Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

29/6/14

Συνεχή δυναμικά συστήματα

Μέρος 1ο

Ορισμός Διαφορικής Εξίσωσης

Διαφορική Εξίσωση είναι μια εξίσωση που μπορεί να περιέχει:

(α) τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης

(β) την ίδια την συνάρτηση

(γ) τις μεταβλητές (απ' τις οποίες εξαρτάται η άγνωστη συνάρτηση)

(δ) σταθερούς όρους

Για παράδειγμα: $$\frac{dy}{dx} + 3xy = e^{x}$$

Ή γενικά: $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Εμείς, όμως, θα ασχοληθούμε με **συνεχή δυναμικά συστήματα** μιας μεταβλητής, δηλ. θα υποθέσουμε ότι η μεταβλητή x είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου t.

Στα δυναμικά συστήματα, η διαφ. εξ. περιέχει (συνήθως) σχέσεις μεταξύ μιας χρονοεξαρτώμενης συνάρτησης και των παραγώγων της, δηλ. θα την γράφαμε:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

Παραδείγματα:

$$(i)\quad \frac{dx}{dt}+3x=4+e^{-t}$$

$$(ii)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+4t\frac{dx}{dt}-3\left(1-t^2\right)x=0$$

$$(iii)\quad \frac{dx}{dt}=kx$$

t: ανεξάρτητη μεταβλητή και
$x = x(t)$
Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$(iv)\quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+4u=0$$

t: ανεξάρτητη μεταβλητή και
$u = u(t),\ v = v(t)$
Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις κατατάσσονται ανάλογα με την <u>τάξη</u> τους.
<u>**Τάξη**</u> (μιας δ.εξ.) ονομάζουμε την μεγαλύτερης τάξης παράγωγο που εμφανίζεται στην δ.εξ.
Άρα: (i) & (iii) : 1ης τάξης και (ii) 2ης τάξης

☺ Ειδικής σημασίας είναι η γραμμική δ. εξ.: $a_n(t)\dfrac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0(t)\cdot x=g(t)\quad(2)$

σταθεροί

$g(t) = 0$

Δ.εξ. n-τάξης με σταθερούς συντελεστές*

<u>Ομογενής</u> δ.εξ.
Άρα (i), (ii), (iii);

*Κάθε άλλη δ.εξ. που δεν είναι της μορφής (2), θα ονομ. <u>μη-γραμμική δ.εξ.</u>

Οι δ. εξ. με το μεγαλύτερο οικονομικό ενδιαφέρον, είναι της μορφής:

$$h(t)\frac{dx}{dt}+k(t)\cdot x=g(t)\Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}+a(t)\cdot x=b(t)}\ (3) \quad ,\text{οπου}: a(t)=\frac{k(t)}{h(t)},\quad b(t)=\frac{g(t)}{h(t)}$$

Τα άσχημα νέα: «*Εν γένει, η (3) λύνεται δύσκολα!*»
Αλλά… (τα καλά νέα), αν είναι <u>αυτόνομη</u> (δηλ. χρονοανεξάρτητη), δηλ. αν:
$a(t)$, $b(t)$ = σταθεροί, τότε λύνεται πιο εύκολα!!

Θα ονομάσουμε <u>λύση</u> μιας δ. εξ. τη συνάρτηση $x = \varphi(t)$, η οποία θα είναι n-φορές παραγωγίσιμη και η οποία, όταν αντικατασταθεί στην δ. εξ., την ικανοποιεί ακριβώς σε κάποιο διάστημα $a < t < b$.

Παράδειγμα 1° : Να λυθεί η αυτόνομη ομογενής δ. εξ.: $\dfrac{dy}{dt} = y$

<u>Λύση:</u>

$$\frac{dy}{dt}=y\Rightarrow \frac{1}{y}dy=dt \quad \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int dt+c\Rightarrow \ln|y|=t+c$$

$$\Rightarrow y=e^{t+c}\Rightarrow y=e^{t}\cdot e^{c}\Rightarrow y(t)=ke^{t}$$

Παράδειγμα 2ο : Να λυθεί η αυτόνομη ομογενής δ. εξ.: $\dfrac{dx}{dt} = k \cdot x$

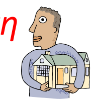
Λύση:

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \int \frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{x}dt = \int k\,dt \Leftrightarrow \ln x(t) = kt + c_0$$, (όπου c_0: σταθερά ολοκλήρωσης)

$$\Leftrightarrow x(t) = c\,e^{kt}$$, όπου: $c = e^{c_0}$

Η λύση ικανοποιεί την δ.εξ;

Απόδειξη – άσκηση



Παράδειγμα 3ο : Να λυθεί η ομογενής δ. εξ.: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{y^2}$

Λύση:

$$y^2 dy = t\,dt \Rightarrow \int y^2\,dy = \int t\,dt + c \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + 3c\right)^{1/3}$$

Παράδειγμα 4ο : Να λυθεί η ομογενής δ. εξ.: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{1+y^2}$

Λύση:

$$\frac{1+y^2}{y}dy = dt \Rightarrow \int \frac{1+y^2}{y}dy = \int dt + c \Rightarrow \int\left(\frac{1}{y} + y\right)dy = \int dt + c \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy + \int y\,dy = t + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| + \frac{y^2}{2} = t + c$$

Αναλυτική λύση: η $y(t)$ αναλυτική συνάρτηση του t.

Αν δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς $y = y(t)$, τότε οι λύσεις είναι σε πεπλεγμένη μορφή: $F(y,t) = 0$

Παράδειγμα 5ο

Να επαληθευτεί ότι η $p(t)=\dfrac{ap_0}{bp_0+\left(a-bp_0\right)e^{-at}}$ είναι λύση της δ. εξ.:

$$\frac{dp}{dt}=p\cdot(a-bp)$$

Λύση: ***άσκηση για το σπίτι***

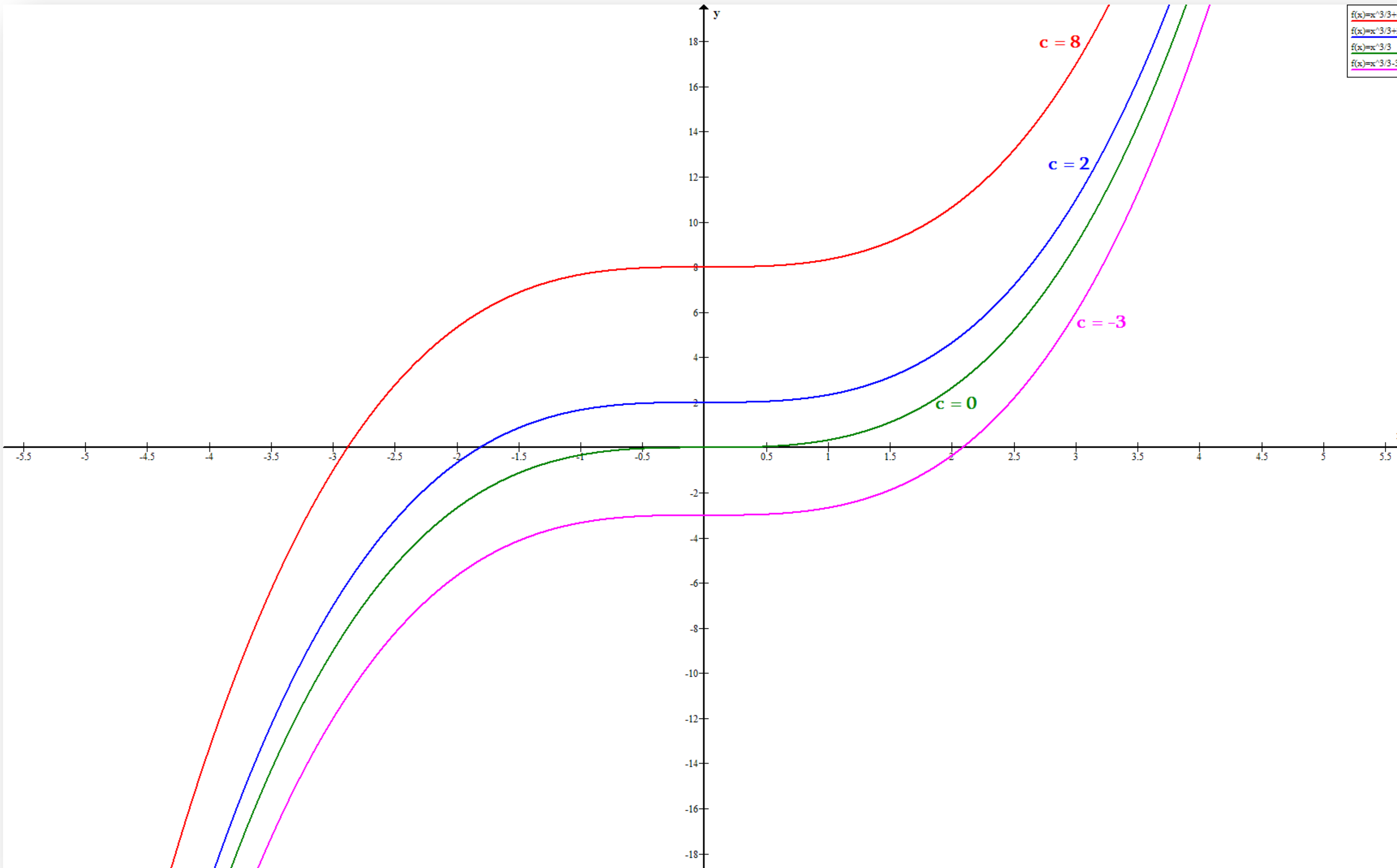
Γραφική λύση

Η λύση μιας δ. εξ. είναι μια <u>καμπύλη</u>, σε κάθε σημείο της οποίας η κλίση δίνεται από την τιμή της παραγώγου (σ’ εκείνο το σημείο), όπως προκύπτει από την δ.εξ.

- Αν το γράφημα <u>είναι</u> ακριβές, τότε έχουμε ποσοτική γραφική παράσταση
- Αν το γράφημα <u>δεν είναι</u> ακριβές, τότε έχουμε ποιοτική γραφική παράσταση (*γενική γνώση σχήματος*)
- Σε κάθε περίπτωση, όμως, το γράφημα προσφέρει αρκετές πληροφορίες για τη φύση της λύσης (και άρα τη φύση του δυναμικού συστήματος).

Είδαμε ότι κάθε λύση δ. εξ. περιέχει τη σταθερά της ολοκλήρωσης. Ας δούμε τη γραφική λύση της δ.εξ.:

$$\frac{dx}{dt}=t^2 \quad \Rightarrow x(t)=\frac{t^3}{3}+c$$


f(x)=x^3/3+8
f(x)=x^3/3+2
f(x)=x^3/3
f(x)=x^3/3-3
c = 8
c = 2
c = 0
c = -3
y
x

Γενική λύση μιας δ. εξ. ονομάζουμε τη λύση που (είτε αναλυτικά, είτε πεπλεγμένα) περιέχει όλες τις δυνατές λύσεις.

π.χ. $x(t)=\frac{t^3}{3}+c$

Ειδική λύση μιας δ. εξ. ονομάζουμε τη λύση που δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές (δηλ. c, βλ. σχήμα στην προηγούμενη διαφάνεια).

Παρατηρήσεις:

1. Αν η δ. εξ. είναι $2^{ης}$ τάξης, τότε θα γίνουν δύο ολοκληρώσεις και άρα θα έχουμε δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης.
2. Αν η δ. εξ. είναι n-τάξης, τότε θα έχουμε n-αυθαίρετες σταθερές.
3. Οι γενικές λύσεις παριστάνονται γραφικά από οικογένειες καμπυλών.
4. Οι ειδικές λύσεις είναι απλές καμπύλες.
5. Αντί να διαλέγουμε «αυθαίρετα» τις αυθαίρετες σταθερές, είναι προτιμότερο να διαλέγουμε αρχική συνθήκη. Δηλ. ανάλογα με τη φύση του προβλήματος και των αρχικών δεδομένων του, πολλές φορές δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t=t_0$, η συνάρτηση $x(t_0)=x_0$. Η συνθήκη $x(t_0)=x_0$ ονομάζεται αρχική συνθήκη $1^{ης}$ τάξης.
6. Η δ. εξ. $1^{ης}$ τάξης με αρχική συνθήκη ($x(t_0)=x_0$) ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών $1^{ης}$ τάξης.

Παράδειγμα 1ο (*ξανά*):

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών 1ης τάξης: $\frac{dx}{dt} = k \cdot x \, , x(0) = 1$

Λύση:

Είδαμε ότι η ανωτέρω εξίσωση έχει ως λύση: $x(t) = c\, e^{kt} \quad (1)$

Άρα η (1) για $t = 0$ και $x(0) = 1$: $\quad 1 = c \cdot e^{0} \Rightarrow c = 1$

Επομένως η ειδική λύση θα είναι: $x(t) = e^{kt}$

Παράδειγμα 2ο :

Δίνεται το υπόδειγμα προσφοράς – ζήτησης:
$$\begin{cases} q_d = a + bp \;,\; b < 0 \\ q_s = c + dp \;, d > 0 \\ \dfrac{dp}{dt} = k \cdot \left(q_d - q_s\right) \;, k > 0 \end{cases}$$

όπου οι ποσότητες q_d, q_s και η τιμή p είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

Λύση:

Αντικαθιστούμε τις δυο πρώτες εξισώσεις στην δ. εξ.:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot (a + bp - c - dp) \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} - k(b-d)p = k(a-c)}$$

Γραμμική μη-ομογενής δ.εξ. 1ης τάξης

$$p(t) = \frac{c-a}{b-d} + \left[p_0 - \left(\frac{c-a}{b-d} \right) \right] \cdot e^{-k\cdot(d-b)\cdot t}$$

Άσκηση

Να λυθεί το υπόδειγμα προσφοράς – ζήτησης:

$$\begin{cases} q_d = a + bp + f\dfrac{dp}{dt} \;,\; b<0 \,,\, f \neq 0 \\ q_s = c + dp \;,\, d>0 \\ \dfrac{dp}{dt} = k\cdot\left(q_d - q_s\right) \;,\, k>0 \end{cases}$$

όπου οι ποσότητες q_d, q_s και η τιμή p είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

Παράδειγμα 3ο (Οικολογία)

Έστω ένας πληθυσμός, $p = p(t)$, που αναπτύσσεται με σταθερό ρυθμό, k. Αυτό σημαίνει ότι η ποσοστιαία μεταβολή του πληθυσμού είναι σταθερή.
Δηλ.

$$\frac{dp}{dt} = k\cdot p$$ Δηλ. ισχύουν όσα αναφέραμε στο παράδειγμα 1.

Παράδειγμα 4ο: Μοντέλο αποταμίευσης (καταθέσεων)

Κάποιος καταθέτει στην τράπεζα $5000€$ με ετήσιο επιτόκιο 5%. Τότε, αν $A(t)$ το ποσό των χρημάτων του σε κάθε χρονική στιγμή, η δ. εξ. του προβλήματος είναι:

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}05A$$

Σύμφωνα με τα Παραδείγματα 1 & 2, η λύση της ανωτέρω είναι γνωστή: $A(t) = ce^{0{,}05t}$

όπου: $c = A(0) = 5000 \quad \Rightarrow A(t) = 5000e^{0{,}05t}$

Σε 10 χρόνια, το ποσό θα είναι: $A(10) = 5000e^{0{,}05\cdot 10} = 5000e^{0{,}5} \simeq 8.244$

Αν τώρα, κάθε χρόνο αποφασίσει να σηκώνει $1000€$ από τον 10ο χρόνο και μετά, η δ. εξ. γίνεται:

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}05A - 1000 \quad , t > 10$$

Λύση: $\dfrac{dA}{0{,}05A-1000} = dt \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dA}{0{,}05A-1000} = \int dt + c_1$

Θέτουμε: $u = 0{,}05A - 1000 \quad \Rightarrow du = 0{,}05\,dA \Rightarrow 20\,du = dA$

Οπότε το ολοκλήρωμα (στο αριστερό μέλος) γίνεται: $\displaystyle\int \frac{20\,du}{u} = t + c_1 \Rightarrow 20\ln|u| = t + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 20\ln\left|0{,}05A - 1000\right| = t + c_1 \quad (1)$$

Όμως, τη χρονική στιγμή $t = 10$, ο ρυθμός μεταβολής της κατάθεσης θα είναι:

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=10} = 0{,}05A(10) - 1000 = 0{,}05 \cdot 8244 - 1000 = -587{,}8 < 0$$

Δηλ. σηκώνει χρήματα με ρυθμό μεγαλύτερο απ’ τον ρυθμό κατάθεσης!

Άρα: $0{,}05A - 1000 < 0$, $\forall t > 10$

Επομένως: $\left|0{,}05A - 1000\right| = 1000 - 0{,}05A$

Δηλ. η (1): $20\ln(1000 - 0{,}05A) = t + c_1 \Rightarrow \ln(1000 - 0{,}05A) = 0{,}05(t + c_1) \Rightarrow$

$$1000 - 0{,}05A = e^{0{,}05(t+c_1)} = e^{0{,}05c_1} \cdot e^{0{,}05t} = c_2 e^{0{,}05t} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1000 - c_2 e^{0{,}05t}}{0{,}05} \Rightarrow A(t) = 20000 - c_3 e^{0{,}05t} \quad (c_3 = 20c_2)$$

Με βάση την αρχική συνθήκη: $A(10) = 8244$, η σταθερά c_3 υπολογίζεται ως: $c_3 = 7130$

Άρα η ειδική λύση είναι: $A(t) = 20000 - 7130\,e^{0{,}05t}$

Πρόβλημα: Μπορείτε να υπολογίσετε σε πόσα χρόνια θα τελειώσουν τα χρήματα;

Παράδειγμα 5ο (Μοντέλο ανάπτυξης Harrod – Domar)

Οι αποταμιεύσεις S είναι ανάλογες προς το εισόδημα Y, η επένδυση I (δηλ. η μεταβολή στο μετοχικό κεφάλαιο) είναι ανάλογη προς την χρονική μεταβολή στο εισόδημα, και στην ισορροπία, η επένδυση είναι ίση με τις αποταμιεύσεις.
Δηλ. το μοντέλο των Harrod – Domar είναι:

$$\begin{cases} S = s \cdot Y \\ I = \dot{K} = v \cdot \dot{Y} \\ I = S \end{cases}$$

(όπου η τελεία πάνω από τη μεταβλητή συμβολίζει την παράγωγο)

Αντικαθιστούμε τις δυο πρώτες στην τρίτη (σχέση ισορροπίας):

$$v \cdot \dot{Y} = s \cdot Y \Rightarrow \dot{Y} = \frac{s}{v} Y \Rightarrow \dot{Y} - \frac{s}{v} Y = 0 \quad (1)$$

Με αρχικές τιμές: $I_0 = S_0 = s \cdot Y_0$

Η (1) είναι ομογενής δ.εξ., όπου ο ρυθμός αύξησης του εισοδήματος ισούται με s/v.
Τον λόγο αυτόν ο Harrod ονομάζει «**εγγυημένο αναπτυξιακό ρυθμό**».

Η λύση της (1) (με βάση την αρχική συνθήκη) θα είναι: $Y(t) = Y_0 \cdot e^{\left(s/v\right) \cdot t}$

Παράδειγμα 6ο (Μοντέλο ανάπτυξης του Solow)

Έστω η συνεχής συνάρτηση παραγωγής: $Y = F(K, L)$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ομογενής 1ου βαθμού.

Έστω: $k = \dfrac{K}{L}$: ο λόγος του κεφαλαίου προς την εργασία, και

$y = \dfrac{Y}{L}$: ο λόγος παραγωγής προς την εργασία

Τότε:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L},1\right) = F(k,1) = f(k)$$

Δηλ.: $y = f(k)$, $\mu\varepsilon$ $f(0) = 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0\ \kappa\alpha\iota\ k > 0$

Κάνουμε ακόμη δύο υποθέσεις:

1. Το εργατικό δυναμικό αυξάνεται με σταθερό ρυθμό n και είναι ανεξάρτητο από κάθε οικονομική μεταβλητή του συστήματος, δηλ. $\dot{L} = n \cdot L$, $L(0) = L_0$
2. Οι αποταμιεύσεις αποτελούν ένα σταθερό ποσοστό της παραγωγής ($S = s\ Y$) και, επίσης, η αποταμίευση ισούται με την επένδυση (που είναι απλά η μεταβολή του μετοχικού κεφαλαίου συν το υποκατάστατο της επένδυσης), δηλ.

$$\begin{cases} I = \dot{K} + \delta \cdot K \\ S = s \cdot Y \\ \dot{K} + \delta \cdot K = s \cdot Y \\ K(0) = K_0 \end{cases}$$

Ορίσαμε: $k = \dfrac{K}{L}$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt} \cdot L - K \cdot \frac{dL}{dt}}{L^2} \Rightarrow \frac{dk}{dt} = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \frac{dK}{dt} - \left(\frac{K}{L}\right) \cdot \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \frac{dL}{dt} = \left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{1}{K}\right) \cdot \frac{dK}{dt} - \left(\frac{K}{L}\right) \cdot \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \frac{dL}{dt} = k \cdot \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right) \quad (1)$$

Αλλά: $\dot{K} = s \cdot Y - \delta \cdot K \Rightarrow \dfrac{\dot{K}}{K} = \dfrac{s \cdot Y - \delta \cdot K}{K} = \dfrac{s \cdot Y}{L} \cdot \left(\dfrac{L}{K}\right) - \delta = \dfrac{s \cdot f(k)}{k} - \delta$

$\kappa\alpha\iota \ \dfrac{\dot{L}}{L} = n$

Άρα: $\dfrac{dk}{dt} = k \cdot \left(\dfrac{s \cdot f(k)}{k} - \delta - n\right) = s \cdot f(k) - \delta \cdot k - n \cdot k = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k \quad (2)$

$\mu\varepsilon \ k(0) = \dfrac{K_0}{L_0} = k_0$

Στην (2), όμως, δεν γνωρίζουμε την $f(k)$, και άρα δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση.

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής $F(K, L)$ είναι της μορφής Cobb – Douglas:

$$Y = rK^a L^{1-a} \quad , 0 < a < 1$$

Διαιρώντας με L παίρνουμε: $y = \dfrac{Y}{L} = r\left(\dfrac{K}{L}\right)^a \Rightarrow y = f(k) = r \cdot k^a$

Τότε η (2) γράφεται:

$$\frac{dk}{dt} = s \cdot r \cdot k^a - (n+\delta)\cdot k \Rightarrow \boxed{\frac{dk}{dt} + (n+\delta)\cdot k = s \cdot r \cdot k^a \quad (3)}$$

Εξίσωση Bernoulli

(λύνεται με μετασχηματισμό και μετατρέπεται σε γραμμική δ.εξ.)

Ο μετασχηματισμός είναι: $v = k^{1-a}$

Οπότε: $\dfrac{dv}{dt} = (1-a)\cdot k^{-a} \cdot \dfrac{dk}{dt} \Rightarrow \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{k^a}{1-a} \cdot \dfrac{dv}{dt}$ Και η (3) θα γραφεί:

$$\frac{k^a}{1-a} \cdot \frac{dv}{dt} + (n+\delta)\cdot k = s \cdot r \cdot k^a \Rightarrow \frac{1}{1-a} \cdot \frac{dv}{dt} + (n+\delta)\cdot k^{1-a} = s \cdot r \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + (1-a)\cdot(n+\delta)\cdot v = (1-a)\cdot s \cdot r \quad (4)}$$

γραμμική δ. εξ. με λύση:

$$v(t) = \frac{r \cdot s}{n+\delta} + \left(v_0 - \frac{r \cdot s}{n+\delta}\right) e^{-(1-a)\cdot(n+\delta)\cdot t} \quad \mu\varepsilon \ v(0) = v_0 = k_0^{1-a}$$

$$\Rightarrow k(t) = \left[\frac{r \cdot s}{n+\delta} + e^{-(1-a)(n+\delta)t} \cdot \left(k_0^{1-a} - \frac{r \cdot s}{n+\delta}\right)\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

Λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης

Η πιο κοινή γρ. δ. εξ. 1ης τάξης στα οικονομικά υποδείγματα είναι:

$$\frac{dy}{dt}+p(t)\cdot y=g(t)$$, όπου οι p, g συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου

Αν βέβαια: $p(t)=b$ και $g(t)=a$, δηλ. σταθερές συναρτήσεις, τότε:

$$\frac{dy}{dt}+b\cdot y=a$$

Λύση:

Βήμα 1ο: Γράφουμε τη γρ. δ. εξ. στη μορφή: $\frac{dy}{dt}+p(t)\cdot y=g(t)$

Βήμα 2ο: Υπολογίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα: $\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$

Βήμα 3ο: Πολλ/με και τα δύο μέλη της (1) με τον $\mu(t)$ και ολοκληρώνουμε (προσθέτοντας τη σταθερά της ολοκλήρωσης):

$$\mu(t)\cdot\left(\frac{dy}{dt}+p(t)\cdot y\right)=\mu(t)\cdot g(t)\Rightarrow\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\cdot y\big)=\mu(t)\cdot g(t)\Rightarrow\int\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\cdot y\big)dt=\int\mu(t)\cdot g(t)\,dt+c$$

Βήμα 4ο: Άρα η γενική λύση είναι: $\mu(t)\cdot y=\int\mu(t)\cdot g(t)\,dt+c$

Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών: $\frac{dy}{dt} = 2y + 4t \ , y(0) = 1$

Βήμα 1ο:

$$\frac{dy}{dt} \underbrace{-2}_{p(t)} y = \underbrace{4t}_{g(t)}$$

Βήμα 2ο:

$$\mu(t) = e^{\int -2\,dt} = e^{-2t}$$

Βήμα (3ο) 4ο:

$$e^{-2t} \cdot y = \int 4t \cdot e^{-2t}\,dt + c \Rightarrow e^{-2t} \cdot y = -2te^{-2t} - e^{-2t} + c$$

$$\Rightarrow y(t) = -2t - 1 + ce^{2t}$$

Αφού: $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1 + c \Rightarrow c = 2$

Και τελικά, η (ειδική) λύση είναι: $y(t) = -2t - 1 + 2e^{2t}$

Ανατοκισμός (ξανά)

Ποσό A ανατοκίζεται ετήσια με επιτόκιο r για t χρόνια. Το ποσό P, μετά τα t αυτά χρόνια, θα είναι: $$P_t = A(1+r)^t$$

Αν το ποσό A ανατοκίζεται m-φορές ετησίως, τότε: $$P_t = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Και αν: $m \to \infty$, τότε $P(t) = A \cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = Ae^{rt}$

Αν το δούμε το θέμα <u>διαφορικά</u>:

$$\frac{dP}{dt} = A\frac{d(e^{rt})}{dt} = r \cdot Ae^{rt} \quad \Rightarrow \frac{dP}{dt} = r \cdot P \quad (1)$$

Τι σας θυμίζει;

Η (1) έχει λύση: $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$, όπου P_0 το αρχικό κεφάλαιο (δηλ. το A)

Και αν εκτός από το τόκο, rP, καταθέταμε σταθερά και ένα ποσό d;

$$\frac{dP}{dt} = rP + d \Rightarrow \frac{dP}{dt} - rP = d$$

Δηλ. μια γραμ. δ. εξ. με σταθερούς συντελεστές.

<u>Μπορείτε να την λύσετε (πλέον)!</u>

<u>*Λύση*</u>: $P(t) = P_0 \cdot e^{rt} + \frac{d}{r}\left(e^{rt} - 1\right)$

Διαφορικές εξισώσεις και ισοκλινείς

Αν η δ. εξ. λύνεται δύσκολα, τότε αντί να βρούμε αναλυτική λύση, κάνουμε: **ποιοτική έρευνα**.

Ας δούμε ένα (γενικό) παράδειγμα. Έστω η δ. εξ.:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = ax - by} \;,\; y(0) = \frac{a}{b} \;,\; a,b > 0$$

Αν η $y = f(x) \Rightarrow \quad f'(x) = ax - bf(x) \;,\; f(0) = \dfrac{a}{b}$

$$\Rightarrow f''(x) = a - bf'(x) = a - b\left[ax - bf(x)\right] \Rightarrow f''(x) = a - abx + b^2 f(x)$$

Δηλ. κάθε παράγωγος υπολογίζεται με τη βοήθεια των a, b, x και $f(x)$

Ε, και;
Τι μας ενδιαφέρουν οι παραστάσεις των $f'(x)$, $f''(x)$;

Και όμως! Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού μας οδηγούν στην ποιοτική έρευνα της συμπεριφοράς των γραφημάτων της $f(x)$

Ας θυμηθούμε μερικά:

1) $f(0)=\dfrac{a}{b}$ ⇒ Άρα η f τέμνει τον άξονα των y στο a/b

2) $f'(0)=a\cdot 0-b\cdot f(0)=-b\cdot\dfrac{a}{b}=-a<0$ ⇒ Άρα η f φθίνουσα κοντά στο 0.

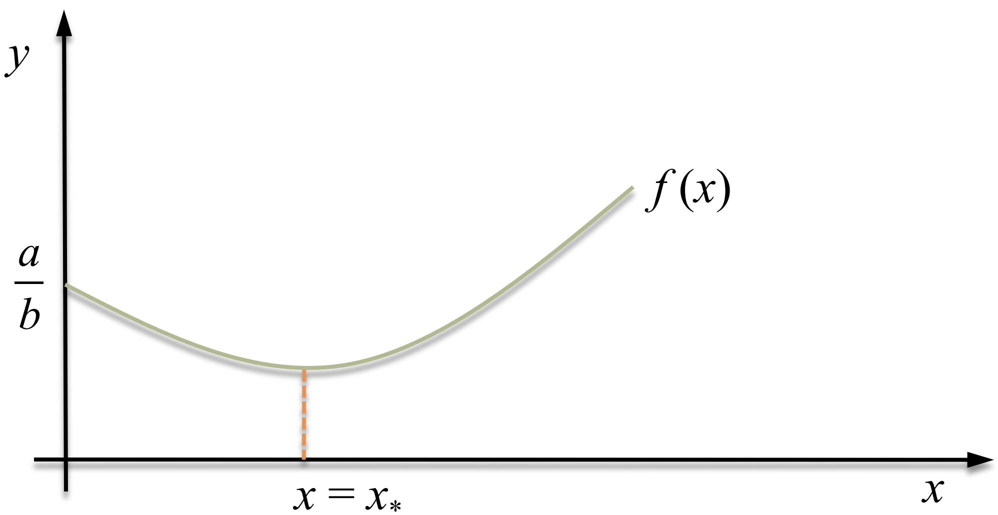
3) $f'(x_*)=0\Rightarrow ax_*-bf(x_*)=0\Rightarrow f(x_*)=\dfrac{ax_*}{b}$

Το $x=x_*$: ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο;)

$$f''(x_*)=a-abx_*+b^2f(x_*)=a-abx_*+b^2\frac{ax_*}{b}=a>0$$

Άρα το $x=x_*$ είναι <u>ελάχιστο</u>

Μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποιο (πρόχειρο) σχήμα;



Μπορούμε να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες;

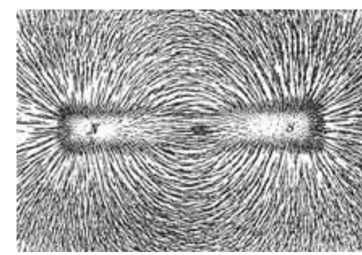
Ισοκλινείς – Πεδίο διευθύνσεων

Έστω (και πάλι) η δ. εξ. $\dfrac{dy}{dx} = ax - by$

Τότε για κάθε σημείο (x, y) (και με τα a, b γνωστά) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$: γνωστό!

Δηλ. μπορούμε να γνωρίζουμε την κλίση σε κάθε σημείο (του επιπέδου)!

- Το διάγραμμα αυτό το ονομάζουμε: **Πεδίο διευθύνσεων** της δ. εξ.
- Τις κλίσεις τις συμβολίζουμε με μικρές γραμμούλες *(θυμηθείτε από τη φυσική, το γνωστό πείραμα με τον μαγνήτη και τα ρινίσματα σιδήρου)*
- Δεν είναι δυνατόν να ζωγραφίσουμε όλες τις κλίσεις και αποφασίζουμε να ζωγραφίσουμε μόνο τα (x, y), που έχουν δεδομένη κλίση, m
- Το σύνολο των σημείων (x, y), όπου $\dfrac{dy}{dx} = m$, ονομάζουμε **ισοκλινή**



π.χ. $\dfrac{dy}{dx} = ax - by = m \Rightarrow y = \dfrac{ax}{b} - \dfrac{m}{b}$: ευθεία

Δηλ. αφού η κλίση dy/dx σε κάθε σημείο της ισοκλινούς είναι m :

- Άρα αν $m = 0$, κατά μήκος της $y = ax/b$, η κλίση θα είναι 0.
- Άρα, αν $m = 1$, κατά μήκος της $y = ax/b - 1/b$, η κλίση θα είναι 1, δηλ. 45^o
- Άρα, αν $m = 2$, κατά μήκος της $y = ax/b - 2/b$, η κλίση θα είναι 2, δηλ. 63^o , κ.ο.κ.

Παράδειγμα

Έστω η δ. εξ. $$\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

Βήμα 1°:

Αν $\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow 2x - y = m \Rightarrow y = 2x - m$

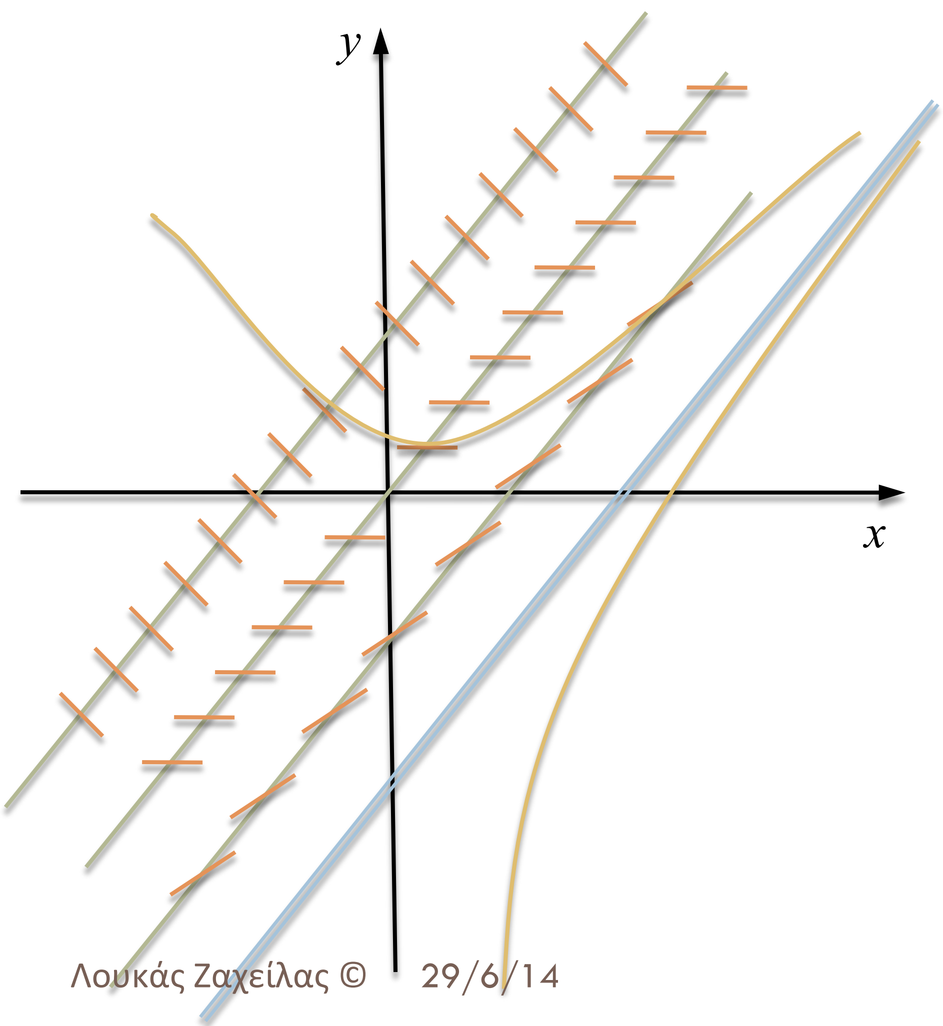
Βήμα 2° – 3°:

$$m = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$m = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$m = -1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

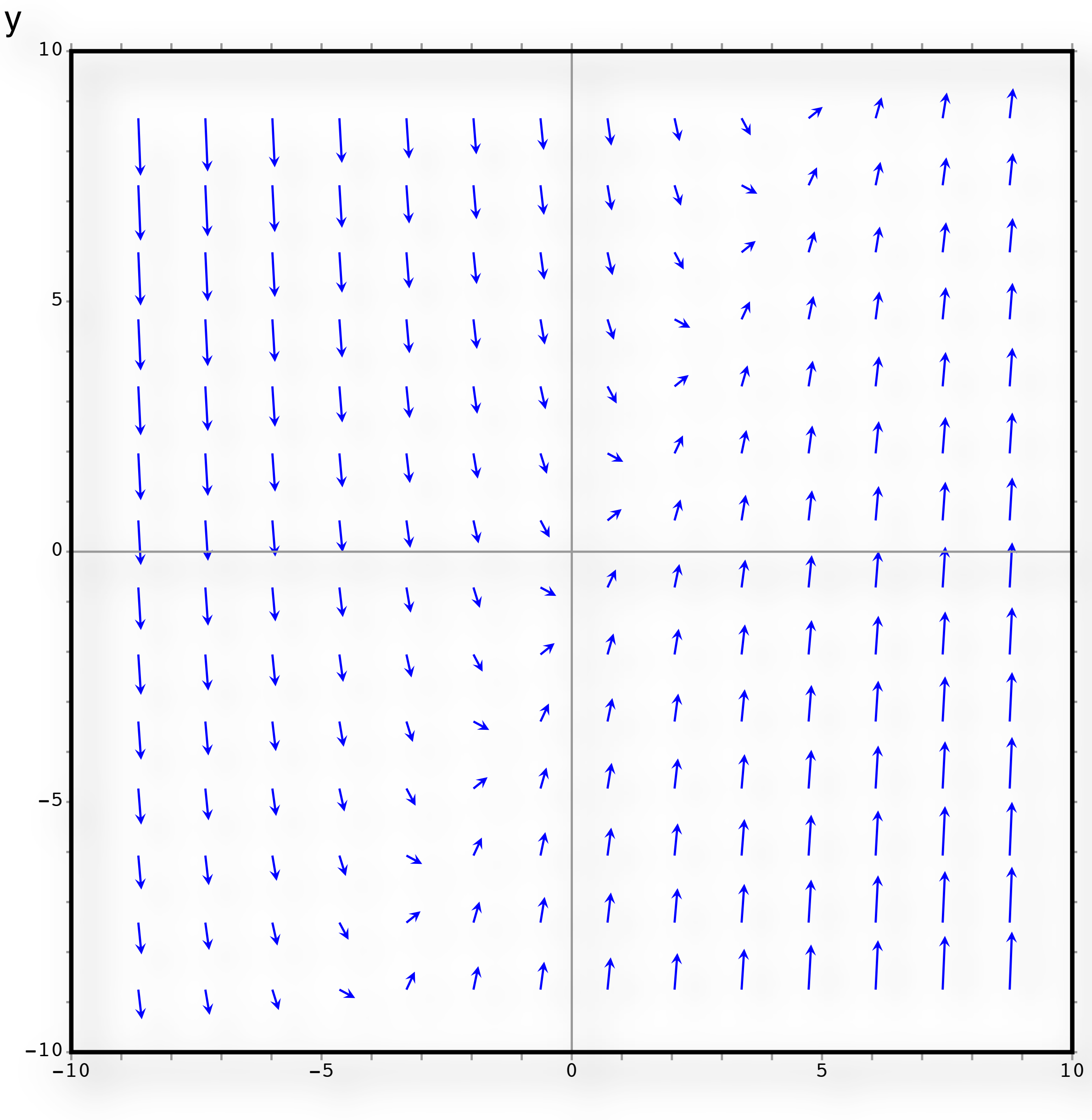
Αλλά: $m = \frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 2$

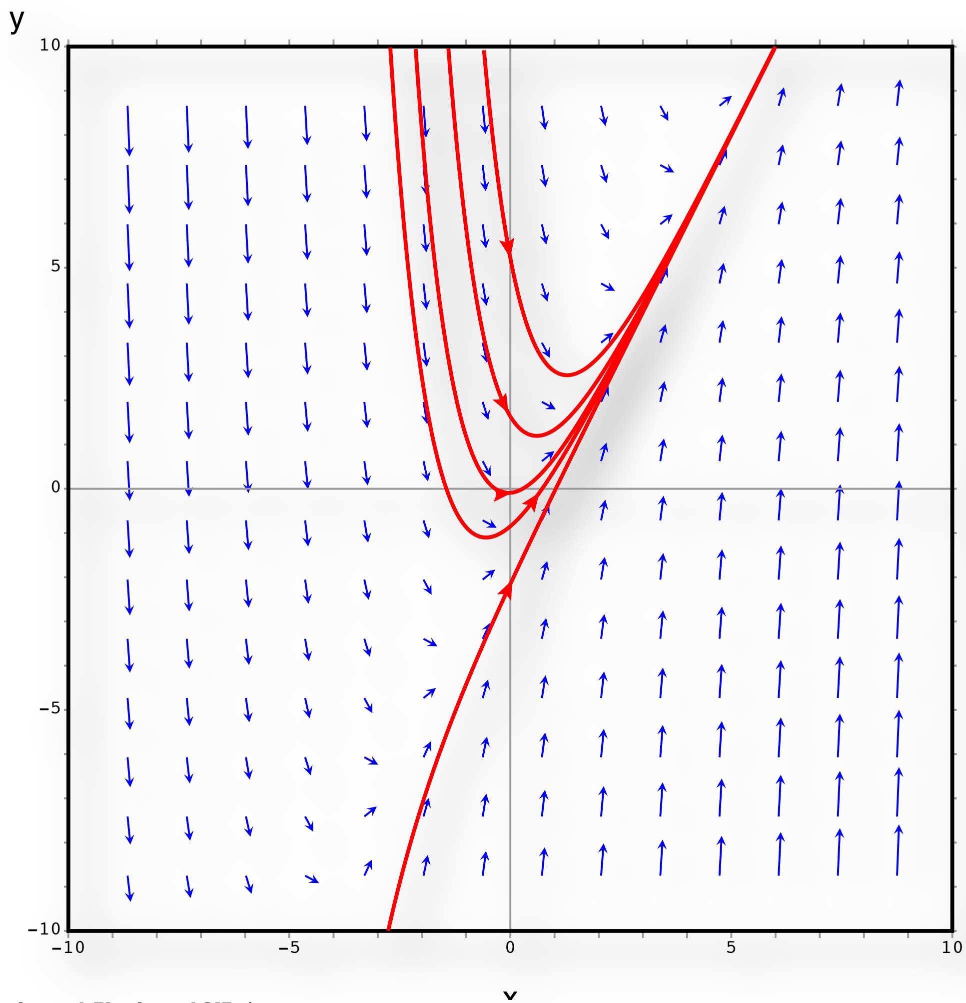


Βήμα 4°:

Ολοκληρωτικές καμπύλες

Πάμε Maxima!!!!





(%i1) load("plotdf")$ Φορτώνει το πακέτο «plotdf» στο *Maxima*

(%i2) plotdf(2*x-y,[trajectory_at,0,1])$ Σχεδιάζει τη λύση στο επίπεδο (x, y)

(%i3) plotdf(m*x-k*y,[trajectory_at,0,1],[parameters,"m=1,k=1"],[sliders,"m=1:5,k=1:5"])$