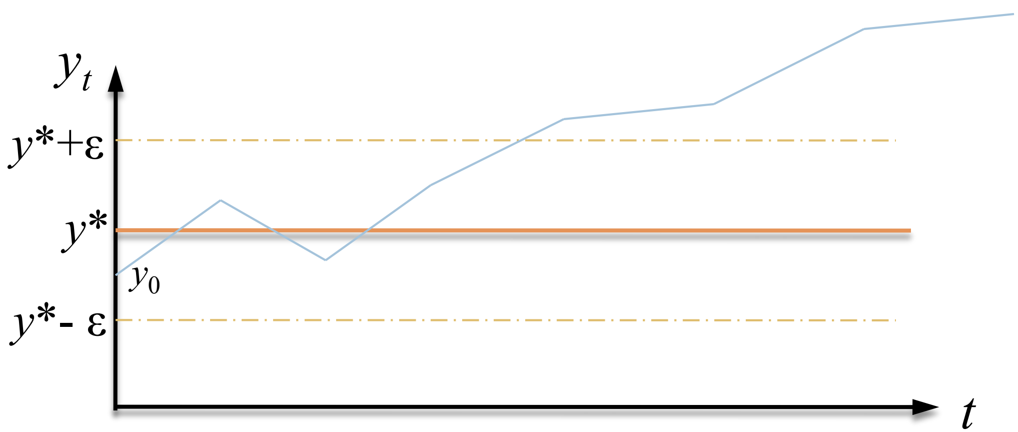


Ευστάθεια



Αστάθεια

(ii) y^* : απωθητής f.p. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \left|y_0 - y^*\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f\left(y_0\right) - y^*\right| > \left|y_0 - y^*\right|$

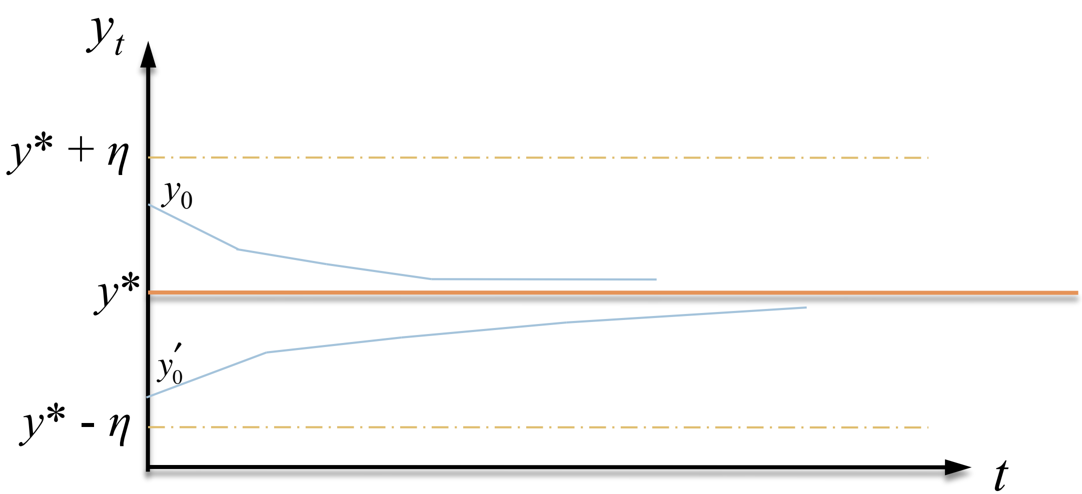


Απωθητής (repellor)

(iii) y^* : ασυμπτωτικά ευσταθές f.p. (ελκυστής)

⟺ y^* : ευσταθές και $\exists \eta > 0 : |y_0 - y^*| < \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_t = y^*$

Το y^* : ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε τιμή του η



ΠΡΑΚΤΙΚΑ (σχηματικά)

Ένα σημείο y^*: f.p. είναι ελκυστής ή απωθητής, αν συμβαίνει η ακόλουθη σχηματική κατάσταση: